# Archiv

der

# Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

*Johann August Grunert*,
Professor zu Greifswald.

Siebenunddreissigster Theil.

Mit vier lithographirten Tafeln.

**Greifswald.**
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

**1861.**

# Inhaltsverzeichniss des siebenunddreissigsten Theils.

## Geometrie.

## Trigonometrie.

## Geodäsie.



## Mechanik.



## Astronomie.



## Physik.



## Literarische Berichte *).



*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

# I.

# Allgemeine Theorie der Kegelschnitte als Curven im Raume betrachtet, nebst deren Anwendung auf die Bestimmung der Bahnen der um die Sonne in Kegelschnitten sich bewegenden Weltkörper und der Proximitäten dieser Bahnen.

Von

dem Herausgeber.

---

Als Curven im Raume sind die Kegelschnitte bis jetzt noch nicht einer ausführlichen und allgemeinen Betrachtung unterworfen worden, was um so auffallender ist, weil dieselben bei vielen der wichtigsten Anwendungen aus diesem Gesichtspunkte aufgefasst werden müssen. Ich habe daher, nach öfteren Versuchen, in dieser Abhandlung eine solche Theorie entwickelt, und davon, was ich in diesem Falle für wichtig, wenigstens für besonders lehrreich hielt, ein Paar Anwendungen auf die Beantwortung zweier für die Astronomie höchst wichtiger Fragen gemacht, bei welchen man nicht vergessen darf, dass sie sich unmittelbar an die hier entwickelte Theorie anschliessen sollen, und zunächst lediglich zu deren Erläuterung bestimmt sind.

---

## Erstes Kapitel.

### Allgemeine Theorie der Kegelschnitte, als Curven im Raume betrachtet.

#### §. 1.

Wenn eine gerade Linie, die **Directrix**, und ein Punkt, der **Brennpunkt**, gegeben sind; so nennt man einen **Kegelschnitt** jede ganz in der durch die Directrix und den Brennpunkt be-

stimmten Ebene liegende Curve von solcher Beschaffenheit, dass die beiden Entfernungen jedes ihrer Punkte von der Directrix und dem Brennpunkte in einem gegebenen constanten Verhältnisse zu einander stehen, so dass also der Bruch

$$\frac{\textit{Entfernung vom Brennpunkte}}{\textit{Entfernung von der Directrix}}$$

für alle Punkte des Kegelschnitts eine constante Grösse ist, welche die **Charakteristik** des Kegelschnitts heisst. Die durch den Brennpunkt gehende, auf der Directrix senkrecht stehende Gerade wird die **Axe** des Kegelschnitts genannt.

Da hiernach jeder Kegelschnitt ganz in einer und derselben Ebene liegt, so werden natürlich alle Untersuchungen über die Eigenschaften der Kegelschnitte am Besten und Einfachsten auf diese Ebene eingeschränkt und bloss in derselben angestellt. Eine derartige Untersuchung über die Eigenschaften der Kegelschnitte, wie sie in der Abhandlung: Archiv d. M. u. P. Thl. XXXI. Nr. XIII. von mir — und bekanntlich in anderer Weise früher schon oft — bereits durchgeführt worden ist, bezweckt die vorliegende Abhandlung nicht und setzt dieselbe voraus, indem diese Abhandlung vielmehr im Interesse derjenigen Wissenschaften, für welche, wie namentlich für die Astronomie, die Betrachtung der Kegelschnitte als beliebig im Raume liegender Curven von besonderer Wichtigkeit ist, nur die Entwickelung der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte für den Raum überhaupt, in Verbindung mit einigen der wichtigsten astronomischen Anwendungen dieser allgemeinen Theorie, sich zur Aufgabe macht. Im Allgemeinen bemerken wir, dass im Folgenden nur rechtwinklige Coordinatensysteme Anwendung finden werden.

## §. 2.

Die Coordinaten des Brennpunktes seien $f, g, h$, und

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

seien die Gleichungen der Directrix. Da die Axe durch den Brennpunkt geht, so haben ihre Gleichungen die Form:

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x-f}{\cos\varphi}=\frac{y-g}{\cos\psi}=\frac{z-h}{\cos\chi};$$

und weil die Axe auf der Directrix senkrecht steht, so findet bekanntlich die folgende Gleichung statt:

3) . . . . . $\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\cos\psi+\cos\gamma\cos\chi=0.$

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt der Axe mit der Directrix durch $(XYZ)$; so haben wir nach 1) und 2) zwischen den Coordinaten $X$, $Y$, $Z$ dieses Durchschnittspunkts die folgenden Gleichungen:

$$4) \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{X-a}{\cos\alpha}=\frac{Y-b}{\cos\beta}=\frac{Z-c}{\cos\gamma}=G, \\ \frac{X-f}{\cos\varphi}=\frac{Y-g}{\cos\psi}=\frac{Z-h}{\cos\chi}=G_1; \end{array}\right.$$

aus denen sich ferner die Gleichungen:

$$5) \ldots \left\{\begin{array}{ll} X=a+G\cos\alpha, & X=f+G_1\cos\varphi, \\ Y=b+G\cos\beta, & Y=g+G_1\cos\psi, \\ Z=c+G\cos\gamma; & Z=h+G_1\cos\chi; \end{array}\right.$$

also zwischen $G$ und $G_1$ die Gleichungen:

$$6) \ldots \left\{\begin{array}{l} (f-a)-G\cos\alpha+G_1\cos\varphi=0, \\ (g-b)-G\cos\beta+G_1\cos\psi=0, \\ (h-c)-G\cos\gamma+G_1\cos\chi=0 \end{array}\right.$$

ergeben.

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man nach 3), unter gleichzeitiger Berücksichtigung der bekannten Gleichung

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

für $G$ auf der Stelle den folgenden Ausdruck:

7) . . . $G=(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma.$

Stellt man die Gleichungen 6) auf folgende Art dar:

$$G\cos\alpha-G_1\cos\varphi=f-a,$$

$$G\cos\beta-G_1\cos\psi=g-b,$$

$$G\cos\gamma-G_1\cos\chi=h-c;$$

quadrirt sie nun, und addirt sie hierauf zu einander; so erhält

man nach 3), wenn man zugleich die beiden bekannten Gleichungen

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,\quad \cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

berücksichtigt, die Gleichung:

$$8)\ \ldots\ G^2+G_1{}^2=(f-a)^2+(g-b)^2+(h-c)^2,$$

woraus sich

$$G_1{}^2=(f-a)^2+(g-b)^2+(h-c)^2-G^2,$$

also nach 7):

$$9)\quad G_1=\pm\left\{\begin{array}{l}(f-a)^2+(g-b)^2+(h-c)^2\\-[(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma]^2\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ergiebt.

Es ist auch:

$$10)\ \ldots\ G_1=\pm\left\{\begin{array}{l}[(f-a)\cos\beta-(g-b)\cos\alpha]^2\\+[(g-b)\cos\gamma-(h-c)\cos\beta]^2\\+[(h-c)\cos\alpha-(f-a)\cos\gamma]^2\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

und:

$$11)\ G_1=\pm\left\{\begin{array}{r}(f-a)^2\sin\alpha^2+(g-b)^2\sin\beta^2+(h-c)^2\sin\gamma^2\\-2(f-a)(g-b)\cos\alpha\cos\beta\\-2(g-b)(h-c)\cos\beta\cos\gamma\\-2(h-c)(f-a)\cos\gamma\cos\alpha\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nach 5) und 7) ist:

$$12)\quad \begin{array}{l}X=a+\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\alpha,\\Y=b+\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\beta,\\Z=c+\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\gamma;\end{array}$$

also nach dem zweiten Systeme von Gleichungen in 5):

13)

$$\cos\varphi=-\frac{f-a-\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\alpha}{G_1},$$

$$\cos\psi=-\frac{g-b-\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\beta}{G_1},$$

$$\cos\chi=-\frac{h-c-\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\gamma}{G_1};$$

wo man für $G_1$ einen seiner obigen Ausdrücke zu setzen hat, und das dadurch eingeführte doppelte Zeichen, wie auf der Stelle erhellet, ganz in der Natur der Sache liegt.

Die Gleichungen der Axe sind nach 2) und 13):

14)

$$\frac{x-f}{f-a-\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\alpha}$$
$$=\frac{y-g}{g-b-\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\beta}$$
$$=\frac{z-h}{h-c-\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}\cos\gamma}.$$

In Betreff der Grössen $G$ und $G_1$ erhellet auf der Stelle aus den Gleichungen 5), dass $G$ die positiv oder negativ genommene Entfernung des Durchschnittspunkts der Axe mit der Directrix von dem Punkte $(abc)$ ist, jenachdem der Durchschnittspunkt der Axe mit der Directrix in dem der beiden von dem Punkte $(abc)$ ausgehenden Theile der Directrix, welchem die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entsprechen, oder in dem entgegengesetzten Theile der Directrix liegt; und dass $G_1$ die positiv oder negativ genommene Entfernung des Durchschnittspunkts der Axe mit der Directrix von dem Brennpunkte $(fgh)$ ist, jenachdem der Durchschnittspunkt der Axe mit der Directrix in dem der beiden von dem Brennpunkte $(fgh)$ ausgehenden Theile der Axe, welchem die Winkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ entsprechen, oder in dem entgegengesetzten Theile der Axe liegt.

Da in der Ebene des Kegelschnitts der Punkt $(abc)$ liegt, so hat die Gleichung dieser Ebene im Allgemeinen die Form:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0.$$

Weil nun aber in dieser Ebene die ganze Directrix liegt, so ergiebt sich aus vorstehender Gleichung und den Gleichungen 1) die Gleichung:

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0.$$

Weil aber ferner in der Ebene des Kegelschnitts auch der Brennpunkt $(fgh)$ des Kegelschnitts liegt, so ist nach dem Obigen:

$$A(f-a)+B(g-b)+C(h-c)=0;$$

und aus den beiden vorstehenden Gleichungen ergiebt sich nun unmittelbar, dass man, weil es hier offenbar nur auf die Verhält-

nisse der Grössen $A$, $B$, $C$ zu einander ankommt, für diese Grössen die folgenden Ausdrücke setzen kann:

$$15) \quad \left\{\begin{array}{l} A=(g-b)\cos\gamma-(h-c)\cos\beta, \\ B=(h-c)\cos\alpha-(f-a)\cos\gamma, \\ C=(f-a)\cos\beta-(g-b)\cos\alpha. \end{array}\right.$$

Also ist die Gleichung der Ebene des Kegelschnitts nach dem Obigen:

$$16) \quad \left.\begin{array}{r} \{(g-b)\cos\gamma-(h-c)\cos\beta\}(x-a) \\ +\{(h-c)\cos\alpha-(f-a)\cos\gamma\}(y-b) \\ +\{(f-a)\cos\beta-(g-b)\cos\alpha\}(z-c) \end{array}\right\}=0,$$

oder, wie sich auf der Stelle ergiebt, wenn man in dieser Gleichung $f$, $g$, $h$ für $x$, $y$, $z$ setzt, und die dadurch resultirende Gleichung dann von der vorstehenden Gleichung abzieht, auch:

$$17) \quad \left.\begin{array}{r} \{(g-b)\cos\gamma-(h-c)\cos\beta\}(x-f) \\ +\{(h-c)\cos\alpha-(f-a)\cos\gamma\}(y-g) \\ +\{(f-a)\cos\beta-(g-b)\cos\alpha\}(z-h) \end{array}\right\}=0.$$

## §. 3.

Von einem ganz beliebigen Punkte $(xyz)$ im Raume wollen wir uns jetzt auf die Directrix ein Perpendikel gefällt denken, und den Durchschnittspunkt dieses Perpendikels mit der Directrix durch $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ bezeichnen. Dann werden zwischen den Coordinaten $x$, $y$, $z$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ jedenfalls Gleichungen von der Form

$$18) \quad \frac{x-\mathfrak{x}}{\cos\theta}=\frac{y-\mathfrak{y}}{\cos\omega}=\frac{z-\mathfrak{z}}{\cos\varpi},$$

und zwischen den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\theta$, $\omega$, $\varpi$ wird die Gleichung

$$19) \quad \cos\alpha\cos\theta+\cos\beta\cos\omega+\cos\gamma\cos\varpi=0$$

Statt finden. Ferner hat man nach 1), weil der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ in der Directrix liegt, die Gleichungen:

$$20) \quad \frac{\mathfrak{x}-a}{\cos\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-b}{\cos\beta}=\frac{\mathfrak{z}-c}{\cos\gamma}.$$

Aus den Gleichungen 18) und 19) folgt:

$$21) \quad (x-\mathfrak{x})\cos\alpha+(y-\mathfrak{y})\cos\beta+(z-\mathfrak{z})\cos\gamma=0,$$

also:

$$(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma$$
$$=(\mathfrak{x}-a)\cos\alpha+(\mathfrak{y}-b)\cos\beta+(\mathfrak{z}-c)\cos\gamma,$$

und folglich nach 20), weil

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

ist:

22)

$$\mathfrak{x}-a=\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\alpha,$$
$$\mathfrak{y}-b=\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\beta,$$
$$\mathfrak{z}-c=\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\gamma;$$

also:

23)

$$x-\mathfrak{x}=(x-a)-\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\alpha,$$
$$y-\mathfrak{y}=(y-b)-\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\beta,$$
$$z-\mathfrak{z}=(z-c)-\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}\cos\gamma.$$

Bezeichnet $P$ die Entfernung des Punktes $(xyz)$ von der Directrix, also nach dem Vorhergehenden die Entfernung der beiden Punkte $(xyz)$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ von einander, so ist:

$$P^2=(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2,$$

folglich nach 23), wie man sogleich übersieht:

24)

$$P^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}^2,$$

oder:

25)

$$\begin{aligned}P^2= & \{(x-a)\cos\beta-(y-b)\cos\alpha\}^2\\ & +\{(y-b)\cos\gamma-(z-c)\cos\beta\}^2\\ & +\{(z-c)\cos\alpha-(x-a)\cos\gamma\}^2,\end{aligned}$$

oder:

26)

$$\begin{aligned}P^2=(x-a)^2\sin\alpha^2+(y-b)^2\sin\beta^2+(z-c)^2\sin\gamma^2 & -2(x-a)(y-b)\cos\alpha\cos\beta\\ & -2(y-b)(z-c)\cos\beta\cos\gamma\\ & -2(z-c)(x-a)\cos\gamma\cos\alpha.\end{aligned}$$

Liegt jetzt der Punkt $(xyz)$ in der Ebene des Kegelschnitts, so müssen seine Coordinaten entweder die Gleichung 16), oder die Gleichung 17) befriedigen; und wenn nun dieser Punkt ein Punkt des Kegelschnitts selbst sein soll, so müssen nach der Natur der Kegelschnitte, wenn die Charakteristik durch $n$ bezeichnet wird, wir die Entfernung des Punktes $(xyz)$ von dem Brennpunkte $(fgh)$ erhalten, wenn wir das Perpendikel $P$ mit der Charakteristik $n$ multipliciren, es muss also

$$(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2=n^2P^2$$

sein. Hieraus, aus 16) und 17) und aus 24), 25), 26) ergiebt sich nun, dass wir die allgemeinen Gleichungen des Kegelschnitts erhalten, wenn wir mit einer der beiden folgenden Gleichungen:

27)

$$\left.\begin{array}{r}\{(g-b)\cos\gamma-(h-c)\cos\beta\}(x-a)\\+\{(h-c)\cos\alpha-(f-a)\cos\gamma\}(y-b)\\+\{(f-a)\cos\beta-(g-b)\cos\alpha\}(z-c)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{(g-b)\cos\gamma-(h-c)\cos\beta\}(x-f)\\+\{(h-c)\cos\alpha-(f-a)\cos\gamma\}(y-g)\\+\{(f-a)\cos\beta-(g-b)\cos\alpha\}(z-h)\end{array}\right\}=0$$

eine der drei folgenden Gleichungen verbinden:

28)

$$(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2$$
$$=n^2\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-[(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma]^2\},$$

$$(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2$$
$$=n^2\left\{\begin{array}{l}[(x-a)\cos\beta-(y-b)\cos\alpha]^2\\+[(y-b)\cos\gamma-(z-c)\cos\beta]^2\\+[(z-c)\cos\alpha-(x-a)\cos\gamma]^2\end{array}\right\},$$

$$(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2$$
$$=n^2\left\{\begin{array}{r}(x-a)^2\sin\alpha^2+(y-b)^2\sin\beta^2+(z-c)^2\sin\gamma^2-2(x-a)(y-b)\cos\alpha\cos\beta\\-2(y-b)(z-c)\cos\beta\cos\gamma\\-2(z-c)(x-a)\cos\gamma\cos\beta\end{array}\right\}.$$

Jenachdem unser Kegelschnitt eine

Ellipse, Parabel, Hyperbel

ist, ist bekanntlich respective:

$$n<1,\quad n=1,\quad n>1.$$

## §. 4.

Die erste der drei Gleichungen 28) bringt man leicht auf die folgende Form:

$$29) \quad (x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2$$
$$=n^2\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2 \\ -2[ax+by+cz-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)] \\ +x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2 \end{array}\right\}.$$

Wenn wir die Entfernung des Anfangs der Coordinaten von der Directrix durch $\Pi$ bezeichnen, so ist nach 24) offenbar:

$$30) \quad \Pi^2=a^2+b^2+c^2-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2;$$

und wenn wir die Entfernung des Brennpunktes von der Directrix jetzt durch $E$ bezeichnen, so ist nach 24) oder 9):

$$31)$$
$$E^2=(f-a)^2+(g-b)^2+(h-c)^2-\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}^2.$$

Bezeichnet $p$ den Parameter des Kegelschnitts, so ist nach einer bekannten allgemeinen Eigenschaft dieser Curven*):

$$32) \quad p=2nE,$$

also nach 31):

$$33) \quad p=$$
$$2n\sqrt{(f-a)^2+(g-b)^2+(h-c)^2-\{(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma\}^2}.$$

Wenn wir den an sich willkührlichen Punkt $(abc)$ der Directrix mit dem Punkte zusammenfallen lassen, in welchem die Directrix von dem auf sie von dem Anfange der Coordinaten gefällten Perpendikel geschnitten wird; so ist:

$$34) \quad \Pi^2=a^2+b^2+c^2,$$

also nach 30):

$$35) \quad a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0,$$

---

*) Archiv d. M. und P. Thl. XXXI. S. 108.

wodurch sich die Gleichungen 29) und 33) in die folgenden verwandeln:

$$36) \quad \ldots\ldots \quad (x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2$$
$$=n^2\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2-2(ax+by+cz) \\ +x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2 \end{array}\right\},$$

und:

37)

$$p=2n\sqrt{(f-a)^2+(g-b)^2+(h-c)^2-(f\cos\alpha+g\cos\beta+h\cos\gamma)^2}.$$

Wenn wir den an sich willkührlichen Punkt $(abc)$ der Directrix mit dem Durchschnittspunkte $(XYZ)$ der Axe mit der Directrix zusammenfallen lassen; so ist:

$$a=X,\quad b=Y,\quad c=Z;$$

also nach jeder der drei Gleichungen 12):

$$38) \quad \ldots \quad (f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma=0,$$

folglich nach 33):

$$39) \quad \ldots\ldots \quad p=2n\sqrt{(f-a)^2+(g-b)^2+(h-c)^2}.$$

Es thut der Allgemeinheit der Betrachtung keinen wesentlichen Eintrag, wenn wir der Vereinfachung der analytischen Ausdrücke wegen von jetzt an den Brennpunkt als Anfang der Coordinaten annehmen, also

$$f=0,\quad g=0,\quad h=0$$

setzen; denn wenn man von den unter dieser Voraussetzung entwickelten Formeln wieder zu Formeln für ein beliebiges, dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme, dessen Anfang der Brennpunkt ist, paralleles Coordinatensystem, in welchem die Coordinaten des Brennpunktes $f$, $g$, $h$ sind, übergehen will; so braucht man alle in den in Rede stehenden Formeln vorkommenden Coordinaten bloss um $f$, $g$, $h$ zu vermindern. Zugleich aber wollen wir zu weiterer Vereinfachung der anlytischen Ausdrücke noch den Punkt $(abc)$ mit dem Durchschnittspunkte der Axe mit der Directrix, also mit dem Fusspunkte des von dem Anfange der Coordinaten auf die Directrix gefällten Perpendikels zusammenfallen lassen. Dann haben wir nach 35) und 38) die Gleichung:

$$40) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0,$$

und nach 37) und 39) die Gleichung:

41) . . . . . . . . . $p = 2n\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

die Gleichung 36) wird aber:

42) . . . . . . . . . $\frac{1-n^2}{n^2}(x^2 + y^2 + z^2)$

$$= \left(\frac{p}{2n}\right)^2 - 2(ax + by + cz) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

oder:

43) . . . . . . . . . . . . . . $\frac{1}{4}p^2$

$$= (1-n^2)(x^2+y^2+z^2) + n^2(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 + 2n^2(ax+by+cz),$$

oder:

44)

$$n^2 = \frac{x^2+y^2+z^2-\frac{1}{4}p^2}{x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2-2(ax+by+cz)}.$$

Endlich ist nach 17) die Gleichung der Ebene des Kegelschnitts:

45)

$$(b\cos\gamma - c\cos\beta)x + (c\cos\alpha - a\cos\gamma)y + (a\cos\beta - b\cos\alpha)z = 0.$$

## §. 5.

Unter den am Ende des vorhergehenden Paragraphen rücksichtlich des Coordinatensystems gemachten Voraussetzungen, die wir von jetzt an immer festhalten werden, sind die Gleichungen der Axe des Kegelschnitts:

46) . . . . . . . . . . . $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Von einem beliebigen Punkte $(xyz)$ in der Ebene des Kegelschnitts wollen wir uns nun auf die Axe ein Perpendikel gefällt denken, und den Durchschnittspunkt dieses Perpendikels mit der Axe durch $(uvw)$ bezeichnen, wo wir dann nach 46) die Gleichungen:

47) . . . . . . . . . . $\frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w}{c} = G'$

haben. Da aber das in Rede stehende Perpendikel mit der durch die Gleichungen 1) charakterisirten Directrix parallel ist, so haben wir ferner offenbar die Gleichungen:

48) . . . . . . $\frac{x-u}{\cos\alpha}=\frac{y-v}{\cos\beta}=\frac{z-w}{\cos\gamma}=G_1{}'$;

also:

$$x-u=G_1{}'\cos\alpha,\quad y-v=G_1{}'\cos\beta,\quad z-w=G_1{}'\cos\gamma;$$

und folglich:

$$a(x-u)+b(y-v)+c(z-w)=G_1{}'(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma),$$

woraus sich nach 40) die Gleichung

49) . . . . . $a(x-u)+b(y-v)+c(z-w)=0$

ergiebt.

Stellt man diese Gleichung unter der Form

$$ax+by+cz=au+bv+cw$$

dar, so erhält man nach 47) die Gleichung:

$$ax+by+cz=G'(a^2+b^2+c^2),$$

also:

50) . . . . . . . . $G'=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$,

und daher nach 47):

51) . . . . . . . $\begin{cases} u=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}a, \\ v=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}b, \\ w=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}c; \end{cases}$

oder nach 41):

52) . . . . . . . $\begin{cases} u=\frac{ax+by+cz}{\left(\frac{p}{2n}\right)^2}a, \\ v=\frac{ax+by+cz}{\left(\frac{p}{2n}\right)^2}b, \\ w=\frac{ax+by+cz}{\left(\frac{p}{2n}\right)^2}c. \end{cases}$

Weil der Punkt $(xyz)$ in der Ebene des Kegelschnitts liegt, so ist nach 45):

$$(b\cos\gamma - c\cos\beta)x + (c\cos\alpha - a\cos\gamma)y + (a\cos\beta - b\cos\alpha)z = 0.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a}u,$$

und eliminirt dann aus diesen beiden Gleichungen nach der Reihe $z$, $x$, $y$; so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0,$$

leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$53) \ldots \begin{cases} x\cos\beta - y\cos\alpha = (a\cos\beta - b\cos\alpha)\dfrac{u}{a}, \\ y\cos\gamma - z\cos\beta = (b\cos\gamma - c\cos\beta)\dfrac{u}{a}, \\ z\cos\alpha - x\cos\gamma = (c\cos\alpha - a\cos\gamma)\dfrac{u}{a}; \end{cases}$$

und folglich nach 47) auch:

$$54) \ldots \begin{cases} x\cos\beta - y\cos\alpha = (a\cos\beta - b\cos\alpha)\dfrac{v}{b}, \\ y\cos\gamma - z\cos\beta = (b\cos\gamma - c\cos\beta)\dfrac{v}{b}, \\ z\cos\alpha - x\cos\gamma = (c\cos\alpha - a\cos\gamma)\dfrac{v}{b}; \end{cases}$$

und:

$$55) \ldots \begin{cases} x\cos\beta - y\cos\alpha = (a\cos\beta - b\cos\alpha)\dfrac{w}{c}, \\ y\cos\gamma - z\cos\beta = (b\cos\gamma - c\cos\beta)\dfrac{w}{c}, \\ z\cos\alpha - x\cos\gamma = (c\cos\alpha - a\cos\gamma)\dfrac{w}{c}. \end{cases}$$

Aus diesen drei Systemen von Gleichungen leitet man leicht die drei folgenden Systeme ab, wo die eine der drei Gleichungen immer eine nur der Symmetrie wegen hinzugefügte Gleichung ist:

$$56) \quad \begin{cases} x\cos\alpha = (x-u)\cos\alpha + \frac{a}{a}u\cos\alpha, \\ y\cos\alpha = (x-u)\cos\beta + \frac{b}{a}u\cos\alpha, \\ z\cos\alpha = (x-u)\cos\gamma + \frac{c}{a}u\cos\alpha; \end{cases}$$

$$57) \quad \begin{cases} x\cos\beta = (y-v)\cos\alpha + \frac{a}{b}v\cos\beta, \\ y\cos\beta = (y-v)\cos\beta + \frac{b}{b}v\cos\beta, \\ z\cos\beta = (y-v)\cos\gamma + \frac{c}{b}v\cos\beta; \end{cases}$$

$$58) \quad \begin{cases} x\cos\gamma = (z-w)\cos\alpha + \frac{a}{c}w\cos\gamma, \\ y\cos\gamma = (z-w)\cos\beta + \frac{b}{c}w\cos\gamma, \\ z\cos\gamma = (z-w)\cos\gamma + \frac{c}{c}w\cos\gamma. \end{cases}$$

Multiplicirt man in jedem dieser Systeme die drei Gleichungen mit

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma;$$

und addirt die Gleichungen dann zu einander, so erhält man, weil

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1, \quad a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0$$

ist, die drei folgenden Gleichungen:

$$59) \quad \begin{cases} x-u = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\alpha, \\ y-v = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\beta, \\ z-w = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\gamma. \end{cases}$$

Werden aber die Gleichungen in jedem der drei obigen Systeme quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man:

$$60) \quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)\cos\alpha^2 = (x-u)^2 + (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{u}{a}\right)^2\cos\alpha^2, \\ (x^2+y^2+z^2)\cos\beta^2 = (y-v)^2 + (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{v}{b}\right)^2\cos\beta^2, \\ (x^2+y^2+z^2)\cos\gamma^2 = (z-w)^2 + (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{w}{c}\right)^2\cos\gamma^2; \end{cases}$$

oder nach 41):

$$61)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)\cos\alpha^2=(x-u)^2+\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2\cos\alpha^2, \\ (x^2+y^2+z^2)\cos\beta^2=(y-v)^2+\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{v}{b}\right)^2\cos\beta^2, \\ (x^2+y^2+z^2)\cos\gamma^2=(z-w)^2+\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{w}{c}\right)^2\cos\gamma^2; \end{cases}$$

oder:

$$62)\ \ldots\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2+\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2, \\ x^2+y^2+z^2=\left(\frac{y-v}{\cos\beta}\right)^2+\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{v}{b}\right)^2, \\ x^2+y^2+z^2=\left(\frac{z-w}{\cos\gamma}\right)^2+\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{w}{c}\right)^2. \end{cases}$$

Ist nun der Punkt $(xyz)$ ein Punkt des Kegelschnitts, so ist nach 42):

$$\frac{1-n^2}{n^2}(x^2+y^2+z^2)$$

$$=\left(\frac{p}{2n}\right)^2-2(ax+by+cz)-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2;$$

aber nach 52) und 59):

$$ax+by+cz=\left(\frac{p}{2n}\right)^2\cdot\frac{u}{a}=\left(\frac{p}{2n}\right)^2\cdot\frac{v}{b}=\left(\frac{p}{2n}\right)^2\cdot\frac{w}{c},$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\frac{x-u}{\cos\alpha}=\frac{y-v}{\cos\beta}=\frac{z-w}{\cos\gamma};$$

also nach 62) und der Gleichung des Kegelschnitts, wie man leicht findet:

$$63)\ \ldots\ \begin{cases} \left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2=\frac{p^2}{4}\left\{1-2\frac{u}{a}-\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2\right\}, \\ \left(\frac{y-v}{\cos\beta}\right)^2=\frac{p^2}{4}\left\{1-2\frac{v}{b}-\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\left(\frac{v}{b}\right)^2\right\}, \\ \left(\frac{z-w}{\cos\gamma}\right)^2=\frac{p^2}{4}\left\{1-2\frac{w}{c}-\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\left(\frac{w}{c}\right)^2\right\}; \end{cases}$$

oder:

$$64) \ldots \begin{cases} \left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{p^2}{4}\{(1-\frac{u}{a})^2 - \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2\}, \\ \left(\frac{y-v}{\cos\beta}\right)^2 = \frac{p^2}{4}\{(1-\frac{v}{b})^2 - \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{v}{b}\right)^2\}, \\ \left(\frac{z-w}{\cos\gamma}\right)^2 = \frac{p^2}{4}\{(1-\frac{w}{c})^2 - \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{w}{c}\right)^2\}; \end{cases}$$

oder:

$$65) \ldots \begin{cases} \left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{p^2}{4}\{1-(1-\frac{1}{n})\frac{u}{a}\}\{1-(1+\frac{1}{n})\frac{u}{a}\}, \\ \left(\frac{y-v}{\cos\beta}\right)^2 = \frac{p^2}{4}\{1-(1-\frac{1}{n})\frac{v}{b}\}\{1-(1+\frac{1}{n})\frac{v}{b}\}, \\ \left(\frac{z-w}{\cos\gamma}\right)^2 = \frac{p^2}{4}\{1-(1-\frac{1}{n})\frac{w}{c}\}\{1-(1+\frac{1}{n})\frac{w}{c}\}; \end{cases}$$

oder:

$$66) \ldots \begin{cases} \left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{p^2}{4}(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{u}{a})(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{u}{a}), \\ \left(\frac{y-v}{\cos\beta}\right)^2 = \frac{p^2}{4}(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{v}{b})(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{v}{b}), \\ \left(\frac{z-w}{\cos\gamma}\right)^2 = \frac{p^2}{4}(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{w}{c})(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{w}{c}). \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes $(xyz)$ unsers Kegelschnitts von der Axe des Kegelschnitts durch $Q$, so ist

$$Q^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2;$$

also nach 66):

$$67) \ldots Q^2 = \frac{p^2}{4}\left\{\begin{array}{l} (1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{u}{a})(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{u}{a})\cos\alpha^2 \\ +(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{v}{b})(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{v}{b})\cos\beta^2 \\ +(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{w}{c})(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{w}{c})\cos\gamma^2 \end{array}\right\};$$

aber bekanntlich:

$$\frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w}{c},$$

also:

$$68) \;\ldots\ldots\; Q^2=\frac{p^2}{4}\left(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{u}{a}\right)\left(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{u}{a}\right)$$

$$=\frac{p^2}{4}\left(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{v}{b}\right)\left(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{v}{b}\right)$$

$$=\frac{p^2}{4}\left(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{w}{c}\right)\left(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{w}{c}\right).$$

Auch ist nach 51) und 52):

69)

$$Q^2=\frac{p^2}{4}\left(1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\right)\left(1-\frac{n+1}{n}\cdot\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\right)$$

$$=\frac{p^2}{4}\left\{1-n(n-1)\cdot\frac{ax+by+cz}{\frac{p^2}{4}}\right\}\left\{1-n(n+1)\cdot\frac{ax+by+cz}{\frac{p^2}{4}}\right\}$$

$$=\frac{\{\frac{1}{4}p^2-n(n-1)(ax+by+cz)\}\{\frac{1}{4}p^2-n(n+1)(ax+by+cz)\}}{\frac{1}{4}p^2}.$$

Die erste der drei Gleichungen 63) lässt sich noch auf folgende Art umformen, und auf die beiden anderen Gleichungen dieses Systems ist ein ganz ähnliches Verfahren anwendbar.

Für $n=1$, $1-n^2=0$, also für die Parabel, erhält die in Rede stehende Gleichung sogleich die folgende sehr einfache Form:

$$70) \;\ldots\ldots\; \left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2=\frac{p^2}{4}\left(1-\frac{2u}{a}\right).$$

Für $n<1$, $1-n^2>0$, also für die Ellipse, kann man setzen:

$$1-2\frac{u}{a}-\frac{1+n^2}{n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2$$

$$=1+\frac{n^2}{1-n^2}-\left\{\frac{n^2}{1-n^2}+2\sqrt{\frac{n^2}{1-n^2}}\cdot\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}}\cdot\frac{u}{a}+\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{1-n^2}-\left(\sqrt{\frac{n^2}{1-n^2}}+\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}}\cdot\frac{u}{a}\right)^2,$$

und erhält hiernach die folgende Gleichung:

71)

$$\left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2=\frac{p^2}{4(1-n^2)}-\frac{p^2}{4}\left(\sqrt{\frac{n^2}{1-n^2}}+\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}}\cdot\frac{u}{a}\right)^2$$

oder:

72)

$$(1-n^2)\left(\sqrt{\frac{n^2}{1-n^2}}+\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}}\cdot\frac{u}{a}\right)^2+\frac{4(1-n^2)}{p^2}\left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2=1$$

Für $n>1$, $n^2-1>0$, also für die Hyperbel, kann man setzen:

$$1-2\frac{u}{a}-\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2$$

$$=1-\frac{n^2}{n^2-1}+\left\{\frac{n^2}{n^2-1}-2\sqrt{\frac{n^2}{n^2-1}}\cdot\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}\cdot\frac{u}{a}+\frac{n^2-1}{n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{n^2-1}+\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2-1}}-\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}\cdot\frac{u}{a}\right)^2,$$

und erhält die folgende Gleichung:

73)

$$\left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2=-\frac{p^2}{4(n^2-1)}+\frac{p^2}{4}\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2-1}}-\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}\cdot\frac{u}{a}\right)^2$$

oder:

74)

$$(n^2-1)\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2-1}}-\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}\cdot\frac{u}{a}\right)^2-\frac{4(n^2-1)}{p^2}\left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2=1.$$

Für $\alpha$, $a$, $u$, $x$ kann man in allen diesen Gleichungen $\beta$, $b$, $v$, $y$ und $\gamma$, $c$, $w$, $z$ setzen.

## §. 6.

Bevor ich in diesen Entwickelungen weiter fortschreite, will ich zuerst in diesem Paragraphen einige allgemeine analytische Relationen zusammenstellen, von denen ich im Folgenden öfters Gebrauch zu machen Gelegenheit haben werde.

Zunächst überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden allgemeinen Gleichungen, wo $a$, $b$, $c$ und $a_1$, $b_1$, $c_1$ ganz beliebige Grössen sind:

I.

$$\begin{aligned}(ab_1-ba_1)^2 = &\ (a^2+b^2+c^2)(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)\\ &-(a^2+b^2+c^2)c_1{}^2-(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)c^2\\ &-(aa_1+bb_1+cc_1)(aa_1+bb_1-cc_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(bc_1-cb_1)^2 = &\ (a^2+b^2+c^2)(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)\\ &-(a^2+b^2+c^2)a_1{}^2-(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)a^2\\ &-(aa_1+bb_1+cc_1)(-aa_1+bb_1+cc_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ca_1-ac_1)^2 = &\ (a^2+b^2+c^2)(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)\\ &-(a^2+b^2+c^2)b_1{}^2-(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)b^2\\ &-(aa_1+bb_1+cc_1)(aa_1-bb_1+cc_1).\end{aligned}$$

**Addirt man diese drei Gleichungen zusammen, so erhält man auf der Stelle die bekannte allgemeine Gleichung:**

II.

$$(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2;$$

**und subtrahirt man von dieser Gleichung jede der drei Gleichungen I., so erhält man:**

III.

$$(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)b_1{}^2+(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)b^2-2(aa_1+bb_1+cc_1)bb_1,$$

$$(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)c_1{}^2+(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)c^2-2(aa_1+bb_1+cc_1)cc_1,$$

$$(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)a_1{}^2+(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)a^2-2(aa_1+bb_1+cc_1)aa_1.$$

**Ferner überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der drei folgenden Gleichungen:**

IV.

$$(ab_1-ba_1)(bc_1-cb_1)$$
$$=(ac_1+ca_1)(aa_1+bb_1+cc_1)-ac(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)-a_1c_1(a^2+b^2+c^2),$$

$$(bc_1-cb_1)(ca_1-ac_1)$$
$$=(ba_1+ab_1)(aa_1+bb_1+cc_1)-ba(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)-b_1a_1(a^2+b^2+c^2),$$

$$(ca_1-ac_1)(ab_1-ba_1)$$

$$=(cb_1+bc_1)(aa_1+bb_1+cc_1)-cb(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-c_1b_1(a^2+b^2+c^2);$$

also, wenn man diese Gleichungen addirt:

V.

$$\begin{aligned}(ab_1-ba_1)(bc_1-cb_1)+(bc_1-cb_1)(ca_1-ac_1)+(ca_1-ac_1)(ab_1-ba_1)\\ =\{a(b_1+c_1)+b(c_1+a_1)+c(a_1+b_1)\}(aa_1+bb_1+cc_1)\\ -(ab+bc+ca)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\\ -(a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)(a^2+b^2+c^2)\\ =(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)(aa_1+bb_1+cc_1)\\ -(aa_1+bb_1+cc_1)^2\\ -(ab+bc+ca)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\\ -(a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir für

$$a,\ b,\ c;\ a_1,\ b_1,\ c_1$$

respective

$$a,\ b,\ c;\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

setzen, und beachten, dass unter dieser Voraussetzung

$$a^2+b^2+c^2=\frac{p^2}{4n^2},\quad a_1^2+b_1^2+c_1^2=1,\quad aa_1+bb_1+cc_1=0$$

ist, die folgenden Gleichungen:

I*.

$$(a\cos\beta-b\cos\alpha)^2=\frac{p^2}{4n^2}\sin\gamma^2-c^2,$$

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)^2=\frac{p^2}{4n^2}\sin\alpha^2-a^2,$$

$$(c\cos\alpha-a\cos\gamma)^2=\frac{p^2}{4n^2}\sin\beta^2-b^2;$$

II*.

$$(a\cos\beta-b\cos\alpha)^2+(b\cos\gamma-c\cos\beta)^2+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)^2=\frac{p^2}{4n^2};$$

III*.

$$(a\cos\beta-b\cos\alpha)^2+(b\cos\gamma-c\cos\beta)^2=\frac{p^2}{4n^2}\cos\beta^2+b^2,$$

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)^2+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)^2=\frac{p^2}{4n^2}\cos\gamma^2+c^2,$$

$$(c\cos\alpha-a\cos\gamma)^2+(a\cos\beta-b\cos\alpha)^2=\frac{p^2}{4n^2}\cos\alpha^2+a^2;$$

IV*.

$$(a\cos\beta-b\cos\alpha)(b\cos\gamma-c\cos\beta)=-\frac{p^2}{4n^2}\cos\gamma\cos\alpha-ca,$$

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)(c\cos\alpha-a\cos\gamma)=-\frac{p^2}{4n^2}\cos\alpha\cos\beta-ab,$$

$$(c\cos\alpha-a\cos\gamma)(a\cos\beta-b\cos\alpha)=-\frac{p^2}{4n^2}\cos\beta\cos\gamma-bc.$$

§. 7.

Wenn wir die aus 45) bekannte Gleichung

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)x+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)y+(a\cos\beta-b\cos\alpha)z=0$$

quadriren, so erhalten wir nach den Formeln I*. und IV*. im vorhergehenden Paragraphen sogleich die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{p^2}{4n^2}\sin\alpha^2-a^2\right)x^2-2\left(\frac{p^2}{4n^2}\cos\alpha\cos\beta+ab\right)xy\\+&\left(\frac{p^2}{4n^2}\sin\beta^2-b^2\right)y^2-2\left(\frac{p^2}{4n^2}\cos\beta\cos\gamma+bc\right)yz\\+&\left(\frac{p^2}{4n^2}\sin\gamma^2-c^2\right)z^2-2\left(\frac{p^2}{4n^2}\cos\gamma\cos\alpha+ca\right)zx\end{aligned}\right\}=0,$$

oder, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{p^2}{4n^2}\{x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2\}-(ax+by+cz)^2=0,$$

oder:

$$\frac{p^2}{4n^2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=\frac{p^2}{4n^2}(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2.$$

Addirt man zu dieser Gleichung*) die aus 42) sich unmittelbar ergebende Gleichung:

$$-\frac{p^2}{4n^2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$

$$=\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\frac{p^2}{4n^2}(x^2+y^2+z^2)+2\frac{p^2}{4n^2}(ax+by+cz)-\left(\frac{p^2}{4n^2}\right)^2;$$

so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{p^2}{4n^2}(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz-\frac{p^2}{4n^2})^2=0$$

oder:

75) . . . $\frac{p^2}{4n^2}(x^2+y^2+z^2)=n^2(ax+by+cz-\frac{p^2}{4n^2})^2,$

und, wenn man

76) . . . . . . . . . $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

setzt, wo $R$ die Entfernung des Punktes $(xyz)$ von dem Brennpunkte bezeichnet:

77) . . . . . $\frac{p^2}{4n^2}R^2=n^2(ax+by+cz-\frac{p^2}{4n^2})^2,$

oder:

---

*) Schreibt man diese Gleichung unter der Form

$$\frac{p^2}{4n^2}\{x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2\}=(ax+by+cz)^2,$$

und überlegt, dass nach 62), 59), 52)

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{x-u}{\cos\alpha}\right)^2+\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2,$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\frac{x-u}{\cos\alpha},\quad ax+by+cz=\frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{u}{a}$$

ist; so erhält man, wenn man diese Ausdrücke in die obige Gleichung einführt, die identische Gleichung:

$$\frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2=\frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{p^2}{4n^2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2.$$

In der That dient uns diese Gleichung hier auch nur zu weiteren Umformungen unserer früher gefundenen Gleichungen.

$$78) \quad \ldots\ldots \frac{p}{2n} R = \pm n(ax + by + cz - \frac{p^2}{4n^2}),$$

oder:

$$79) \quad \ldots\ldots \quad ax + by + cz = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} \pm \frac{R}{n}\right).$$

Weil nach 52)

$$ax + by + cz = \left(\frac{p}{2n}\right)^2 \cdot \frac{u}{a} = \left(\frac{p}{2n}\right)^2 \cdot \frac{v}{b} = \left(\frac{p}{2n}\right)^2 \cdot \frac{w}{c}$$

ist, so kann man diese Gleichungen auch auf folgende Art ausdrücken:

$$80) \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} R = \pm \frac{p}{2}\left(\frac{u}{a} - 1\right) = \pm \frac{p}{2} \cdot \frac{u - a}{a}, \\ R = \pm \frac{p}{2}\left(\frac{v}{b} - 1\right) = \pm \frac{p}{2} \cdot \frac{v - b}{b}, \\ R = \pm \frac{p}{2}\left(\frac{w}{c} - 1\right) = \pm \frac{p}{2} \cdot \frac{w - c}{c}; \end{array} \right.$$

oder:

$$81) \quad \ldots \quad R \pm \tfrac{1}{2}p = \pm \frac{p}{2} \cdot \frac{u}{a} = \pm \frac{p}{2} \cdot \frac{v}{b} = \pm \frac{p}{2} \cdot \frac{w}{c}.$$

oder:

$$82) \qquad \tfrac{1}{2}p(R \pm \tfrac{1}{2}p) = \pm n^2(ax + by + cz)\,^{*}).$$

---

*) Nimmt man die Ebene des Kegelschnitts selbst als Ebene der $xy$ an, so muss man in den so eben entwickelten Formeln $z = 0$ setzen, und erhält also nach 75) die folgende merkwürdige allgemeine Gleichung des Kegelschnitts:

$$\frac{p^2}{4n^2}(x^2 + y^2) = n^2(ax + by - \frac{p^2}{4n^2})^2,$$

oder nach 79) und 82) die Gleichungen:

$$ax + by = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} \pm \frac{R}{n}\right)$$

und

$$\tfrac{1}{2}p(R \pm \tfrac{1}{2}p) = \pm n^2(ax + by),$$

in denen man, wie sogleich nachher gezeigt werden wird, für die Ellipse, die Parabel und den ersten Zweig der Hyperbel die unteren, für den zweiten Zweig der Hyperbel die oberen Zeichen nehmen muss.

Hauptsächlich handelt es sich nun um ein Kriterium, nach welchem man immer sicher beurtheilen kann, wie man in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen hat.

Um ein solches Kriterium anzugeben, wollen wir die Formel

$$R = \pm\frac{p}{2}\cdot\frac{u-a}{a}$$

etwas genauer betrachten. Da $R$ seiner Natur nach eine positive Grösse ist, so muss man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem der Bruch $\frac{u-a}{a}$ positiv oder negativ ist. Nun ist aber offenbar $u-a$ die erste Coordinate des Fusspunkts des von dem Punkte $(xyz)$ auf die Axe gefällten Perpendikels, wenn man den Durchschnittspunkt der Axe mit der Directrix als Anfang annimmt; und $-a$ ist für denselben Anfang die erste Coordinate des Brennpunkts. Aus der bekannten gegenseitigen Lage des Kegelschnitts, seiner Directrix und seines Brennpunkts erhellet auf der Stelle, dass für die Ellipse, die Parabel und den ersten Zweig der Hyperbel die beiden in Rede stehenden ersten Coordinaten, also die Grössen $u-a$ und $-a$, jederzeit gleiche Vorzeichen haben, folglich der Bruch $\frac{u-a}{-a}$ positiv, der Bruch $\frac{u-a}{a}$ negativ ist; für den zweiten Zweig der Hyperbel haben dagegen die beiden in Rede stehenden ersten Coordinaten, also die Grössen $u-a$ und $-a$, jederzeit ungleiche Vorzeichen, und der Bruch $\frac{u-a}{-a}$ ist folglich negativ, der Bruch $\frac{u-a}{a}$ positiv. Hieraus ergiebt sich die Regel, dass man in allen obigen Formeln für die Ellipse, für die Parabel und den ersten Zweig der Hyperbel die unteren, für den zweiten Zweig der Hyperbel die oberen Zeichen nehmen muss *). Hiernach ist also z. B. nach 78) für die Ellipse, Parabel und den ersten Zweig der Hyperbel:

$$\frac{p}{2n}R = n\left\{\left(\frac{p}{2n}\right)^2 - (ax+by+cz)\right\}$$

oder

$$\frac{p}{2n}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = n\left\{\left(\frac{p}{2n}\right)^2 - (ax+by+cz)\right\};$$

*) Der erste Zweig der Hyperbel ist bekanntlich der, innerhalb welches der als Coordinaten-Anfang angenommene Brennpunkt liegt; der andere Zweig heisst der zweite Zweig der Hyperbel.

für den zweiten Zweig der Hyperbel dagegen:

$$\frac{p}{2n}R = n\left\{(ax+by+cz)-\left(\frac{p}{2n}\right)^2\right\}$$

oder:

$$\frac{p}{2n}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = n\left\{(ax+by+cz)-\left(\frac{p}{2n}\right)^2\right\}.$$

Nach 79) ist für die Ellipse, Parabel und den ersten Zweig der Hyperbel:

$$ax+by+cz = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R}{n}\right),$$

und für den zweiten Zweig der Hyperbel ist:

$$ax+by+cz = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}+\frac{R}{n}\right).$$

Nach 42) ist:

$$(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$
$$=\left(\frac{p}{2n}\right)^2-2(ax+by+cz)-\frac{1-n^2}{n^2}(x^2+y^2+z^2),$$

also nach 79) und 76):

$$(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$
$$=\left(\frac{p}{2n}\right)^2-2.\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)-\frac{1-n^2}{n^2}R^2,$$

woraus man leicht die Formel:

83) . . $(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2 = R^2-\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)^2$

erhält, in welcher die Zeichen immer nach der obigen Regel genommen werden müssen.

Offenbar sind

$$x-u,\quad y-v,\quad z-w$$

die Coordinaten des Punktes $(xyz)$ für den Punkt $(uvw)$ als Anfang. Liegt nun der Punkt $(xyz)$ auf der Seite der Axe, auf welcher der Theil der Directrix liegt, dem die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entsprechen, welche wir die positive Seite der Axe nennen wollen; so ist offenbar:

$$x-u=Q\cos\alpha,\quad y-v=Q\cos\beta,\quad z-w=Q\cos\gamma;$$

und die Brüche

$$\frac{x-u}{\cos\alpha}=\frac{y-v}{\cos\beta}=\frac{z-w}{\cos\gamma}=Q$$

sind folglich positiv; also ist in diesem Falle nach 59) auch die Grösse

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

positiv. Liegt dagegen der Punkt $(xyz)$ auf der Seite der Axe, auf welcher der Theil der Directrix liegt, dem die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nicht, also die Winkel $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$ entsprechen, welche wir die negative Seite der Axe nennen wollen; so ist offenbar:

$$x-u=Q\cos(180^0-\alpha),\quad y-v=Q\cos(180^0-\beta),$$
$$z-w=R\cos(180^0-\gamma);$$

also

$$x-u=-Q\cos\alpha,\quad y-v=-Q\cos\beta,\quad z-w=-Q\cos\gamma;$$

und die Brüche

$$\frac{x-u}{\cos\alpha}=\frac{y-v}{\cos\beta}=\frac{z-w}{\cos\gamma}=-Q$$

sind folglich negativ; also ist in diesem Falle nach 59) auch die Grösse

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

negativ.

Folglich ist nach 83)

$$84)\ \ldots x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\sqrt{R^2-\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)^2},$$

wenn der Punkt $(xyz)$ auf der positiven Seite der Axe liegt; und

$$85)\ \ldots x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=-\sqrt{R^2-\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)^2},$$

wenn der Punkt $(xyz)$ auf der negativen Seite der Axe liegt. Ueber das doppelte Zeichen ist auch in diesen Formeln immer nach der oben angegebenen Regel zu entscheiden.

## §. 8.

Wir wollen jetzt zunächst alle Hauptelemente des Kegelschnitts analytisch bestimmen.

Bezeichnen wir die Coordinaten der Scheitel im Allgemeinen durch $F_s$, $G_s$, $H_s$; so haben wir, da die Scheitel in der Axe liegen, zuvörderst die Gleichungen:

$$\frac{F_s}{a}=\frac{G_s}{b}=\frac{H_s}{c}=\Omega.$$

Also ist nach 75):

$$\frac{p^2}{4n^2}(a^2+b^2+c^2)\Omega^2=n^2\{(a^2+b^2+c^2)\Omega-\frac{p^2}{4n^2}\}^2,$$

woraus man, weil nach 41) bekanntlich

$$a^2+b^2+c^2=\frac{p^2}{4n^2}$$

ist, sogleich die Gleichung:

$$\Omega^2=n^2(\Omega-1)^2,\quad \text{also}\quad \Omega=\pm n(\Omega-1)$$

erhält, woraus

$$\Omega=\mp\frac{n}{1\mp n}$$

folgt. Also ist nach dem Obigen:

$$F_s=\mp\frac{n}{1\mp n}a,\quad G_s=\mp\frac{n}{1\mp n}b,\quad H_s=\mp\frac{n}{1\mp n}c;$$

wo es sich nun frägt, welchem Scheitel die oberen, und welchem Scheitel die unteren Zeichen entsprechen, was sich auf folgende Art entscheiden lässt. Das Quadrat der Entfernung der Scheitel von dem als Anfang der Coordinaten angenommenen Brennpunkte ist:

$$F_s^2+G_s^2+H_s^2=\frac{n^2}{(1\mp n)^2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{p^2}{4(1\mp n)^2}$$

oder

$$F_s^2+G_s^2+H_s^2=\frac{p^2}{4(n\mp 1)^2}.$$

Also entspricht offenbar das untere Zeichen dem Scheitel, welcher dem als Coordinaten-Anfang angenommenen Brennpunkte zunächst liegt, das obere Zeichen dem Scheitel, welcher am Weitesten von dem als Coordinaten-Anfang angenommenen Brennpunkte entfernt ist; wobei sich von selbst versteht, dass für die Parabel überhaupt nur das untere Zeichen genommen werden darf. Bezeichnen wir von jetzt an die Coordinaten des, dem als Coordi-

naten-Anfang angenommenen Brennpunkte zunächst liegenden Scheitels wie vorher durch $F_s$, $G_s$, $H_s$; die Coordinaten des am Weitesten von dem als Coordinaten-Anfang angenommenen Brennpunkte entfernten Scheitels dagegen durch $F_s'$, $G_s'$, $H_s'$; so haben wir die folgenden Formeln:

86)

$$F_s=+\frac{n}{1+n}a,\quad G_s=+\frac{n}{1+n}b,\quad H_s=+\frac{n}{1+n}c;$$

$$F_s'=-\frac{n}{1-n}a,\quad G_s'=-\frac{n}{1-n}b,\quad H_s'=-\frac{n}{1-n}c.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunkts des Kegelschnitts durch $F_m$, $G_m$, $H_m$; so ist:

$$F_m=\tfrac{1}{2}(F_s+F_s'),\quad G_m=\tfrac{1}{2}(G_s+G_s'),\quad H_m=\tfrac{1}{2}(H_s+H_s');$$

also nach 86):

87)

$$F_m=-\frac{n^2}{1-n^2}a,\quad G_m=-\frac{n^2}{1-n^2}b,\quad H_m=-\frac{n^2}{1-n^2}c.$$

Die Parabel hat keinen Mittelpunkt, weil diese Ausdrücke für $n=1$ unendlich werden.

Die Coordinaten des zweiten Brennpunkts seien $f'$, $g'$, $h'$; so ist, weil beide Brennpunkte vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind:

$$(F_m-f')^2+(G_m-g')^2+(H_m-h')^2=F_m{}^2+G_m{}^2+H_m{}^2,$$

also:

$$f'^2+g'^2+h'^2-2(f'F_m+g'G_m+h'H_m)=0.$$

Weil die Brennpunkte in der Axe liegen, so ist

$$\frac{f'}{a}=\frac{g'}{b}=\frac{h'}{c}=\Omega',$$

also, wenn man zugleich für die Coordinaten des Mittelpunkts ihre Ausdrücke aus 87) einführt:

$$(a^2+b^2+c^2)\Omega'^2+\frac{2n^2}{1-n^2}(a^2+b^2+c^2)\Omega'=0,$$

woraus

$$\Omega'(\Omega' + \frac{2n^2}{1-n^2}) = 0,$$

folgt, was auf die beiden Gleichungen

$$\Omega' = 0 \quad \text{und} \quad \Omega' + \frac{2n^2}{1-n^2} = 0$$

führt. Nun kann aber die erste Gleichung im vorliegenden Falle nicht Statt finden, weil dies nach dem Obigen auf

$$f' = 0, \quad g' = 0, \quad h' = 0;$$

also auf den als Coordinaten-Anfang angenommenen Brennpunkt, welchen wir den ersten nennen wollen, führen würde. Daher ist bloss die zweite Gleichung zulässig, und folglich

$$\Omega' = -\frac{2n^2}{1-n^2},$$

also:

88)

$$f' = -\frac{2n^2}{1-n^2}a, \quad g' = -\frac{2n^2}{1-n^2}b, \quad h' = -\frac{2n^2}{1-n^2}c$$

zu setzen. Für die Parabel giebt es einen zweiten Brennpunkt nicht.

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der zweiten Directrix mit der Axe seien $a', b', c'$; so ist:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \Omega''.$$

Da die beiden Directrixen von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, so haben wir die Gleichung:

$$(F_m - a)^2 + (G_m - b)^2 + (H_m - c)^2 = (F_m - a') + (G_m - b')^2 + (H_m - c')^2,$$

also:

$$2(aF_m + bG_m + cH_m) - (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= 2(a'F_m + b'G_m + c'H_m) - (a'^2 + b'^2 + c'^2),$$

und folglich, wenn man für die Coordinaten des Mittelpunkts die Ausdrücke 87) einführt:

$$\frac{n^2+1}{1-n^2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{2n^2}{1-n^2}(aa' + bb' + cc') + (a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

Setzt man nun

$$a'=a\Omega'',\quad b'=b\Omega'',\quad c'=c\Omega''$$

und dividirt durch $a^2+b^2+c^2$, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\Omega''^2+\frac{2n^2}{1-n^2}\Omega''=\frac{n^2+1}{1-n^2},$$

welche, auf gewöhnliche Weise aufgelöst, zu

$$\Omega''=-\frac{n^2}{1-n^2}\pm\frac{1}{1-n^2},$$

also zu den beiden Werthen:

$$\Omega''=1 \quad\text{und}\quad \Omega''=-\frac{n^2+1}{1-n^2}$$

führt. Für $\Omega''=1$ würde man

$$a'=a,\quad b'=b,\quad c'=c;$$

also die erste Directrix erhalten; daher muss man für die zweite Directrix

$$\Omega''=-\frac{n^2+1}{1-n^2}$$

setzen, was nach dem Obigen:

$$89)\ \ldots\ a'=\frac{n^2+1}{n^2-1}a,\quad b'=\frac{n^2+1}{n^2-1}b,\quad c'=\frac{n^2+1}{n^2-1}c$$

giebt. Für die Parabel giebt es eine zweite Directrix nicht.

Die Hauptaxe, welche wir durch 2A bezeichnen wollen, ist die Entfernung der beiden Scheitel von einander, also:

$$4A^2=(F_s-F_s')^2+(G_s-G_s')^2+(H_s-H_s')^2,$$

woraus sich nach 86)

$$4A^2=\left(\frac{n}{1+n}+\frac{n}{1-n}\right)^2(a^2+b^2+c^2)=\left(\frac{2n}{1-n^2}\right)^2\cdot\frac{p^2}{4n^2},$$

also:

$$90)\ \ldots\ A^2=\frac{p^2}{4(1-n^2)^2}=\frac{p^2}{4(n^2-1)^2}$$

ergiebt.

Bezeichnet 2B die Nebenaxe, so ist bekanntlich:

$$B^2=\frac{Ap}{2},\quad B^4=\frac{A^2p^2}{4};$$

also nach 90):

91) . . . . . $B^4 = \frac{p^4}{16(1-n^2)^2} = \frac{p^4}{16(n^2-1)^2}$.

Ueberhaupt kann man setzen:

92) . . . $A = \pm\frac{p}{2(1-n^2)}$, $B = \frac{p}{2\sqrt{\pm(1-n^2)}}$;

wenn man für die Ellipse die oberen, für die Hyperbel die unteren Zeichen nimmt.

Die Excentricität ist die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte von einander, und folglich, wenn wir dieselbe durch E bezeichnen:

$$4E^2 = f'^2 + g'^2 + h'^2 = \frac{4n^4}{(1-n^2)^2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{4n^4}{(1-n^2)^2}\cdot\frac{p^2}{4n^2},$$

also:

93) . . . . . $E^2 = \frac{n^2p^2}{4(1-n^2)^2} = \frac{n^2p^2}{4(n^2-1)^2}$;

oder überhaupt:

94) . . . . . . . $E = \pm\frac{np}{2(1-n^2)}$,

wenn man für die Ellipse das obere, für die Hyperbel das untere Zeichen nimmt.

Für die Ellipse ist:

$$A^2 - B^2 = \frac{p^2}{4(1-n^2)^2} - \frac{p^2}{4(1-n^2)} = \frac{n^2p^2}{4(1-n^2)^2},$$

also:

95) . . . . . . . . . $A^2 - B^2 = E^2$.

Für die Hyperbel ist:

$$A^2 + B^2 = \frac{p^2}{4(1-n^2)^2} - \frac{p^2}{4(1-n^2)} = \frac{n^2p^2}{4(1-n^2)^2},$$

also:

96) . . . . . . . . . $A^2 + B^2 = E^2$.

Ueberhaupt ist also:

97) . . . . . . . . . $A^2 \mp B^2 = E^2$,

wenn man das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel nimmt.

Aus

$$A^2=\frac{p^2}{4(1-n^2)^2},\quad B^2=\pm\frac{p^2}{4(1-n^2)}$$

folgt durch Division:

$$\frac{B^2}{A^2}=\pm(1-n^2),\quad 1-n^2=\pm\frac{B^2}{A^2};$$

also:

$$n^2=\frac{A^2\mp B^2}{A^2}=\frac{E^2}{A^2},$$

und folglich:

$$98)\;\ldots\ldots\quad n=\frac{\sqrt{A^2\mp B^2}}{A}=\frac{E}{A},$$

immer das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel genommen.

Eine Menge anderer Relationen dieser Art übergehen wir der Kürze wegen.

Nur mit der Bestimmung des von dem zweiten Brennpunkte nach dem Punkte $(xyz)$ des Kegelschnitts gezogenen zweiten Vectors dieses Punktes, den wir, eben so wie früher den von dem ersten Brennpunkte nach dem Punkte $(xyz)$ gezogenen ersten Vector durch $R$, durch $R'$ bezeichnen werden, wollen wir uns noch beschäftigen. Es ist:

$$R'^2=(f'-x)^2+(g'-y)^2+(h'-z)^2,$$

also nach 88):

$$R'^2=\left(\frac{2n^2}{1-n^2}a+x\right)^2+\left(\frac{2n^2}{1-n^2}b+y\right)^2+\left(\frac{2n^2}{1-n^2}c+z\right)^2$$

$$=\left(\frac{2n^2}{1-n^2}\right)^2(a^2+b^2+c^2)+\frac{4n^2}{1-n^2}(ax+by+cz)+R^2,$$

folglich nach 41), 52), 80):

$$R'^2=\left(\frac{2n^2}{1-n^2}\right)^2\cdot\frac{p^2}{4n^2}+\frac{4n^2}{1-n^2}\cdot\frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{u}{a}+\frac{p^2}{4}(1-\frac{u}{a})^2,$$

wo man für $\frac{u}{a}$ auch $\frac{v}{b}$ oder $\frac{w}{c}$ setzen kann. Mittelst dieser Gleichung findet man nach einigen leichten Reductionen:

$$R'^2=\frac{p^2}{4}\left\{\left(\frac{1+n^2}{1-n^2}\right)^2+2.\frac{1+n^2}{1-n^2}\cdot\frac{u}{a}+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right\},$$

also:

$$R'^2 = \frac{p^2}{4}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right)^2,$$

und folglich:

$$R' = \pm\frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right),$$

wo sich nun frägt, wie das Zeichen zu nehmen ist, was auf folgende Art entschieden werden kann.

Für die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel ist nach 80):

$$R = -\frac{p}{2}\left(\frac{u}{a} - 1\right).$$

Nach einer sehr bekannten Eigenschaft der Ellipse ist

$$R + R' = 2A = \frac{p}{1-n^2},$$

welcher Gleichung nur genügt wird, wenn man in dem obigen Ausdrucke von $R'$ das obere Zeichen nimmt. Also ist für die Ellipse:

$$R' = \frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right).$$

Für den ersten Zweig der Hyperbel ist bekanntlich:

$$R' - R = 2A = -\frac{p}{1-n^2},$$

welcher Gleichung nur genügt wird, wenn man in dem Ausdrucke von $R'$ das untere Zeichen nimmt. Also ist für den ersten Zweig der Hyperbel:

$$R' = -\frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right).$$

Für den zweiten Zweig der Hyperbel ist nach 80):

$$R = \frac{p}{2}\left(\frac{u}{a} - 1\right).$$

Für diesen Zweig der Hyperbel ist aber bekanntlich:

$$R - R' = 2A = -\frac{p}{1-n^2},$$

welcher Gleichung nur genügt wird, wenn man in dem Ausdrucke von $R'$ das obere Zeichen nimmt. Also ist für den zweiten Zweig der Hyperbel:

$$R' = \frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right).$$

Hiernach ist also:

99) . . . . . $$R' = \pm\frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right)$$

$$= \pm\frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{v}{b}\right)$$

$$= \pm\frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{w}{c}\right),$$

wenn man für die Ellipse und den zweiten Zweig der Hyperbel die oberen, für den ersten Zweig der Hyperbel die unteren Zeichen nimmt.

Für die Ellipse ist:

100) $$R = -\frac{p}{2}\left(\frac{u}{a} - 1\right), \quad R' = +\frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right).$$

Für die Parabel ist:

101) . . . . . . $$R = -\frac{p}{2}\left(\frac{u}{a} - 1\right).$$

Für den ersten Zweig der Hyperbel ist:

102) $$R = -\frac{p}{2}\left(\frac{u}{a} - 1\right), \quad R' = -\frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right).$$

Für den zweiten Zweig der Hyperbel ist:

103) $$R = +\frac{p}{2}\left(\frac{u}{a} - 1\right), \quad R' = +\frac{p}{2}\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + \frac{u}{a}\right).$$

Für $\frac{u}{a}$ kann man auch $\frac{v}{b}$ und $\frac{w}{c}$ setzen.

## §. 9.

Wir wollen uns jetzt mit der Bestimmung der Berührenden des Kegelschnitts in dem Punkte $(xyz)$ desselben beschäftigen.

Nach 45) und 79) haben wir zwischen den Coordinaten $x, y, z$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$(b\cos\gamma - c\cos\beta)x + (c\cos\alpha - a\cos\gamma)y + (a\cos\beta - b\cos\alpha)z = 0,$$

$$ax+by+cz=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right);$$

wo

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

ist, und für die Ellipse, die Parabel und den ersten Zweig der Hyperbel das untere, für den zweiten Zweig der Hyperbel das obere Zeichen zu nehmen ist.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$\mathfrak{u}=(b\cos\gamma-c\cos\beta)x+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)y+(a\cos\beta-b\cos\alpha)z,$$

$$\mathfrak{U}=ax+by+cz-\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)$$

und bezeichnen die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; so sind die Gleichungen der Berührenden des Kegelschnitts in dem Punkte $(xyz)$ bekanntlich *):

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}}.$$

Durch Differentiation der obigen Ausdrücke von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{U}$ erhält man:

$$\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial x}=b\cos\gamma-c\cos\beta,\quad\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial y}=c\cos\alpha-a\cos\gamma,\quad\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial z}=a\cos\beta-b\cos\alpha$$

und

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}=a\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial x},\quad\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}=b\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial y},\quad\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}=c\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial z};$$

oder, weil, wie man leicht findet,

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x}{R},\quad\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y}{R},\quad\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z}{R}$$

ist:

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}=a\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{x}{R},\quad\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}=b\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{y}{R},\quad\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}=c\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{z}{R}.$$

Also ist, wie man mit Beachtung der beiden Gleichungen

$$a^2+b^2+c^2=\frac{p^2}{4n^2},\quad a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0$$

leicht findet:

---

*) Thl. XXX. S. 372. Nr. 13).

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}$$
$$=\frac{p^2}{4n^2}\cos\alpha\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{(ax+by+cz)\cos\alpha-a(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}$$
$$=\frac{p^2}{4n^2}\cos\beta\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{(ax+by+cz)\cos\beta-b(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$=\frac{p^2}{4n^2}\cos\gamma\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{(ax+by+cz)\cos\gamma-c(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}{R}.$$

Nach 59) und 52) ist aber:

$$\cos\alpha=\frac{x-u}{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma},$$
$$\cos\beta=\frac{y-v}{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma},$$
$$\cos\gamma=\frac{z-w}{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}$$

und

$$a=\frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{u}{ax+by+cz},$$
$$b=\frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{v}{ax+by+cz},$$
$$c=\frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{w}{ax+by+cz};$$

also:

$$(ax+by+cz)\cos\alpha-a(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$
$$=\frac{(ax+by+cz)^2(x-u)-\frac{p^2}{4n^2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2.u}{(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$(ax+by+cz)\cos\beta-b(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$
$$=\frac{(ax+by+cz)^2(y-v)-\frac{p^2}{4n^2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2.v}{(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$(ax+by+cz)\cos\gamma-c(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$
$$=\frac{(ax+by+cz)^2(z-w)-\frac{p^2}{4n^2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2.w}{(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)};$$

also, weil nach 79) und 83)

$$ax+by+cz=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right),$$

$$(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=R^2-\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)^2$$

ist, wie man leicht findet:

$$(ax+by+cz)\cos\alpha-a(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$
$$=\frac{\frac{p^2}{4n^2}\left\{\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)^2x-R^2u\right\}}{(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$(ax+by+cz)\cos\beta-b(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$
$$=\frac{\frac{p^2}{4n^2}\left\{\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)^2y-R^2v\right\}}{(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$(ax+by+cz)\cos\gamma-c(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$
$$=\frac{\frac{p^2}{4n^2}\left\{\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)^2z-R^2w\right\}}{(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}.$$

Hieraus erhält man endlich leicht, wenn man für

$$\cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma \text{ und } ax+by+cz$$

immer ihre obigen Ausdrücke einführt:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\frac{\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)x-\frac{p}{2}Ru}{R(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\frac{\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)y-\frac{p}{2}Rv}{R(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\frac{\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)z-\frac{p}{2}Rw}{R(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)};$$

oder:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\frac{(\frac{1}{2}p\pm R)\left(\frac{n^2-1}{n^2}R\mp\frac{p}{2n^2}\right)x-\frac{1}{2}pRu}{R(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\frac{(\frac{1}{2}p\pm R)\left(\frac{n^2-1}{n^2}R\mp\frac{p}{2n^2}\right)y-\frac{1}{2}pRv}{R(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\frac{(\frac{1}{2}p\pm R)\left(\frac{n^2-1}{n^2}R\mp\frac{p}{2n^2}\right)z-\frac{1}{2}pRw}{R(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}.$$

Nun ist aber nach 52) und 79):

$$u=\frac{\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}}{\frac{p}{2n}}a,\quad v=\frac{\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}}{\frac{p}{2n}}b,\quad w=\frac{\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}}{\frac{p}{2n}}c;$$

also:

$$\frac{p}{2}Ru=n\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)Ra,\quad \frac{p}{2}Rv=n\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)Rb,$$

$$\frac{p}{2}Rw=n\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)Rc;$$

folglich:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)\cdot\frac{\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)x-nRa}{R(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)\cdot\frac{\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)y-nRb}{R(ax+by+cz)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{p}{2n}\right)^3\cdot\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)\cdot\frac{\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)z-nRc}{R(ax+by+cz)\,(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}.$$

Also sind die Gleichungen der Berührenden im Punkte $(xyz)$ des Kegelschnitts:

104) . . . .
$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)x-nRa}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)y-nRb}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\left(\frac{n^2-1}{n}R\mp\frac{p}{2n}\right)z-nRc},$$

oder:

105) . . . .
$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\{(n^2-1)R\mp\tfrac{1}{2}p\}x-n^2Ra}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\{(n^2-1)R\mp\tfrac{1}{2}p\}y-n^2Rb}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\{(n^2-1)R\mp\tfrac{1}{2}p\}z-n^2Rc},$$

oder:

106) . . . . .
$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\{(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}\}x-n^2a}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\{(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}\}y-n^2b}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\{(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}\}z-n^2c},$$

oder:

107)
$$\frac{\mathfrak{x}-x}{n^2(x-a)-(1\pm\frac{p}{2R})x}=\frac{\mathfrak{y}-y}{n^2(y-b)-(1\pm\frac{p}{2R})y}=\frac{\mathfrak{z}-z}{n^2(z-c)-(1\pm\frac{p}{2R})z}.$$

Bezeichnen wir die von der Berührenden mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen eingeschlossenen, auf bekannte Weise genommenen Winkel durch $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$; so ist, weil, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned}
&\{[(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}]x-n^2a\}^2\\
&+\{[(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}]y-n^2b\}^2\\
&+\{[(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}]z-n^2c\}^2\\
=&\{(n^2-1)R\mp p\}\{(n^2-1)R\mp(1\pm\frac{p}{4R})p\}
\end{aligned}$$

ist:

108)

$$\cos\varkappa=\frac{\{(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}\}x-n^2a}{\sqrt{\{(n^2-1)R\mp p\}\{(n^2-1)R\mp(1\pm\frac{p}{4R})p\}}},$$

$$\cos\lambda=\frac{\{(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}\}y-n^2b}{\sqrt{\{(n^2-1)R\mp p\}\{(n^2-1)R\mp(1\pm\frac{p}{4R})p\}}},$$

$$\cos\mu=\frac{\{(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}\}z-n^2c}{\sqrt{\{(n^2-1)R\mp p\}\{(n^2-1)R\mp(1\pm\frac{p}{4R})p\}}};$$

wo man die Quadratwurzel positiv und negativ nehmen kann.

Die Formeln für die Normal-Ebene in dem Punkt $(xyz)$ lassen sich hieraus unmittelbar ableiten *). Die Haupt-Normale ist hier die Durchschnittslinie der Normal-Ebene mit der Ebene des Kegelschnitts.

Bezeichnen wir das von dem als Coordinaten-Anfang angenommenen Brennpunkte auf die Berührende in dem Punkte $(xyz)$ gefällte Perpendikel durch P; so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie, mit Rücksicht auf die vorher für die Berührende entwickelten Formeln:

$$P^2=x^2+y^2+z^2-(x\cos\varkappa+y\cos\lambda+z\cos\mu)^2,$$

*) Thl. XXX. S. 373. Nr. 17.

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$P^2 = R^2 - \frac{\{[(n^2-1)\mp\frac{p}{2R}]R^2 - n^2.\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)\}^2}{\{(n^2-1)R\mp p\}\{(n^2-1)R\mp(1\pm\frac{p}{4R})p\}},$$

oder, wie man leicht findet:

$$P^2 = R^2 - \frac{\{[(n^2-1)R\mp p]R - \frac{1}{4}p^2\}^2}{\{(n^2-1)R\mp p\}\{(n^2-1)R\mp(1\pm\frac{p}{4R})p\}},$$

woraus sich ferner ohne Schwierigkeit ergiebt:

109) $$P = \tfrac{1}{2}p\sqrt{\frac{\{(n^2-1)R\mp p\}R - \frac{1}{4}p^2}{\{(n^2-1)R\mp p\}\{(n^2-1)R\mp(1\pm\frac{p}{4R})p\}}}.$$

Für die Parabel muss man $n=1$ setzen und die unteren Zeichen nehmen. Dadurch erhält man:

$$P = \tfrac{1}{2}p\sqrt{\frac{R-\frac{1}{4}p}{p(1-\frac{p}{4R})}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{\frac{R}{p}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{pR},$$

wie sich auch anderweitig leicht beweisen lässt.

## §. 10.

Ich gehe nun zu der Bestimmung des Krümmungskreises in dem Punkte $(xyz)$ über und werde mich dabei der zu diesem Behufe von mir früher *) entwickelten ganz allgemeinen, wie ich glaube, sehr merkwürdigen und wichtigen Formeln bedienen, indem ich auch alle dort eingeführten Bezeichnungen, ohne weitere neue Erklärung derselben, hier beibehalten werde. Das Folgende wird zugleich ein zweckmässiges und lehrreiches Beispiel sein, um durch dasselbe die grosse Fruchtbarkeit und überaus bequeme Anwendbarkeit der in Rede stehenden ganz allgemeinen Formeln zu zeigen, welche früher in dieser Allgemeinheit und in dieser sehr bequemen Form noch nicht entwickelt waren.

Zuerst finden wir durch fernere Differentiation aus den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln leicht:

*) M. s. Thl. XXX. S. 418—S. 423.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=0;$$

und:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{y^2+z^2}{R^3},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{z^2+x^2}{R^3},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\mp\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{R^3};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\pm\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{xy}{R^3},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}=\pm\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{yz}{R^3},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}=\pm\frac{p}{2n^2}\cdot\frac{zx}{R^3}.$$

Weil nach §. 6. II*.:

$$(a\cos\beta-b\cos\alpha)^2+(b\cos\gamma-c\cos\beta)^2+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)^2=\frac{p^2}{4n^2},$$

ferner nach 45):

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)x+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)y+(a\cos\beta-b\cos\alpha)z=0,$$

und offenbar auch:

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)a+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)b+(a\cos\beta-b\cos\alpha)c=0$$

ist; so erhalten wir aus den im vorhergehenden Paragraphen für die ersten Differentialquotienten entwickelten Ausdrücke sogleich:

$$s^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{p^2}{4n^2},$$

und:

$$Q=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}=0.$$

Ferner erhält man mittelst der in Rede stehenden Differentialformeln leicht:

$$S^2=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2=\frac{p^2}{4n^2}\{1-\frac{1}{n^2}(1\pm\frac{p}{R})\}.$$

Mittelst der vorher angegebenen zweiten Differentialquotienten ergiebt sich sogleich

$$v=0,$$

wo man den allgemeinen Ausdruck von v, der hier zur Anwendung kommt, a. a. O. S. 420. nachzusehen hat. Ferner ist nach dem an demselben Orte gegebenen allgemeinen Ausdrucke von V und dem Obigen:

$$V = \mp \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{y^2+z^2}{R^3} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$$

$$\mp \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{z^2+x^2}{R^3} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2$$

$$\mp \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{R^3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$$

$$\pm \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{2xy}{R^3} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$$\pm \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{2yz}{R^3} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

$$\pm \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{2zx}{R^3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right);$$

also, wie leicht erhellet:

$$V = \mp \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{1}{R} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right\}$$

$$\pm \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{1}{R^3} \left\{ x \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) + y \left( \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) + z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right\}^2.$$

Es ist aber nach der allgemeinen Relation §. 6. II.:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$$

$$= s^2S^2 - Q^2 = s^2S^2 = \left( \frac{p^2}{4n^2} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} (1 \pm \frac{p}{R}) \right\}.$$

Weil ferner nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$= \frac{p^2}{4n^2} \cos\alpha \mp \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{(ax+by+cz)\cos\alpha - a(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$= \frac{p^2}{4n^2} \cos\beta \mp \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{(ax+by+cz)\cos\beta - b(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= \frac{p^2}{4n^2} \cos\gamma \mp \frac{p}{2n^2} \cdot \frac{(ax+by+cz)\cos\gamma - c(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{R}$$

ist, so ist offenbar:

$$x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)+y\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)+z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{p^2}{4n^2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma),$$

also nach 83):

$$\left\{x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)+y\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)+z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right\}^2$$

$$=\left(\frac{p^2}{4n^2}\right)^2\left\{R^2-\left(\frac{p}{2n}\pm\frac{R}{n}\right)^2\right\}.$$

Nach gehöriger Substitution dieser Ausdrücke in den obigen Ausdruck von V erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$V=\mp\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{p}{2n}\right)^7\cdot\frac{1}{R^3}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Krümmungshalbmesser durch $\mathfrak{R}$ und die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so ist nach den a. a. O. S. 423. Nr. 60) und S. 422. Nr. 59) entwickelten ganz allgemeinen Formeln im vorliegenden Falle, wo

$$Q=0 \quad\text{und}\quad v=0$$

ist:

$$\mathfrak{R}^2=\left(\frac{s^2S^3}{V}\right)^2$$

und:

$$\mathfrak{X}-x=-\frac{s^2S^2\dfrac{\partial U}{\partial x}}{V},$$

$$\mathfrak{Y}-y=-\frac{s^2S^2\dfrac{\partial U}{\partial y}}{V},$$

$$\mathfrak{Z}-z=-\frac{s^2S^2\dfrac{\partial U}{\partial z}}{V};$$

also, wenn man die vorher gefundenen Ausdrücke sämmtlich in diese Formeln einführt, wie man leicht findet:

$$110)\quad\ldots\ldots\quad \mathfrak{R}=\frac{R^3(n^2-1\mp\frac{p}{R})^{\frac{3}{2}}}{(\frac{1}{2}p)^2};$$

und:

$$111)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}-x=\pm 4\dfrac{R}{p}\{(n^2-1)\dfrac{R}{p}\mp 1\}(2n^2\dfrac{R}{p}a\mp x), \\ \mathfrak{Y}-y=\pm 4\dfrac{R}{p}\{(n^2-1)\dfrac{R}{p}\mp 1\}(2n^2\dfrac{R}{p}b\mp y), \\ \mathfrak{Z}-z=\pm 4\dfrac{R}{p}\{(n^2-1)\dfrac{R}{p}\mp 1\}(2n^2\dfrac{R}{p}c\mp z); \end{cases}$$

welche Ausdrücke jedenfalls sehr merkwürdig sind.

Die Gleichungen der durch die Punkte $(xyz)$ und $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ gehenden Geraden sind:

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\mathfrak{X}-x}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\mathfrak{Y}-y}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\mathfrak{Z}-z},$$

also nach 111):

$$112)\ \ldots\quad \frac{\mathfrak{x}-x}{2n^2\dfrac{R}{p}a\mp x}=\frac{y-\mathfrak{y}}{2n^2\dfrac{R}{p}b\mp y}=\frac{\mathfrak{z}-z}{2n^2\dfrac{R}{p}c\mp z}.$$

Da man nun weiss *), dass für jede Curve der Krümmungs-Mittelpunkt in der Haupt-Normale liegt, so sind vorstehende Gleichungen die Gleichungen der Haupt-Normale, was zur Vervollständigung Dessen dient, was wir im vorhergehenden Paragraphen in dieser Beziehung in der Kürze bemerkt haben.

Um die Richtigkeit der Ausdrücke 111) durch anderweitig bekannte Ausdrücke zu prüfen, wollen wir sie auf die Parabel, für welche $n=1$ ist, anwenden, indem wir die Ebene der Parabel selbst als Ebene der $xy$ annehmen. Da wir in diesem Falle bekanntlich die unteren Zeichen nehmen müssen, so ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\mathfrak{R}=4R\sqrt{\frac{R}{p}},$$

und:

$$\mathfrak{X}-x=-4\frac{R}{p}(2\frac{R}{p}a+x),\quad \mathfrak{Y}-y=-4\frac{R}{p}(2\frac{R}{p}b+y);$$

oder, wenn wir jetzt die Axe der Parabel als Axe der $x$ annehmen, wo also $b=0$ ist:

$$\mathfrak{X}-x=-4\frac{R}{p}(2\frac{R}{p}a+x),\quad \mathfrak{Y}-y=-4\frac{R}{p}y.$$

---

*) A. a. O. S. 402.

Legen wir das bei der Parabel gewöhnliche Coordinatensystem zu Grunde, für welches wir die Coordinaten jetzt durch $x'$, $y'$ bezeichnen wollen, so ist nach einer allgemein bekannten Formel:

$$\mathfrak{R}=\frac{(4y'^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}=\frac{(4px'+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}=\frac{4(x'+\frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}=\frac{4R^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}=4R\sqrt{\frac{R}{p}},$$

ganz wie oben. Ferner ist bekanntlich:

$$\mathfrak{X}'=3x'+\tfrac{1}{2}p,\quad \mathfrak{Y}'=-\frac{4x'^2}{y'}.$$

Nun ist aber offenbar:

$$x=x'-\tfrac{1}{4}p,\quad y=y';\quad \mathfrak{X}=\mathfrak{X}'-\tfrac{1}{4}p,\quad \mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}'$$

und $a=-\frac{1}{2}p$, also nach dem Obigen:

$$\mathfrak{X}'-x'=-4\frac{R}{p}(-R+x'-\tfrac{1}{4}p)=2R=2x'+\tfrac{1}{2}p,$$

$$\mathfrak{Y}'-y'=-4\frac{R}{p}y'=-\frac{4Rx'}{y'}=-\frac{(4x'+p)x'}{y'}=-\frac{4x'^2}{y'}-y';$$

also:

$$\mathfrak{X}'=3x'+\tfrac{1}{2}p,\quad \mathfrak{Y}'=-\frac{4x'^2}{y'};$$

wiederum ganz wie vorher.

Man könnte die Formeln 111) noch auf verschiedene Arten anders ausdrücken, was aber hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

## §. 11.

Wir wollen noch die Gleichung der Projection des Kegelschnitts auf einer der drei Coordinatenebenen, etwa auf der Ebene der $xy$, suchen. Diese Gleichung erhalten wir, wenn wir aus den beiden Gleichungen 45) und 75), nämlich aus den beiden Gleichungen:

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)x+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)y+(a\cos\beta-b\cos\alpha)z=0,$$

$$\frac{p^2}{4n^2}(x^2+y^2+z^2)=n^2(ax+by+cz-\frac{p^2}{4n^2})^2$$

die Grösse $z$ eliminiren. Nach der ersten dieser beiden Gleichungen ist:

$$z = -\frac{(b\cos\gamma - c\cos\beta)x + (c\cos\alpha - a\cos\gamma)y}{a\cos\beta - b\cos\alpha},$$

und weil nun nach §. 6. III*. IV*.

$$(a\cos\beta - b\cos\alpha)^2 + (b\cos\gamma - c\cos\beta)^2 = \frac{p^2}{4n^2}\cos\beta^2 + b^2,$$

$$(c\cos\alpha - a\cos\gamma)^2 + (a\cos\beta - b\cos\alpha)^2 = \frac{p^2}{4n^2}\cos\alpha^2 + a^2,$$

$$(b\cos\gamma - c\cos\beta)(c\cos\alpha - a\cos\gamma) = -\frac{p^2}{4n^2}\cos\alpha\cos\beta - ab$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

113) $$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(bx - ay)^2 + \frac{p^2}{4n^2}(x\cos\beta - y\cos\alpha)^2}{(a\cos\beta - b\cos\alpha)^2},$$

welcher Ausdruck auch an sich merkwürdig ist. Weil ferner

$$a(a\cos\beta - b\cos\alpha) - c(b\cos\gamma - c\cos\beta)$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)\cos\beta - b(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma),$$

$$b(a\cos\beta - b\cos\alpha) - c(c\cos\alpha - a\cos\gamma)$$
$$= a(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) - (a^2 + b^2 + c^2)\cos\alpha;$$

also nach bekannten Formeln:

$$a(a\cos\beta - b\cos\alpha) - c(b\cos\gamma - c\cos\beta) = \frac{p^2}{4n^2}\cos\beta,$$

$$b(a\cos\beta - b\cos\alpha) - c(c\cos\alpha - a\cos\gamma) = -\frac{p^2}{4n^2}\cos\alpha$$

ist, so ist, wie man sogleich übersieht:

114) . . . . . $$ax + by + cz = \frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha},$$

und daher:

$$ax + by + cz - \frac{p^2}{4n^2} = \frac{p^2}{4n^2}\cdot\frac{(x-a)\cos\beta - (y-b)\cos\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha}.$$

Also ist die gesuchte Gleichung der Projection auf der Ebene der $xy$:

115) . . . . $$(bx - ay)^2 + \frac{p^2}{4n^2}(x\cos\beta - y\cos\alpha)^2$$
$$= \frac{p^2}{4}\{(x-a)\cos\beta - (y-b)\cos\alpha\}^2.$$

---

## Zweites Kapitel.

### Von der Bestimmung der Bahnen der Planeten und Cometen aus drei geocentrischen Beobachtungen.

§. I.

Wir werden uns in diesem Kapitel mit der folgenden geometrischen Aufgabe beschäftigen:

Aufgabe.

Es seien ein Punkt $O$ und drei gerade Linien im Raume gegeben: man soll mit dem gegebenen Punkte $O$ als Brennpunkt einen Kegelschnitt beschreiben, welcher die drei gegebenen geraden Linien in den Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$ so schneidet, dass, wenn man sich die Sehnen $A_1A_2$ und $A_2A_3$ des Kegelschnitts gezogen denkt, die Flächenräume der beiden Dreiecke $A_1OA_2$ und $A_2OA_3$ in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, wobei wir zugleich annehmen werden, dass die drei Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ eine solche gegenseitige Lage haben sollen, dass man, um von $O$ durch $A_1$ zu $A_2$, von $O$ durch $A_2$ zu $A_3$ zu gelangen, sich in beiden Fällen in gleichem Sinne bewegen muss.

Wir werden diese Aufgabe hier bei Weitem vorzugsweise nur aus dem geometrischen Gesichtspunkte auffassen und auflösen, als eine Anwendung der im vorhergehenden Kapitel entwickelten allgemeinen Theorie der Kegelschnitte im Raume, späterhin aber die nahe Beziehung, in welcher dieselbe zu der Berechnung der Bahnen der Planeten und Cometen aus drei geocentrischen Beobachtungen steht, deutlich nachweisen. Eine solche rein geometrische Behandlung des Problems, wie dieselbe bis jetzt noch nicht gegeben worden ist, scheint uns von grosser Wichtigkeit zu sein, um eine recht deutliche Einsicht in die eigentliche Natur dieser Aufgabe zu gewinnen, was bei Weitem nicht in demselben Grade möglich ist, wenn sie bloss für ihren speciellen praktischen Zweck in der Astronomie gelöst wird. Zugleich bemerken wir rücksichtlich der Fassung, welche oben der Aufgabe gegeben worden ist, dass wir dabei vorläufig ganz unberücksichtigt gelassen und davon abgesehen haben, in wie weit

dieselbe überhaupt einer Auflösung fähig, ob sie in der obigen Fassung völlig oder nicht völlig bestimmt ist, u. s. w., alles Fragen, die erst durch die nun folgende Auflösung selbst ihre Erledigung finden werden.

§. 2.

Den als Brennpunkt des gesuchten Kegelschnitts gegebenen Punkt $O$ nehmen wir als Anfangspunkt eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems der $xyz$ an und bezeichnen in Bezug auf dieses Coordinatensystem die Gleichungen der drei gegebenen Geraden im Raume, in denen die Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ in der angegebenen Weise liegen sollen, durch:

$$1) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-c_1}{\cos\gamma_1}, \\ \dfrac{x-a_2}{\cos\alpha_2}=\dfrac{y-b_2}{\cos\beta_2}=\dfrac{z-c_2}{\cos\gamma_2}, \\ \dfrac{x-a_3}{\cos\alpha_3}=\dfrac{y-b_3}{\cos\beta_3}=\dfrac{z-c_3}{\cos\gamma_3}; \end{array} \right.$$

wo also $a_1$, $b_1$, $c_1$ und $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; $a_2$, $b_2$, $c_2$ und $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$; $a_3$, $b_3$, $c_3$ und $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ gegebene Grössen sind. Weil aber $(a_1b_1c_1)$, $(a_2b_2c_2)$, $(a_3b_3c_3)$ jede drei in den drei gegebenen Geraden liegende Punkte sein können, so wird der Einfachheit wegen die Annahme verstattet sein, dass diese Punkte die Durchschnittspunkte $E_1$, $E_2$, $E_3$ der drei gegebenen Geraden mit der Ebene der $xy$ sind, was damit zusammenfällt, dass wir die drei Coordinaten $c_1$, $c_2$, $c_3$ verschwinden lassen und daher die Punkte $E_1$, $E_2$, $E_3$ durch ihre Coordinaten auch bloss durch $(a_1b_1)$, $(a_2b_2)$, $(a_3b_3)$ bezeichnen werden. Das gegebene Verhältniss der beiden Dreiecke $A_1OA_2$ und $A_2OA_3$ zu einander bezeichnen wir durch $\tau_{12}:\tau_{23}$, so dass also

$$\Delta A_1OA_2:\Delta A_2OA_3=\tau_{12}:\tau_{23}$$

ist. Die gesuchten Coordinaten der drei Punkte

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

bezeichnen wir respective durch:

$$x_1,\, y_1,\, z_1;\quad x_2,\, y_2,\, z_2;\quad x_3,\, y_3,\, z_3;$$

die nach diesen Punkten von dem gegebenen Brennpunkte $O$ gezogenen Geraden respective durch

$$R_1,\quad R_2,\quad R_3;$$

und die nach denselben Punkten von den Punkten $E_1$, $E_2$, $E_3$ gezogenen Geraden respective durch:

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3.$$

Für die zu bestimmenden Elemente des gesuchten Kegelschnitts bedienen wir uns genau derselben Bezeichnungen wie im vorhergehenden Kapitel, worüber also eine weitere Erläuterung hier nicht nöthig ist. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir nun zunächst die Gleichungen aufstellen, in denen die Auflösung unserer Aufgabe enthalten ist.

Die Bedingungen, dass der Anfangspunkt der Coordinaten $O$ mit den Punkten $(abc)$, $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ in einer Ebene liegt, und dass die Dreiecke $A_1OA_2$ und $A_2OA_3$ sich zu einander wie $\tau_{12}$ und $\tau_{23}$ verhalten, geben uns zuvörderst nach bekannten Sätzen die drei folgenden Gleichungen:

I.

$$a(y_1z_2-z_1y_2)+b(z_1x_2-x_1z_2)+c(x_1y_2-y_1x_2)=0,$$

$$\frac{y_1z_2-z_1y_2}{y_2z_3-z_2y_3}=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}, \quad \frac{z_1x_2-x_1z_2}{z_2x_3-x_2z_3}=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}.$$

Ferner geben uns die Bedingungen, dass die drei Punkte $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ in den drei gegebenen geraden Linien liegen sollen, die neun folgenden Gleichungen:

II.

$$x_1=a_1+G_1\cos\alpha_1, \quad y_1=b_1+G_1\cos\beta_1, \quad z_1=G_1\cos\gamma_1;$$

$$x_2=a_2+G_2\cos\alpha_2, \quad y_2=b_2+G_2\cos\beta_2, \quad z_2=G_2\cos\gamma_2;$$

$$x_3=a_3+G_3\cos\alpha_3, \quad y_3=b_3+G_3\cos\beta_3, \quad z_3=G_3\cos\gamma_3;$$

wobei wir, was offenbar verstattet ist, vorausgesetzt haben, dass die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ sich auf die von den Punkten $E_1$, $E_2$, $E_3$ aus nach den Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$ hin gehenden Theile der drei gegebenen geraden Linien beziehen *).

Die Bedingung, dass $R_1$, $R_2$, $R_3$ die Entfernungen der Punkte $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ vom Anfangspunkte der Coordinaten $O$ sind, giebt die drei folgenden Gleichungen:

*) Möge diese Voraussetzung auch immerhin mit besonderer Rücksicht auf das Planeten- und Cometen-Problem gemacht und zulässig sein, so möge sie doch hier grösserer Anschaulichkeit und der späteren Anwendungen wegen bestehen.

III.

$$R_1=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2},$$

$$R_2=\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2},$$

$$R_3=\sqrt{x_3{}^2+y_3{}^2+z_3{}^2}.$$

Weil nun ferner die Punkte $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ in dem mit $O$ als Brennpunkt beschriebenen Kegelschnitte liegen sollen, so haben wir nach Kap. I. 79) die drei folgenden Gleichungen:

IV.

$$ax_1+by_1+cz_1=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}\mp\frac{R_1}{n}\right),$$

$$ax_2+by_2+cz_2=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}\mp\frac{R_2}{n}\right),$$

$$ax_3+by_3+cz_3=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}\mp\frac{R_3}{n}\right);$$

über die aber folgende Bemerkungen zu machen sind. Sollen nämlich die drei in Rede stehenden Punkte alle drei in einer Parabel, einer Ellipse oder dem ersten Zweige einer Hyperbel liegen, so muss man in diesen sämmtlichen Gleichungen nach Kap. I. §. 7.*) die oberen Zeichen nehmen; sollen dagegen die in Rede stehenden Punkte alle drei in dem zweiten Zweige einer Hyperbel liegen, so muss man nach Kap. I. §. 7. die unteren Zeichen nehmen. In beiden Fällen sind also die oberen und unteren Zeichen auf einander zu beziehen. Um uns aber von dem etwas lästigen doppelten Zeichen zu befreien, wollen wir von jetzt an den Parameter für die Parabel, die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel wie bisher positiv, für den zweiten Zweig der Hyperbel dagegen negativ nehmen; dann sind im ersten Falle die Gleichungen:

$$ax_1+by_1+cz_1=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right),$$

$$ax_2+by_2+cz_2=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right),$$

$$ax_3+by_3+cz_3=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_3}{n}\right);$$

*) A. a. O. sind die Gleichungen mit umgekehrten Zeichen geschrieben.

im zweiten dagegen:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = \frac{-p}{2n}\left(\frac{-p}{2n} + \frac{R_1}{n}\right),$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = \frac{-p}{2n}\left(\frac{-p}{2n} + \frac{R_2}{n}\right),$$

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = \frac{-p}{2n}\left(\frac{-p}{2n} + \frac{R_3}{n}\right);$$

also:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_1}{n}\right),$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_2}{n}\right),$$

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_3}{n}\right);$$

folglich ganz allgemein, wenn nämlich die Punkte $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ alle drei in einer Parabel, einer Ellipse oder dem ersten oder zweiten Zweige einer Hyperbel liegen sollen:

IV*.

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_1}{n}\right),$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_2}{n}\right),$$

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_3}{n}\right).$$

Sollten aber zwei der in Rede stehenden drei Punkte in dem einen, der dritte in dem anderen Zweige einer Hyperbel liegen, so würden in den Gleichungen IV. nicht mehr die oberen und unteren Zeichen auf einander bezogen werden dürfen, und die Behandlung der Aufgabe würde einige Abänderungen erleiden müssen, die ich aber der Kürze wegen hier um so mehr bei Seite setzen kann, weil die Art der Behandlung sich aus der folgenden Behandlung des hier in Angriff genommenen ersten Falls ganz von selbst ergiebt, und weil der zweite Fall für die Anwendung in der Astronomie insofern keine Bedeutung hat, weil ja, wenn man die Möglichkeit oder Zulässigkeit des zweiten Falls annehmen wollte, die Bewegung des betreffenden Weltkörpers eine Unterbrechung der Stetigkeit erlitten haben würde. In geometrischer

Beziehung wird aber, wie schon erinnert, die Behandlungsweise des zweiten Falls sich aus der folgenden Behandlung des ersten Falls ganz von selbst ergeben. Es wird also im Folgenden immer angenommen werden, dass alle drei Punkte in einer Parabel, einer Ellipse, oder dem ersten oder zweiten Zweige einer Hyperbel liegen sollen.

Weiter liefert uns nach Kap. I. 41) die allgemeine Theorie der Kegelschnitte die folgende Gleichung:

$$\text{V.}\quad a^2+b^2+c^2=\left(\frac{p}{2n}\right)^2.$$

Alle diese Gleichungen sind von den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, durch welche die Richtung der Directrix des Kegelschnitts bestimmt wird, ganz unabhängig. Von den, die in Rede stehenden Winkel enthaltenden Gleichungen soll nachher sogleich die Rede sein.

In I., II., III., IV*., V. sind uns neunzehn Gleichungen mit den zwanzig unbekannten Grössen:

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\quad a,\ b,\ c;$$
$$R_1,\ R_2,\ R_3;\quad G_1,\ G_2,\ G_3;\quad p,\ n$$

gegeben, so dass wir also eine Gleichung zu wenig haben, um mittelst dieser Gleichungen die vorstehenden unbekannten Grössen sämmtlich bestimmen zu können. Allerdings liessen sich noch andere Gleichungen aufstellen, die aber sämmtlich Folgerungen aus den obigen Gleichungen, also nicht unabhängig bestehende Gleichungen sein würden. Jedenfalls ist auch, um dies an ein Paar Beispielen zu erläutern:

$$\frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_2y_3-y_2x_3}=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}};$$

nun ist aber nach I.:

$$y_1z_2-z_1y_2=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}(y_2z_3-z_2y_3),$$

$$z_1x_2-x_1z_2=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}(z_2x_3-x_2z_3);$$

multiplicirt man die erste Gleichung mit $x_2$, die zweite mit $y_2$, und addirt die Gleichungen zu einander, so erhält man:

$$(x_1y_2-y_1x_2)z_2=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}(x_2y_3-y_2x_3)z_2,$$

also

$$\frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_2y_3-y_2x_3}=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}},$$

und diese Gleichung ist daher eine Folge aus den beiden letzten Gleichungen in I., so dass man folglich immer zugleich hat:

$$\frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_2y_3-y_2x_3}=\frac{y_1z_2-z_1y_2}{y_2z_3-z_2y_3}=\frac{z_1x_2-x_1z_2}{z_2x_3-x_2z_3}=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}.$$

Setzt man in der ersten der Gleichungen I.:

$$x_1y_2-y_1x_2=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}(x_2y_3-y_2x_3),$$

$$y_1z_2-z_1y_2=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}(y_2z_3-z_2y_3),$$

$$z_1x_2-x_1z_2=\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}(z_2x_3-x_2z_3);$$

so erhält man die Gleichung:

$$a(y_2z_3-z_2y_3)+b(z_2x_3-x_2z_3)+c(x_2y_3-y_2x_3)=0,$$

welche ausspricht, dass die Punkte $O$, $(abc)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ in einer Ebene liegen. Liegen aber die Punkte $O$, $(abc)$, $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ und auch die Punkte $O$, $(abc)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ in einer Ebene, so müssen natürlich auch die Punkte $O$, $(abc)$, $(x_3y_3z_3)$, $(x_1y_1z_1)$ in einer Ebene liegen, was durch die Gleichung

$$a(y_3z_1-z_3y_1)+b(z_3x_1-x_3z_1)+c(x_3y_1-y_3x_1)=0$$

ausgesprochen wird.

Nach Kap. I. 40), 45) und einer allgemein bekannten analytisch-geometrischen Gleichung haben wir nun noch die folgenden Gleichungen:

VI.

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0;$$

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)x_1+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)y_1+(a\cos\beta-b\cos\alpha)z_1=0,$$

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)x_2+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)y_2+(a\cos\beta-b\cos\alpha)z_2=0,$$

$$(b\cos\gamma-c\cos\beta)x_3+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)y_3+(a\cos\beta-b\cos\alpha)z_3=0;$$

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1;$$

oder:

VI*.

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0;$$

$$(bz_1 - cy_1)\cos\alpha + (cx_1 - az_1)\cos\beta + (ay_1 - bx_1)\cos\gamma = 0,$$

$$(bz_2 - cy_2)\cos\alpha + (cx_2 - az_2)\cos\beta + (ay_2 - bx_2)\cos\gamma = 0,$$

$$(bz_3 - cy_3)\cos\alpha + (cx_3 - az_3)\cos\beta + (ay_3 - bx_3)\cos\gamma = 0:$$

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Nimmt man aber von der zweiten, dritten, vierten Gleichung zwei, etwa die beiden ersten Gleichungen, und lässt $\Gamma$ einen beliebigen Factor bezeichnen, so kann man bekanntlich setzen:

$$\cos\alpha = \Gamma\{(cx_1 - az_1)(ay_2 - bx_2) - (ay_1 - bx_1)(cx_2 - az_2)\},$$

$$\cos\beta = \Gamma\{(ay_1 - bx_1)(bz_2 - cy_2) - (bz_1 - cy_1)(ay_2 - bx_2)\},$$

$$\cos\gamma = \Gamma\{(bz_1 - cy_1)(cx_2 - az_2) - (cx_1 - az_1)(bz_2 - cy_2)\};$$

also:

$$\cos\alpha = \Gamma a\{a(y_1z_2 - z_1y_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2)\},$$

$$\cos\beta = \Gamma b\{a(y_1z_2 - z_1y_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2)\},$$

$$\cos\gamma = \Gamma c\{a(y_1z_2 - z_1y_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2)\};$$

was, in die erste der Gleichungen VI. oder VI*. gesetzt, zu der Gleichung

$$\Gamma(a^2+b^2+c^2)\{a(y_1z_2 - z_1y_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2)\} = 0,$$

also zu der schon in I. enthaltenen Gleichung

$$a(y_1z_2 - z_1y_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2) = 0$$

führt. Hieraus sieht man, dass die Gleichungen VI. oder VI*., in Verbindung mit den früheren Gleichungen, nur ein System von drei selbstständigen Gleichungen repräsentiren, indem man nämlich von diesen fünf Gleichungen immer die erste und letzte und eine der drei mittleren zu wählen hat.

Im Ganzen hat man also zwei und zwanzig Gleichungen mit den drei und zwanzig unbekannten Grössen:

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\quad a,\ b,\ c;$$

$$R_1,\ R_2,\ R_3;\quad G_1,\ G_2,\ G_3;\quad p,\ n;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma;$$

woraus sich ergiebt, dass die Aufgabe in der ihr oben gegebenen Fassung keine völlig bestimmte Aufgabe ist. Wie nun derselben

eine nähere Bestimmung zu geben ist, wird weiter unten gezeigt werden, wenn wir erst die obigen Gleichungen einer weiteren Behandlung unterworfen haben, zu der wir jetzt zunächst übergehen wollen.

§. 3.

Wir beschäftigen uns zuerst mit den Gleichungen:

$$\tau_{23}(y_1 z_2 - z_1 y_2) = \tau_{12}(y_2 z_3 - z_2 y_3),$$
$$\tau_{23}(z_1 x_2 - x_1 z_2) = \tau_{12}(z_2 x_3 - x_2 z_3)$$

und:

$$x_1 = a_1 + G_1 \cos\alpha_1, \quad y_1 = b_1 + G_1 \cos\beta_1, \quad z_1 = G_1 \cos\gamma_1;$$
$$x_2 = a_2 + G_2 \cos\alpha_2, \quad y_2 = b_2 + G_2 \cos\beta_2, \quad z_2 = G_2 \cos\gamma_2;$$
$$x_3 = a_3 + G_3 \cos\alpha_3, \quad y_3 = b_3 + G_3 \cos\beta_3, \quad z_3 = G_3 \cos\gamma_3.$$

Führt man die Ausdrücke der Coordinaten aus dem letzten System in die beiden ersten Gleichungen ein, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\tau_{23}\{b_2\cos\gamma_1 . G_1 - b_1\cos\gamma_2 . G_2 - (\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\cos\beta_2)G_1G_2\}$$
$$= \tau_{12}\{b_3\cos\gamma_2 . G_2 - b_2\cos\gamma_3 . G_3 - (\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\gamma_2\cos\beta_3)G_2G_3\},$$
$$\tau_{23}\{a_2\cos\gamma_1 . G_1 - a_1\cos\gamma_2 . G_2 + (\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2)G_1G_2\}$$
$$= \tau_{12}\{a_3\cos\gamma_2 . G_2 - a_2\cos\gamma_3 . G_3 + (\cos\gamma_2\cos\alpha_3 - \cos\alpha_2\cos\gamma_3)G_2G_3\};$$

welche sich auf verschiedene Arten schreiben lassen.

Schreibt man diese Gleichungen zuerst unter der Form:

$$\tau_{23}b_2\cos\gamma_1 . G_1 + \tau_{12}b_2\cos\gamma_3 . G_3$$
$$= \{(\tau_{23}b_1 + \tau_{12}b_3)\cos\gamma_2 + \tau_{23}(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\cos\beta_2)G_1$$
$$- \tau_{12}(\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\gamma_2\cos\beta_3)G_3\}G_2,$$

$$\tau_{23}a_2\cos\gamma_1 . G_1 + \tau_{12}a_2\cos\gamma_3 . G_3$$
$$= \{(\tau_{23}a_1 + \tau_{12}a_3)\cos\gamma_2 - \tau_{23}(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2)G_1$$
$$+ \tau_{12}(\cos\gamma_2\cos\alpha_3 - \cos\alpha_2\cos\gamma_3)G_3\}G_2$$

und dividirt sie dann durch einander, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{\left\{\begin{array}{c}(\tau_{23}b_1 + \tau_{12}b_3)\cos\gamma_2 + \tau_{23}(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\cos\beta_2)G_1 \\ - \tau_{12}(\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\gamma_2\cos\beta_3)G_3\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}(\tau_{23}a_1 + \tau_{12}a_3)\cos\gamma_2 - \tau_{23}(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2)G_1 \\ + \tau_{12}(\cos\gamma_2\cos\alpha_3 - \cos\alpha_2\cos\gamma_3)G_3\end{array}\right\}},$$

die ferner leicht zu der folgenden linearen Gleichung zwischen $G_1$ und $G_3$ führt:

2)

$$\left.\begin{array}{l}\{a_2(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)-b_2(\tau_{23}a_1+\tau_{12}a_3)\}\cos\gamma_2\\ +\tau_{23}\{a_2(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)-b_2(\cos\alpha_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\alpha_2)\}G_1\\ +\tau_{12}\{a_2(\cos\beta_3\cos\gamma_2-\cos\gamma_3\cos\beta_2)-b_2(\cos\alpha_3\cos\gamma_2-\cos\gamma_3\cos\alpha_2)\}G_3\end{array}\right\}=0$$

oder:

3)

$$\left.\begin{array}{l}\{\tau_{12}(a_2b_3-b_2a_3)+\tau_{23}(a_2b_1-b_2a_1)\}\cos\gamma_2\\ +\tau_{23}\{(a_2\cos\beta_1-b_2\cos\alpha_1)\cos\gamma_2-(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\cos\gamma_1\}G_1\\ +\tau_{12}\{(a_2\cos\beta_3-b_2\cos\alpha_3)\cos\gamma_2-(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\cos\gamma_3\}G_3\end{array}\right\}=0.$$

Schreibt man die beiden obigen Gleichungen auf folgende Art:

$$\tau_{23}b_2\cos\gamma_1\,.\,G_1-(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)\cos\gamma_2\,.\,G_2-\tau_{23}(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)G_1G_2$$
$$=-\tau_{12}\{b_2\cos\gamma_3+(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\beta_3)G_2\}G_3,$$

$$\tau_{23}a_2\cos\gamma_1\,.\,G_1-(\tau_{23}a_1+\tau_{12}a_3)\cos\gamma_2\,.\,G_2-\tau_{23}(\cos\alpha_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\alpha_2)G_1G_2$$
$$=-\tau_{12}\{a_2\cos\gamma_3+(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\alpha_3)G_2\}G_3$$

und dividirt sie dann durch einander, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\tau_{23}b_2\cos\gamma_1\,.\,G_1-(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)\cos\gamma_2\,.\,G_2-\tau_{23}(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)G_1G_2}{\tau_{23}a_2\cos\gamma_1\,.\,G_1-(\tau_{23}a_1+\tau_{12}a_3)\cos\gamma_2\,.\,G_2-\tau_{23}(\cos\alpha_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\alpha_2)G_1G_2}$$
$$=\frac{b_2\cos\gamma_3+(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\beta_3)G_2}{a_2\cos\gamma_3+(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\alpha_3)G_2},$$

welche nach leichter Rechnung, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, und die Gleichung dann durch $G_2\cos\gamma_2$ dividirt, zu der folgenden Gleichung führt:

4)

$$\begin{array}{l}\{a_2(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)-b_2(\tau_{13}a_1+\tau_{12}a_3)\}\cos\gamma_3\\ +\tau_{23}\{a_2(\cos\beta_1\cos\gamma_3-\cos\gamma_1\cos\beta_3)-b_2(\cos\alpha_1\cos\gamma_3-\cos\gamma_1\cos\alpha_3)\}G_1\\ +\{(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\alpha_3)\\ \qquad -(\tau_{23}a_1+\tau_{12}a_3)(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\beta_3)\}G_2\\ +\tau_{23}\{\cos\alpha_2(\cos\beta_1\cos\gamma_3-\cos\gamma_1\cos\beta_3)+\cos\beta_2(\cos\gamma_1\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\cos\gamma_3)\\ \qquad +\cos\gamma_2(\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\beta_1\cos\alpha_3)\}G_1G_2\\ =0.\end{array}$$

Schreibt man endlich die beiden in Rede stehenden Gleichungen auf folgende Art:

$$\tau_{12}b_2\cos\gamma_3\,.\,G_3-(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)\cos\gamma_2\,.\,G_2$$
$$+\tau_{12}(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\beta_3)\,G_2G_3$$
$$=-\tau_{23}\{b_2\cos\gamma_1-(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\,G_2\}\,G_1,$$

$$\tau_{12}a_2\cos\gamma_3\,.\,G_3-(\tau_{23}a_1+\tau_{12}a_3)\cos\gamma_2\,.\,G_2$$
$$+\tau_{12}(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\alpha_3)\,G_2G_3$$
$$=-\tau_{23}\{a_2\cos\gamma_1-(\cos\alpha_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\alpha_2)\,G_2\}\,G_1$$

und dividirt sie dann durch einander, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\tau_{12}b_2\cos\gamma_3\,.\,G_3-(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)\cos\gamma_2\,.\,G_2\\+\tau_{12}(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\beta_3)\,G_2G_3\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\tau_{12}a_2\cos\gamma_3\,.\,G_3-(\tau_{23}a_1+\tau_{12}a_3)\cos\gamma_2\,.\,G_2\\+\tau_{12}(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\alpha_3)\,G_2G_3\end{array}\right\}}$$
$$=\frac{b_2\cos\gamma_1-(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\,G_2}{a_2\cos\gamma_1-(\cos\alpha_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\alpha_2)\,G_2},$$

welche auf ähnliche Art wie vorher mittelst leichter Rechnung ferner zu der folgenden Gleichung führt:

5)

$$\{a_2(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)-b_2(\tau_{23}a_1+\tau_{12}a_3)\}\cos\gamma_1$$
$$-\tau_{12}\{a_2(\cos\beta_1\cos\gamma_3-\cos\gamma_1\cos\beta_3)-b_2(\cos\alpha_1\cos\gamma_3-\cos\gamma_1\cos\alpha_3)\}\,G_3$$
$$+\{(\tau_{23}b_1+\tau_{12}b_3)(\cos\alpha_2\cos\gamma_1-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)$$
$$-(\tau_{23}a_1+\tau_{12}a_3)(\cos\beta_2\cos\gamma_1-\cos\gamma_2\cos\beta_1)\}\,G_2$$
$$-\tau_{12}\{\cos\alpha_2(\cos\beta_1\cos\gamma_3-\cos\gamma_1\cos\beta_3)+\cos\beta_2(\cos\gamma_1\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\cos\gamma_3)$$
$$+\cos\gamma_2(\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\beta_1\cos\alpha_3)\}\,G_2G_3$$
$$=0.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

6)

$$\mathfrak{A}\ =\tau_{12}(a_2b_3-b_2a_3)-\tau_{23}(a_1b_2-b_1a_2),$$
$$\mathfrak{B}\ =(a_2\cos\beta_1-b_2\cos\alpha_1)\cos\gamma_3-(a_2\cos\beta_3-b_2\cos\alpha_3)\cos\gamma_1,$$
$$\mathfrak{C}_{23}=-\tau_{23}\{(a_1\cos\beta_2-b_1\cos\alpha_2)\cos\gamma_3-(a_1\cos\beta_3-b_1\cos\alpha_3)\cos\gamma_2\}$$
$$-\tau_{12}\{(a_3\cos\beta_2-b_3\cos\alpha_2)\cos\gamma_3-(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)\cos\gamma_2\},$$
$$\mathfrak{C}_{12}=-\tau_{23}\{(a_1\cos\beta_2-b_1\cos\alpha_2)\cos\gamma_1-(a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)\cos\gamma_2\}$$
$$-\tau_{12}\{(a_3\cos\beta_2-b_3\cos\alpha_2)\cos\gamma_1-(a_3\cos\beta_1-b_3\cos\alpha_1)\cos\gamma_2\},$$
$$\mathfrak{D}\ =-\{(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\beta_2\cos\alpha_3)\cos\gamma_1$$
$$+(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\beta_3\cos\alpha_1)\cos\gamma_2+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\cos\gamma_3\};$$

so werden die Gleichungen 4) und 5):

7)

$$\mathfrak{A}\cos\gamma_3 + \tau_{23}\mathfrak{B}G_1 + \mathfrak{C}_{23}G_2 + \tau_{23}\mathfrak{D}G_1G_2 = 0,$$

$$\mathfrak{A}\cos\gamma_1 - \tau_{12}\mathfrak{B}G_3 + \mathfrak{C}_{12}G_2 - \tau_{12}\mathfrak{D}G_2G_3 = 0.$$

Kennt man etwa $G_2$, so lassen sich mittelst dieser beiden Gleichungen $G_1$ und $G_3$ leicht berechnen, und die Gleichung 2) oder 3) kann dann zur Prüfung der Richtigkeit der geführten Rechnung dienen. Natürlich lässt sich immer ein ähnliches Verfahren anwenden, wenn man überhaupt irgend eine der drei Grössen $G_1$, $G_2$, $G_3$ kennt, indem sich daraus mittelst der hier entwickelten Gleichungen die beiden anderen immer leicht finden lassen.

## §. 4.

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung der vier Gleichungen:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_1}{n}\right),$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_2}{n}\right),$$

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = \frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n} - \frac{R_3}{n}\right)$$

und

$$a(y_1z_2 - z_1y_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2) = 0,$$

indem wir derselben die folgende allgemeine Bemerkung vorausschicken.

Wenn zwischen drei Grössen $x$, $y$, $z$ vier Gleichungen von der Form

$$a_0x + b_0y + c_0z = K_0,$$

$$a_1x + b_1y + c_1z = K_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = K_2;$$

$$Ax + By + Cz = 0$$

Statt finden, so müssen die Grössen

$$a_0,\ b_0,\ c_0;\quad a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;\quad K_0,\ K_1,\ K_2;\quad A,\ B,\ C$$

jederzeit einer gewissen Bedingungsgleichung genügen, welche man leicht auf folgende Art erhält. Man verbinde mit jeder der drei ersten Gleichungen die vierte Gleichung und eliminire jedesmal $x$, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$(b_0A-a_0B)y+(c_0A-a_0C)z=AK_0,$$
$$(b_1A-a_1B)y+(c_1A-a_1C)z=AK_1,$$
$$(b_2A-a_2B)y+(c_2A-a_2C)z=AK_2.$$

Multiplicirt man nun diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$(b_1A-a_1B)(c_2A-a_2C)-(c_1A-a_1C)(b_2A-a_2B),$$
$$(b_2A-a_2B)(c_0A-a_0C)-(c_2A-a_2C)(b_0A-a_0B),$$
$$(b_0A-a_0B)(c_1A-a_1C)-(c_0A-a_0C)(b_1A-a_1B)$$

und addirt die Gleichungen zu einander, so erhält man auf der Stelle die folgende gesuchte Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\{(b_1A-a_1B)(c_2A-a_2C)-(c_1A-a_1C)(b_2A-a_2B)\}K_0\\ +\{(b_2A-a_2B)(c_0A-a_0C)-(c_2A-a_2C)(b_0A-a_0B)\}K_1\\ +\{(b_0A-a_0B)(c_1A-a_1C)-(c_0A-a_0C)(b_1A-a_1B)\}K_2\end{array}\right\}=0,$$

oder, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{array}{l}\{A(b_1c_2-c_1b_2)+B(c_1a_2-a_1c_2)+C(a_1b_2-b_1a_2)\}K_0\\ +\{A(b_2c_0-c_2b_0)+B(c_2a_0-a_2c_0)+C(a_2b_0-b_2a_0)\}K_1\\ +\{A(b_0c_1-c_0b_1)+B(c_0a_1-a_0c_1)+C(a_0b_1-b_0a_1)\}K_2\end{array}\right\}=0.$$

Dass man, statt von der Elimination von $x$, auch von der Elimination von $y$ oder $z$ hätte ausgehen können, versteht sich von selbst.

Wenden wir nun die vorstehende Gleichung auf unsere vier obigen Gleichungen, in denen $a$, $b$, $c$ die vorhergehenden $x, y, z$ vertreten, an, so erhalten wir die folgende Gleichung, nachdem wir die resultirende Gleichung durch $\frac{p}{2n}$ dividirt und mit $n$ multiplicirt haben:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(y_1z_2-z_1y_2)(y_2z_3-z_2y_3)\\ +(z_1x_2-x_1z_2)(z_2x_3-x_2z_3)\\ +(x_1y_2-y_1x_2)(x_2y_3-y_2x_3)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_1)\\ +\left\{\begin{array}{l}(y_1z_2-z_1y_2)(y_3z_1-z_3y_1)\\ +(z_1x_2-x_1z_2)(z_3x_1-x_3z_1)\\ +(x_1y_2-y_1x_2)(x_3y_1-y_3x_1)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_2)\\ +\left\{\begin{array}{l}(y_1z_2-z_1y_2)(y_1z_2-z_1y_2)\\ +(z_1x_2-x_1z_2)(z_1x_2-x_1z_2)\\ +(x_1y_2-y_1x_2)(x_1y_2-y_1x_2)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_3)\end{array}\right\}=0.$$

Weil bekanntlich auch

$$a(y_2z_3-z_2y_3)+b(z_2x_3-x_2z_3)+c(x_2y_3-y_2x_3)=0$$

und

$$a(y_3z_1-z_3y_1)+b(z_3x_1-x_3z_1)+c(x_3y_1-y_3x_1)=0$$

ist, so hat man auch die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r}\left\{\begin{array}{l}(y_2z_3-z_2y_3)(y_2z_3-z_2y_3)\\+(z_2x_3-x_2z_3)(z_2x_3-x_2z_3)\\+(x_2y_3-y_2x_3)(x_2y_3-y_2x_3)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_1)\\+\left\{\begin{array}{l}(y_2z_3-z_2y_3)(y_3z_1-z_3y_1)\\+(z_2x_3-x_2z_3)(z_3x_1-x_3z_1)\\+(x_2y_3-y_2x_3)(x_3y_1-y_3x_1)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_2)\\+\left\{\begin{array}{l}(y_2z_3-z_2y_3)(y_1z_2-z_1y_2)\\+(z_2x_3-x_2z_3)(z_1x_2-x_1z_2)\\+(x_2y_3-y_2x_3)(x_1y_2-y_1x_2)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_3)\end{array}\right\}=0$$

und

$$\left.\begin{array}{r}\left\{\begin{array}{l}(y_3z_1-z_3y_1)(y_2z_3-z_2y_3)\\+(z_3x_1-x_3z_1)(z_2x_3-x_2z_3)\\+(x_3y_1-y_3x_1)(x_2y_3-y_2x_3)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_1)\\+\left\{\begin{array}{l}(y_3z_1-z_3y_1)(y_3z_1-z_3y_1)\\+(z_3x_1-x_3z_1)(z_3x_1-x_3z_1)\\+(x_3y_1-y_3x_1)(x_3y_1-y_3x_1)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_2)\\+\left\{\begin{array}{l}(y_3z_1-z_3y_1)(y_1z_2-z_1y_2)\\+(z_3x_1-x_3z_1)(z_1x_2-x_1z_2)\\+(x_3y_1-y_3x_1)(x_1y_2-y_1x_2)\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}p-R_3)\end{array}\right\}=0.$$

Setzt man nun aber wie früher:

$$R_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\quad R_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,\quad R_3^2=x_3^2+y_3^2+z_3^2$$

und jetzt noch der Kürze wegen:

$$8)\quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}\Delta_{12}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\\ \Delta_{23}=x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3,\\ \Delta_{31}=x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1;\end{array}\right.$$

so bringt man die drei obigen Gleichungen leicht auf die folgende Form:

$$9)\quad\ldots\quad\left.\begin{array}{r}(\varDelta_{12}\varDelta_{23}-R_2{}^2\varDelta_{31})(\tfrac{1}{2}p-R_1)\\+(\varDelta_{31}\varDelta_{12}-R_1{}^2\varDelta_{23})(\tfrac{1}{2}p-R_2)\\+(R_1{}^2R_2{}^2-\varDelta_{12}{}^2)(\tfrac{1}{2}p-R_3)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}(R_2{}^2R_3{}^2-\varDelta_{23}{}^2)(\tfrac{1}{2}p-R_1)\\+(\varDelta_{23}\varDelta_{31}-R_3{}^2\varDelta_{12})(\tfrac{1}{2}p-R_2)\\+(\varDelta_{12}\varDelta_{23}-R_2{}^2\varDelta_{31})(\tfrac{1}{2}p-R_3)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}(\varDelta_{23}\varDelta_{31}-R_3{}^2\varDelta_{12})(\tfrac{1}{2}p-R_1)\\+(R_3{}^2R_1{}^2-\varDelta_{31}{}^2)(\tfrac{1}{2}p-R_2)\\+(\varDelta_{31}\varDelta_{12}-R_1{}^2\varDelta_{23})(\tfrac{1}{2}p-R_3)\end{array}\right\}=0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen noch:

$$10)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\Theta_1=\varDelta_{31}\varDelta_{12}-R_1{}^2\varDelta_{23},\\\Theta_2=\varDelta_{12}\varDelta_{23}-R_2{}^2\varDelta_{31},\\\Theta_3=\varDelta_{23}\varDelta_{31}-R_3{}^2\varDelta_{12}\end{array}\right.$$

und

$$11)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\Omega_1=R_2{}^2R_3{}^2-\varDelta_{23}{}^2,\\\Omega_2=R_3{}^2R_1{}^2-\varDelta_{31}{}^2,\\\Omega_3=R_1{}^2R_2{}^2-\varDelta_{12}{}^2\end{array}\right.$$

setzen:

$$12)\quad\left\{\begin{array}{l}\Theta_2(\tfrac{1}{2}p-R_1)+\Theta_1(\tfrac{1}{2}p-R_2)+\Omega_3(\tfrac{1}{2}p-R_3)=0,\\\Omega_1(\tfrac{1}{2}p-R_1)+\Theta_3(\tfrac{1}{2}p-R_2)+\Theta_2(\tfrac{1}{2}p-R_3)=0,\\\Theta_3(\tfrac{1}{2}p-R_1)+\Omega_2(\tfrac{1}{2}p-R_2)+\Theta_1(\tfrac{1}{2}p-R_3)=0;\end{array}\right.$$

also:

$$13)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}p=\dfrac{R_1\Theta_2+R_2\Theta_1+R_3\Omega_3}{\Theta_1+\Theta_2+\Omega_3},\\\tfrac{1}{2}p=\dfrac{R_1\Omega_1+R_2\Theta_3+R_3\Theta_2}{\Omega_1+\Theta_2+\Theta_3},\\\tfrac{1}{2}p=\dfrac{R_1\Theta_3+R_2\Omega_2+R_3\Theta_1}{\Theta_1+\Omega_2+\Theta_3}.\end{array}\right.$$

Addirt man die drei Gleichungen 12) zu einander, so erhält man:

$$14)\quad p=\frac{R_1(\Omega_1+\Theta_2+\Theta_3)+R_2(\Theta_1+\Omega_2+\Theta_3)+R_3(\Theta_1+\Theta_2+\Omega_3)}{\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\tfrac{1}{2}(\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3)}.$$

Eine Menge weiterer Transformationen, die sich mit diesen Gleichungen vornehmen lassen, übergehe ich, und will nur noch bemerken, dass die erste der Gleichungen 9) leicht auf die Form:

$$\{\Delta_{12}(\Delta_{23}+\Delta_{31}-\Delta_{12})-(R_1^2\Delta_{23}+R_2^2\Delta_{31}-R_1^2R_2^2)\}.\tfrac{1}{2}p$$
$$=\Delta_{12}(R_1\Delta_{23}+R_2\Delta_{31}-R_3\Delta_{12})-R_1R_2(R_1\Delta_{23}+R_2\Delta_{31}-R_1R_2R_3)$$

gebracht wird, und dass sich, wenn man der Kürze wegen:

$$15) \quad \ldots \quad u_{12}=\frac{\Delta_{12}}{R_1R_2},\quad u_{23}=\frac{\Delta_{23}}{R_2R_3},\quad u_{31}=\frac{\Delta_{31}}{R_3R_1}$$

setzt, der folgende Ausdruck ergiebt:

$$16) \quad \tfrac{1}{2}p=\frac{u_{12}(u_{23}+u_{31}-u_{12})-(u_{23}+u_{31}-1)}{u_{12}\left(\frac{u_{23}}{R_1}+\frac{u_{31}}{R_2}-\frac{u_{12}}{R_3}\right)-\left(\frac{u_{31}}{R_1}+\frac{u_{23}}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)}.$$

Alle diese Ausdrücke können zur Berechnung des Parameters $p$ gebraucht werden, wenn man die dazu nöthigen, in den Formeln enthaltenen Elemente kennt.

## §. 5.

Aus den drei Gleichungen:

$$ax_1+by_1+cz_1=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right),$$

$$ax_2+by_2+cz_2=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right),$$

$$a(y_1z_2-z_1y_2)+b(z_1x_2-x_1z_2)+c(x_1y_2-y_1x_2)=0$$

wollen wir jetzt $a$, $b$, $c$ bestimmen. Multipliciren wir zu dem Ende diese Gleichungen nach der Reihe zuerst mit:

$$y_2(x_1y_2-y_1x_2)-z_2(z_1x_2-x_1z_2)$$
$$=x_1(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-x_2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=x_1R_2^2-x_2\Delta_{12},$$

$$(z_1x_2-x_1z_2)z_1-(x_1y_2-y_1x_2)y_1$$
$$=x_2(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-x_1(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=x_2R_1^2-x_1\Delta_{12},$$

$$y_1z_2-z_1y_2;$$

dann mit:

$$z_2(y_1z_2-z_1y_2)-x_2(x_1y_2-y_1x_2)$$
$$=y_1(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-y_2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=y_1R_2^2-y_2\varDelta_{12},$$

$$(x_1y_2-y_1x_2)x_1-(y_1z_2-z_1y_2)z_1$$
$$=y_2(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-y_1(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=y_2R_1^2-y_1\varDelta_{12},$$

$$z_1x_2-x_1z_2;$$

endlich mit:

$$x_2(z_1x_2-x_1z_2)-y_2(y_1z_2-z_1y_2)$$
$$=z_1(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-z_2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=z_1R_2^2-z_2\varDelta_{12},$$

$$(y_1z_2-z_1y_2)y_1-(z_1x_2-x_1z_2)x_1$$
$$=z_2(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-z_1(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=z_2R_1^2-z_1\varDelta_{12},$$

$$x_1y_2-y_1x_2;$$

und addiren die Gleichungen in jedem Falle zu einander, so erhalten wir, indem wir bemerken, dass

$$(x_1y_2-y_1x_2)^2+(y_1z_2-z_1y_2)^2+(z_1x_2-x_1z_2)^2$$
$$=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2=R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2$$

ist, die folgenden Ausdrücke:

17)

$$a=\frac{p}{2n}\cdot\frac{\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)(x_1R_2^2-x_2\varDelta_{12})+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)(x_2R_1^2-x_1\varDelta_{12})}{R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2},$$

$$b=\frac{p}{2n}\cdot\frac{\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)(y_1R_2^2-y_2\varDelta_{12})+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)(y_2R_1^2-y_1\varDelta_{12})}{R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2},$$

$$c=\frac{p}{2n}\cdot\frac{\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)(z_1R_2^2-z_2\varDelta_{12})+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)(z_2R_1^2-z_1\varDelta_{12})}{R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2};$$

die man noch mehrfach umgestalten könnte.

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil, wie man leicht findet:

$$(x_1R_2^2-x_2\varDelta_{12})^2+(y_1R_2^2-y_2\varDelta_{12})^2+(z_1R_2^2-z_2\varDelta_{12})^2$$
$$=R_2^2(R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2),$$

$$(x_2R_1^2-x_1\varDelta_{12})^2+(y_2R_1^2-y_1\varDelta_{12})^2+(z_2R_1^2-z_1\varDelta_{12})^2$$
$$=R_1^2(R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2),$$

$$(x_1R_2^2-x_2\varDelta_{12})(x_2R_1^2-x_1\varDelta_{12})+(y_1R_2^2-y_2\varDelta_{12})(y_2R_1^2-y_1\varDelta_{12})$$
$$+(z_1R_2^2-z_2\varDelta_{12})(z_2R_1^2-z_1\varDelta_{12})=-\varDelta_{12}(R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2)$$

ist, die Gleichung:

18) . . . . . . . . . . $R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2$

$$=R_1^2\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)^2-2\varDelta_{12}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)+R_2^2\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)^2,$$

wobei man natürlich die bekannte Gleichung

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{p}{2n}\right)^2$$

19)

zu berücksichtigen hat. Also ist:

$$n^2=\frac{R_1^2(\tfrac{1}{2}p-R_2)^2-2\varDelta_{12}(\tfrac{1}{2}p-R_1)(\tfrac{1}{2}p-R_2)+R_2^2(\tfrac{1}{2}p-R_1)^2}{R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2}.$$

## §. 6.

Wenn man die drei Gleichungen:

$$ax_1+by_1+cz_1=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right),$$

$$ax_2+by_2+cz_2=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right),$$

$$ax_3+by_3+cz_3=\frac{p}{2n}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_3}{n}\right)$$

nach der Reihe mit

$$y_2z_3-z_2y_3,\quad y_3z_1-z_3y_1,\quad y_1z_2-z_1y_2;$$

dann mit

$$z_2x_3-x_2z_3,\quad z_3x_1-x_3z_1,\quad z_1x_2-x_1z_2;$$

endlich mit

$$x_2y_3-y_2x_3,\quad x_3y_1-y_3x_1,\quad x_1y_2-y_1x_2$$

multiplicirt, und in jedem Falle zu einander addirt; so erhält man die folgenden Gleichungen:

20)

$$\{x_1(y_2z_3-z_2y_3)+x_2(y_3z_1-z_3y_1)+x_3(y_1z_2-z_1y_2)\}a$$
$$=\frac{p}{2n}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)(y_2z_3-z_2y_3)\\+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)(y_3z_1-z_3y_1)\\+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_3}{n}\right)(y_1z_2-z_1y_2)\end{array}\right\},$$

$$\{x_1(y_2z_3-z_2y_3)+x_2(y_3z_1-z_3y_1)+x_3(y_1z_2-z_1y_2)\}b$$
$$=\frac{p}{2n}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)(z_2x_3-x_2z_3)\\+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)(z_3x_1-x_3z_1)\\+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_3}{n}\right)(z_1x_2-x_1z_2)\end{array}\right\},$$

$$\{x_1(y_2z_3-z_2y_3)+x_2(y_3z_1-z_3y_1)+x_3(y_1z_2-z_1y_2)\}c$$
$$=\frac{p}{2n}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)(x_2y_3-y_2x_3)\\+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)(x_3y_1-y_3x_1)\\+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_3}{n}\right)(x_1y_2-y_1x_2)\end{array}\right\}.$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

21)

$$
\begin{aligned}
&\{x_1(y_2z_3-z_2y_3)+x_2(y_3z_1-z_3y_1)+x_3(y_1z_2-z_1y_2)\}^2\\
&=\{y_1(z_2x_3-x_2z_3)+y_2(z_3x_1-x_3z_1)+y_3(z_1x_2-x_1z_2)\}^2\\
&=\{z_1(x_2y_3-y_2x_3)+z_2(x_3y_1-y_3x_1)+z_3(x_1y_2-y_1x_2)\}^2\\
&=\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)^2(R_2^2R_3^2-\Delta_{23}^2)\\
&\quad+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)^2(R_3^2R_1^2-\Delta_{31}^2)\\
&\quad+\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_3}{n}\right)^2(R_1^2R_2^2-\Delta_{12}^2)\\
&\quad+2\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)(\Delta_{23}\Delta_{31}-R_3^2\Delta_{12})\\
&\quad+2\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_3}{n}\right)(\Delta_{31}\Delta_{12}-R_1^2\Delta_{23})\\
&\quad+2\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_3}{n}\right)\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)(\Delta_{12}\Delta_{23}-R_2^2\Delta_{31}),
\end{aligned}
$$

wobei, ausser der Relation

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{p}{2n}\right)^2$$

und der Relation Kap. I. §. 6. II., die allgemeine Relation

$$
\begin{aligned}
&(ab_1-ba_1)(a_1b_2-b_1a_2)+(bc_1-cb_1)(b_1c_2-c_1b_2)+(ca_1-ac_1)(c_1a_2-a_1c_2)\\
&=(aa_1+bb_1+cc_1)(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2a+b_2b+c_2c)
\end{aligned}
$$

zu berücksichtigen ist.

## §. 7.

Dass die in §. 1. aufgestellte Aufgabe in der ihr dort gegebenen Fassung nicht völlig bestimmt sei, haben wir schon bemerkt; dieselbe kann nur durch Hinzufügung noch einer neuen Bedingung zu einer völlig bestimmten Aufgabe gemacht werden, in welcher Beziehung uns natürlich eine grosse Willkühr geboten ist. Wir wollen nun aber aus nachher weiter anzugebenden Gründen annehmen, dass die Charakteristik des zu beschreibenden Kegelschnitts gegeben sein solle, und legen uns demzufolge die folgende Aufgabe vor:

### Aufgabe.

**Es seien ein Punkt $O$ und drei gerade Linien im Raume gegeben: man soll mit dem gegebenen Punkte $O$ als Brennpunkt einen Kegelschnitt von gegebener Charakteristik beschreiben, welcher die drei gegebenen geraden Linien in den Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$ so schneidet, dass, wenn man sich die Sehnen $A_1A_2$ und $A_2A_3$ gezogen denkt, die Flächenräume der beiden Dreiecke $A_1OA_2$ und $A_2OA_3$ in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, wobei wir zugleich annehmen werden, dass die drei Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ eine solche gegenseitige Lage haben, dass man, um von $O$ durch $A_1$ zu $A_2$, von $O$ durch $A_2$ zu $A_3$ zu gelangen, sich in beiden Fällen in gleichem Sinne bewegen muss.**

Die Planeten und Cometen, den Gesetzen der allgemeinen Gravitation unterworfen und folgend, bewegen sich bekanntlich in Kegelschnitten um die in einem Brennpunkte des Kegelschnitts stehende Sonne so, dass die Flächenräume der von ihren Vectoren um die Sonne beschriebenen Sectoren den Zeiten, in denen diese Sectoren beschrieben werden, proportional sind. Die Beobachtungen dieser Weltkörper werden von der Erde aus angestellt und liefern nichts weiter als die durch gewisse Winkel, die mit den dazu geeigneten astronomischen Instrumenten gemessen werden, bestimmten Lagen im Raume der zu gewissen Zeiten, die durch die astronomischen Uhren bestimmt werden, von der Erde aus nach den in Rede stehenden Weltkörpern gezogenen Gesichtslinien. Hat man nun drei solche vollständige geocentrische, d. h. eigentlich von dem Mittelpunkte der Erde aus, zu drei verschiedenen bestimmten Zeiten angestellte Beobachtungen eines Weltkörpers; so liefern diese Beobachtungen für die drei entsprechenden, nach dem Weltkörper gezogenen Gesichtslinien die vorher durch

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

bezeichneten, oder andere mit denselben in einfachem analytischen Zusammenhange stehende Winkel, und die Zwischenzeiten $\tau_{12}$ und $\tau_{23}$ der drei Beobachtungen, wobei meistens, wenn auch nicht unmittelbar, aber doch mittelbar, die Ebene der Erdbahn als Ebene der $xy$ und die Sonne als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $xyz$ angenommen wird; der positive Theil der Axe der $x$ wird von der Sonne aus nach dem Anfangspunkte der heliocentrischen Längen hin gezogen, und der positive Theil der Axe der $y$ wird so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den rechten Winkel $(xy)$

hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen, in demselben Sinne bewegen muss, in welchem die heliocentrischen Längen von 0 bis 360° gezählt werden; der positive Theil der Axe der $z$ liegt auf der Seite der Ebene der Erdbahn, auf welcher die positiven heliocentrischen Breiten genommen werden. Die drei vorher durch $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $a_3 b_3)$ bezeichneten Punkte, in denen von den drei Gesichtslinien die Ebene der $xy$, also der Erdbahn geschnitten wird, sind nichts weiter als die Oerter der Erde in ihrer Bahn zu den Zeiten der drei Beobachtungen, welche immer leicht aus den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden berechnet werden können, so dass also auch die Coordinaten $a_1$, $b_1$; $a_2$, $b_2$; $a_3$, $b_3$ stets als bekannt angesehen werden dürfen. Soll nun aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen eines Planeten oder Cometen seine Bahn bestimmt werden, so wird es darauf ankommen, mit der Sonne als Brennpunkt einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher die drei bekannten, nach dem Weltkörper gezogenen Gesichtslinien in den Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$ so schneidet, dass, wenn $O$ die Sonne bezeichnet, die Flächenräume der Sectoren $A_1OA_2$, $A_2OA_3$ dieses Kegelschnitts sich zu einander wie die bekannten Zwischenzeiten $\tau_{12}$, $\tau_{23}$ der drei Beobachtungen verhalten. Nun sind aber die analytischen Ausdrücke der Flächenräume der Sectoren der Kegelschnitte entweder transcendenter Natur oder, wenn sie algebraisch sind, doch so complicirt, dass die Aufgabe in ihrer so eben ausgesprochenen Fassung bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis als so gut wie unauflösbar betrachtet werden muss, wodurch man nothwendigerweise zu nur näherungsweise richtigen Annahmen oder Voraussetzungen geführt worden ist. Man hat deshalb an die Stelle der Flächenräume der Sectoren $A_1OA_2$, $A_2OA_3$ die Flächenräume der Dreiecke $A_1OA_2$, $A_2OA_3$ gesetzt, und angenommen, dass diese sich wie die Zwischenzeiten $\tau_{12}$, $\tau_{23}$ zu einander verhalten, was wenigstens dann mit hinreichender Annäherung der Fall sein wird, wenn die genannten Zwischenzeiten nur klein sind, und hat die Aufgabe nun so formulirt, dass mit der Sonne $O$ als Brennpunkt ein Kegelschnitt beschrieben werden soll, welcher die drei nach dem Weltkörper gezogenen Gesichtslinien in den Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$ so schneidet, dass die Flächenräume der Dreiecke $A_1OA_2$, $A_2OA_3$ den Zeiten $\tau_{12}$, $\tau_{23}$ proportional sind, wodurch wir also unmittelbar auf das in §. 1. aufgestellte Problem geführt werden. Nun ist aber das Problem in dieser Fassung kein völlig bestimmtes, weshalb wir, wie schon oben erwähnt, für jetzt noch die Bedingung hinzufügen, dass die Charakteristik $n$ des zu beschreibenden Kegelschnitts gegeben sein soll, eine Bedingung, zu welcher wir aus folgendem Grunde geführt worden

sind. Bekanntlich betrachtet man bei der ersten Berechnung die Bahnen der Cometen näherungsweise als Parabeln, und hat also für diese Weltkörper die Aufgabe zu lösen: mit der Sonne als Brennpunkt eine Parabel zu beschreiben, welche die drei nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinien in den Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$ so schneidet, dass die Flächenräume der Dreiecke $A_1OA_2$, $A_2OA_3$ sich wie die beobachteten Zwischenzeiten $\tau_{12}$, $\tau_{23}$ zu einander verhalten. In dieser Fassung ist das Cometen-Problem als ein besonderer Fall unter unserer obigen Aufgabe enthalten, wenn man nämlich die Charakteristik $n=1$ setzt, weshalb also diese Aufgabe nur eine Verallgemeinerung des Cometen-Problems ist. Was es mit dem Planeten-Problem für eine Bewandtniss hat, werden wir weiter unten zeigen.

Nun aber haben wir über die Auflösung aller solcher Probleme noch die folgende allgemeine Bemerkung zu machen. Die vollständige algebraische Auflösung dieser Probleme in der vorher ihnen gegebenen Fassung, wenn man nämlich an die Stelle der Flächenräume der Sectoren $A_1OA_2$, $A_2OA_3$ des Kegelschnitts die Flächenräume der Dreiecke $A_1OA_2$, $A_2OA_3$ setzt, liegt zwar keineswegs ausser dem Bereiche der Möglichkeit; aber die Gleichungen, auf welche die Auflösung dieser Aufgabe zuletzt führt, müssen nothwendig so complicirt ausfallen und von so hohem Grade sein, dass sie für die Auflösung selbst bei dem gegenwärtigen Zustande der Algebra von nur sehr geringem Nutzen sein können und den Rechner wiederum nöthigen, zu mehrfachen Näherungen seine Zuflucht zu nehmen. Deshalb ist es unter allen Bedingungen am besten, diese und ähnliche Aufgaben als analytisch vollständig aufgelöst zu betrachten, wenn es möglich gewesen ist, die Auflösung auf nur eine noch der willkührlichen Annahme anheim gestellt bleibende unbekannte Grösse zurückzuführen, und dem Rechner dann zu überlassen, diese unbekannte Grösse durch successive Beilegung verschiedener Werthe auf dem Wege der Näherung so zu bestimmen, dass einer gewissen nothwendigen Bedingungsgleichung genügt wird, wodurch der wahre Werth der in Rede stehenden Grösse endlich ermittelt wird. Zugleich wird eine solche Auflösung jederzeit als eine desto vollkommenere und zweckentsprechendere betrachtet werden dürfen, wenn alle übrigen Grössen, die bei der Aufgabe zu bestimmen sind, durch die in Rede stehende, noch der willkührlichen Annahme anheim gestellte Grösse bloss durch lineare Gleichungen bestimmt werden. Dies ist also das Princip, an welches wir uns im Folgenden überall halten werden, wenn wir glauben uns für berechtigt halten zu dürfen, eine Aufgabe von der Art der hier zur Sprache kommenden als vollständig analytisch aufgelöst zu betrachten,

und von diesem Standpunkte aus wollen wir jetzt zunächst das oben im Eingange dieses Paragraphen ausgesprochene Problem behandeln, wozu nach den in den vorhergehenden Paragraphen enthaltenen Vorbereitungen hier wenige Worte hinreichen werden.

Wir nehmen die Grösse $G_2$ als diejenige an, welcher successive verschiedene Werthe beizulegen wir uns vornehmen. Dann können wir für jeden bestimmten Werth von $G_2$ die Grössen $G_1$ und $G_3$ mittelst der linearen Gleichungen 7) ohne alle Zweideutigkeit berechnen, wobei die Gleichung 3) als Prüfungs-Gleichung für die Richtigkeit der geführten Rechnung dient; und erhalten hierauf die Coordinaten

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3$$

mittelst der Formeln §. 2. II., so wie dann ferner die Grössen

$$R_1, R_2, R_3$$

mittelst der Formeln §. 2. III. Dann können wir mittelst einer der Formeln 13), 14), 16) den Parameter $p$, und mittelst der Formeln 17) oder 20) die Coordinaten $a, b, c$ berechnen, da $n$ als bekannt angenommen wird. Den bekannten Werth von $n$ und die gefundenen Werthe von $p$ und $a, b, c$ führen wir nun in die Gleichung

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{p}{2n}\right)^2$$

ein, und untersuchen, in wie weit diese Gleichung erfüllt ist. In allen Fällen müssen wir den Werth von $G_2$, von welchem wir ausgingen, so lange verändern, bis der vorstehenden Gleichung innerhalb der Gränzen der Genauigkeit, welche wir überhaupt zu erreichen beabsichtigen, vollständig genügt wird, woran wir erkennen, dass wir den richtigen Werth von $G_2$ gefunden haben. Es ist klar, dass wir diese Auflösung mehrfach abändern können; das Vorhergehende wird aber völlig ausreichend sein, um das einzuschlagende Verfahren im Allgemeinen deutlich vor Augen zu legen. Als zuletzt zu erfüllender Gleichung könnte man sich insbesondere, nachdem man $p$ berechnet hat, auch der Gleichung 18), nämlich der Gleichung

$$R_1^2R_2^2-\varDelta_{12}^2$$

$$=R_1^2\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)^2-2\varDelta_{12}\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_2}{n}\right)+R_2^2\left(\frac{p}{2n}-\frac{R_1}{n}\right)^2,$$

bedienen, wo man dann vorher nicht die Coordinaten $a, b, c$ berechnet zu haben braucht. Die zu solchen Abänderungen nöthi-

gen Formeln finden sich im Obigen vollständig entwickelt, und werden, auch ohne weitere Erläuterung, von einem Jeden immer leicht zu dem zu erreichenden Zwecke in entsprechender Weise ausgewählt werden können. Sehr vortheilhaft wird es natürlich sein, einen ersten Näherungswerth von $G_2$ zu kennen, von dem man in jedem einzelnen Falle auszugehen hat, worüber einige nähere Erläuterungen nachher noch vorkommen werden.

## §. 8.

Nehmen wir nun aber nicht wie vorher die Charakteristik oder ein anderes Element des zu beschreibenden Kegelschnitts als gegeben an, so kommen wir wieder auf die Aufgabe in §. 1. zurück, welche in ihrer dortigen Fassung nicht völlig bestimmt ist, und können dieser Aufgabe nur dadurch völlige Bestimmtheit verleihen, dass wir den zu beschreibenden Kegelschnitt noch einer besonderen, von ihm zu erfüllenden Bedingung unterwerfen; und dass sich solche Bedingungen in unendlich grosser Anzahl denken lassen, so dass sich also hierüber im Allgemeinen nichts Bestimmtes festsetzen lässt, versteht sich von selbst. In Rücksicht auf das allgemeine Planeten-Problem, unter welchem natürlich auch das Cometen-Problem als ein besonderer Fall enthalten ist, scheint sich jedoch die folgende Bedingung besonders zu empfehlen. Bezeichnen wir den Flächeninhalt des zwischen den beiden äussersten Vectoren $R_1$ und $R_3$ enthaltenen Sectors des Kegelschnitts durch $S_{31}$, und die Constante des Sonnensystems wie gewöhnlich durch $k$, wo bekanntlich

$$k = 0{,}01720209895$$

ist, so ist nach den Gesetzen der allgemeinen Gravitation*)

$$22) \;\ldots\ldots\; k = \frac{2\sqrt{2}}{(\tau_{12}+\tau_{23})\sqrt{p}\,.\sqrt{1+\frac{m}{M}}}\,S_{31},$$

oder, wenn man das Verhältniss der Massen $\frac{m}{M}$ wegen seiner Kleinheit als verschwindend betrachtet:

$$23) \;\ldots\ldots\ldots\; k = \frac{2\sqrt{2}}{(\tau_{12}+\tau_{23})\sqrt{p}}\,S_{31},$$

welche Gleichung wir also als die von dem zu beschreibenden Kegelschnitte noch zu erfüllende Bedingung annehmen.

---

*) M. s. Thl. XXIX. S. 270. Nr. 40.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe verfährt man nun im Ganzen völlig wie im vorhergehenden Paragraphen, nur, weil die Charakteristik $n$ jetzt nicht gegeben ist, mit dem Unterschiede, dass man, nachdem man $p$ mittelst derselben Formeln wie vorher gefunden hat, $n$ mittelst der Formel 19), und hierauf $a$, $b$, $c$ mittelst der Formeln 17) oder 20) berechnet. Dann hat man alle Elemente, welche nöthig sind, um den Flächeninhalt des Sectors $S_{31}$ nach den aus der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte in der Ebene bekannten Formeln berechnen zu können, und kann nun untersuchen, in wie weit der obigen Gleichung 23) durch die berechneten Grössen genügt wird. Ueberhaupt aber wird man nun die Grösse $G_2$, welche die Grundlage der ganzen Rechnung bildet, so lange verändern müssen, bis sich diese Gleichung vollständig erfüllt zeigt. Auf diese Weise ist jetzt auch das allgemeine Planeten-Problem in der ihm vorher gegebenen, natürlich eigentlich immer nur näherungsweise richtigen Fassung, dem oben aufgestellten Princip für die Auflösung aller solchen Aufgaben völlig gemäss und entsprechend, vollständig gelöst.

Einen ersten Näherungswerth für $G_2$, von welchem man bei der Rechnung auszugehen hat, kann man sich durch verschiedene Berücksichtigungen verschaffen, wie dies hinreichend bekannt ist. Ich will in dieser Beziehung hier nur bemerken, dass mir dazu, wenn man noch über eine vierte Beobachtung disponiren kann, die Aufgabe in Thl. XVII. S. 165., welche ein besonderer Fall einer dort aufgelösten allgemeineren Aufgabe ist, und die ich in einem späteren Aufsatze noch abgesondert für sich zu behandeln hoffe, sehr zweckmässig zu sein scheint. Ich begnüge mich daher für jetzt, hier auf diese Aufgabe vorläufig zu verweisen.

Sollte die Aufgabe in der Fassung, in welcher sie hier behandelt worden ist, dass nämlich die drei Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ sämmtlich in einer Parabel, einer Ellipse oder demselben Zweige einer Hyperbel liegen sollen, sich als unmöglich erweisen, was u. A. immer dann der Fall sein würde, wenn die Formel 19) für $n^2$ einen negativen Werth liefern sollte; so würde man sich zur Beschreibung einer Hyperbel in solcher Weise zu wenden haben, dass der eine der drei Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ in dem einen, die beiden anderen Punkte in dem anderen Zweige dieser Hyperbel liegen. Dass ich aber nach den obigen Entwickelungen es nicht für nöthig halte, über diesen Fall mich noch weiter zu verbreiten, habe ich schon oben bemerkt.

---

## Drittes Kapitel.

### Von den Proximitäten der Bahnen der Planeten und Cometen.

§. 1.

Unter einer **Proximität** zweier Curven versteht man ein System zweier Punkte, von denen der eine in der einen, der andere in der anderen Curve liegt, deren Entfernung von einander ein Minimum ist. Aus bekannten geometrischen Gründen erhellet auf der Stelle, dass die beiden eine Proximität bildenden Punkte in den beiden Curven eine solche Lage haben müssen, dass die sie verbindende Gerade auf den beiden Curven senkrecht steht, oder dass diese Gerade die Durchschnittslinie der Normal-Ebenen der beiden Curven in den beiden in Rede stehenden Punkten ist. Die Entfernung der beiden, einer Proximität entsprechenden Punkte von einander heisst die **Grösse der Proximität**.

Die Gleichungen der einen der beiden gegebenen Curven wollen wir durch

1) . . . . . . $f_0(x, y, z)=0, \quad F_0(x, y, z)=0;$

die Gleichungen der anderen durch

2) . . . . . . $f_1(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0$

bezeichnen; und die einer Proximität entsprechenden Punkte der beiden Curven sollen respective durch $(x_0 y_0 z_0)$ und $(x_1 y_1 z_1)$ bezeichnet werden, wobei wir immer ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legen, und ein für alle Mal bemerken, dass alle mit dem unteren Index 0 versehenen Symbole sich auf die erste, alle mit dem unteren Index 1 versehenen Symbole sich auf die zweite Curve beziehen. Die Gleichungen der Normal-Ebenen der beiden Curven in den Punkten $(x_0 y_0 z_0)$ und $(x_1 y_1 z_1$ sind bekanntlich:

$$3) \;.\;.\; \begin{cases} (x-x_0)\partial x_0+(y-y_0)\partial y_0+(z-z_0)\partial z_0=0, \\ (x-x_1)\partial x_1+(y-y_1)\partial y_1+(z-z_1)\partial z_1=0; \end{cases}$$

wo sich von selbst versteht, dass zur Bestimmung von $\partial x_0$, $\partial y_0$, $\partial z_0$ die Gleichungen 1), zur Bestimmung von $\partial x_1$, $\partial y_1$, $\partial z_1$ die Gleichungen 2) dienen. Die Gleichungen der durch die beiden Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ und $(x_1 y_1 z_1)$ gehenden Geraden seien:

$$4) \quad \frac{x-x_0}{\cos\varphi_{01}} = \frac{y-y_0}{\cos\psi_{01}} = \frac{z-z_0}{\cos\chi_{01}}$$

oder

$$5) \quad \frac{x-x_1}{\cos\varphi_{01}} = \frac{y-y_1}{\cos\psi_{01}} = \frac{z-z_1}{\cos\chi_{01}};$$

und da, wenn das System der beiden Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ und $(x_1 y_1 z_1)$ eine Proximität sein soll, diese Gerade die Durchschnittslinie der beiden durch die Gleichungen 3) charakterisirten Normal-Ebenen sein, also in jeder dieser beiden Ebenen liegen muss, so haben wir nach 3) die beiden folgenden Gleichungen:

$$6) \quad \begin{cases} \cos\varphi_{01}.\partial x_0 + \cos\psi_{01}.\partial y_0 + \cos\chi_{01}.\partial z_0 = 0, \\ \cos\varphi_{01}.\partial x_1 + \cos\psi_{01}.\partial y_1 + \cos\chi_{01}.\partial z_1 = 0. \end{cases}$$

Also hat man zur Bestimmung der neun Grössen:

$$x_0,\ y_0,\ z_0;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad \varphi_{01},\ \psi_{01},\ \chi_{01}$$

die neun folgenden Gleichungen:

$$7) \quad \begin{cases} f_0(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_0(x_0, y_0, z_0) = 0; \\ f_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad F_1(x_1, y_1, z_1) = 0; \\ \dfrac{x_0-x_1}{\cos\varphi_{01}} = \dfrac{y_0-y_1}{\cos\psi_{01}} = \dfrac{z_0-z_1}{\cos\chi_{01}}; \\ \cos\varphi_{01}.\partial x_0 + \cos\psi_{01}.\partial y_0 + \cos\chi_{01}.\partial z_0 = 0, \\ \cos\varphi_{01}.\partial x_1 + \cos\psi_{01}.\partial y_1 + \cos\chi_{01}.\partial z_1 = 0; \\ \cos\varphi_{01}^2 + \cos\psi_{01}^2 + \cos\chi_{01}^2 = 1 \end{cases}$$

oder:

$$8) \quad \begin{cases} f_0(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_0(x_0, y_0, z_0) = 0; \\ f_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad F_1(x_1, y_1, z_1) = 0; \\ \dfrac{x_0-x_1}{\cos\varphi_{01}} = \dfrac{y_0-y_1}{\cos\psi_{01}} = \dfrac{z_0-z_1}{\cos\chi_{01}}; \\ \cos\varphi_{01} + \cos\psi_{01}.\dfrac{\partial y_0}{\partial x_0} + \cos\chi_{01}.\dfrac{\partial z_0}{\partial x_0} = 0, \\ \cos\varphi_{01} + \cos\psi_{01}.\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cos\chi_{01}.\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} = 0; \\ \cos\varphi_{01}^2 + \cos\psi_{01}^2 + \cos\chi_{01}^2 = 1. \end{cases}$$

Eliminirt man aber mittelst des Systems der fünften und sechsten Gleichung aus der siebenten und achten Gleichung die Grössen

$$\cos\varphi_{01}\,,\ \cos\psi_{01}\,,\ \cos\chi_{01}\,;$$

so erhält man zur Bestimmung der sechs Coordinaten:

$$x_0,\ y_0,\ z_0;\quad x_1,\ y_1,\ z_1$$

die sechs Gleichungen:

$$9)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} f_0(x_0, y_0, z_0)=0, \quad F_0(x_0, y_0, z_0)=0; \\ f_1(x_1, y_1, z_1)=0, \quad F_1(x_1, y_1, z_1)=0; \\ (x_0-x_1)\partial x_0+(y_0-y_1)\partial y_0+(z_0-z_1)\partial z_0=0, \\ (x_0-x_1)\partial x_1+(y_0-y_1)\partial y_1+(z_0-z_1)\partial z_1=0; \end{array}\right.$$

oder:

$$10) \left\{\begin{array}{l} f_0(x_0, y_0, z_0)=0, \quad F_0(x_0, y_0, z_0)=0; \\ f_1(x_1, y_1, z_1)=0, \quad F_1(x_1, y_1, z_1)=0; \\ x_0-x_1+(y_0-y_1)\dfrac{\partial y_0}{\partial x_0}+(z_0-z_1)\dfrac{\partial z_0}{\partial x_0}=0, \\ x_0-x_1+(y_0-y_1)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+(z_0-z_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1}=0. \end{array}\right.$$

Hat man mittelst dieser Gleichungen die in Rede stehenden Coordinaten bestimmt, so ergeben sich die Winkel $\varphi_{01}$, $\psi_{01}$, $\chi_{01}$ mittelst der Gleichungen:

$$11)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_0-x_1}{\cos\varphi_{01}}=\dfrac{y_0-y_1}{\cos\psi_{01}}=\dfrac{z_0-z_1}{\cos\chi_{01}}, \\ \cos\varphi_{01}{}^2+\cos\psi_{01}{}^2+\cos\chi_{01}{}^2=0; \end{array}\right.$$

und zur Bestimmung der Grösse der Proximität, welche wir durch $E_{01}$ bezeichnen wollen, hat man die Formel:

$$12)\ \ldots E_{01}=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2},$$

oder auch einen der drei folgenden, aus dem Vorhergehen sich unmittelbar ergebenden Ausdrücke:

13)

$$E_{01}=\text{val. abs.}\frac{x_0-x_1}{\cos\varphi_{01}}=\text{val. abs.}\frac{y_0-y_1}{\cos\psi_{01}}=\text{val. abs.}\frac{z_0-z_1}{\cos\chi_{01}},$$

welche besonders bequem sind, insofern man, ausser den Coordinaten der Punkte der Proximität, auch die Winkel $\varphi_{01}$, $\psi_{01}$, $\chi_{01}$ schon kennt.

§. 2.

Bevor wir die im vorhergehenden Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln auf die Bahnen der Planeten und Cometen, nämlich überhaupt auf zwei Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkte, anwenden, kehren wir nochmals zu den im ersten Kapitel über Kegelschnitte im Raume angestellten allgemeinen Betrachtungen zurück.

Nach Kap. I. 56) haben wir, wenn der Kürze wegen

$$14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad U=\frac{u}{a}, \quad \mathfrak{U}=\frac{x-u}{\cos\alpha}$$

gesetzt wird, die drei folgenden Gleichungen:

$$15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} x=aU+\cos\alpha.\mathfrak{U}, \\ y=bU+\cos\beta.\mathfrak{U}, \\ z=cU+\cos\gamma.\mathfrak{U}; \end{cases}$$

von denen übrigens die erste nur eine identische Gleichung ist. Aus diesen drei Gleichungen folgt durch Differentiation:

$$16) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \partial x=a\partial U+\cos\alpha.\partial\mathfrak{U}, \\ \partial y=b\partial U+\cos\beta.\partial\mathfrak{U}, \\ \partial z=c\partial U+\cos\gamma.\partial\mathfrak{U}; \end{cases}$$

und hieraus ergeben sich ferner durch einfache Elimination sogleich die folgenden Gleichungen:

$$17) \quad \begin{cases} \cos\beta.\partial x-\cos\alpha.\partial y=(a\cos\beta-b\cos\alpha)\partial U, \\ \cos\gamma.\partial y-\cos\beta.\partial z=(b\cos\gamma-c\cos\beta)\partial U, \\ \cos\alpha.\partial z-\cos\gamma.\partial x=(c\cos\alpha-a\cos\gamma)\partial U; \end{cases}$$

und:

$$18) \quad \ldots \quad \begin{cases} b\partial x-a\partial y=-(a\cos\beta-b\cos\alpha)\partial\mathfrak{U}, \\ c\partial y-b\partial z=-(b\cos\gamma-c\cos\beta)\partial\mathfrak{U}, \\ a\partial z-c\partial x=-(c\cos\alpha-a\cos\gamma)\partial\mathfrak{U}. \end{cases}$$

Nun ist aber nach Kap. I. 63):

$$\mathfrak{U}^2 = \tfrac{1}{4}p^2(1 - 2U - \frac{1-n^2}{n^2}U^2),$$

also, wenn man differentiirt:

$$\mathfrak{U}\partial\mathfrak{U} = -\tfrac{1}{4}p^2(1 + \frac{1-n^2}{n^2}U)\partial U,$$

und folglich nach 17) und 18):

$$\mathfrak{U}(b\partial x - a\partial y) = \tfrac{1}{4}p^2(1 + \frac{1-n^2}{n^2}U)(\cos\beta.\partial x - \cos\alpha.\partial y),$$

$$\mathfrak{U}(c\partial y - b\partial z) = \tfrac{1}{4}p^2(1 + \frac{1-n^2}{n^2}U)(\cos\gamma.\partial y - \cos\beta.\partial z),$$

$$\mathfrak{U}(a\partial z - c\partial x) = \tfrac{1}{4}p^2(1 + \frac{1-n^2}{n^2}U)(\cos\alpha.\partial z - \cos\gamma.\partial x);$$

oder:

$$\{b\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\beta\}\partial x = \{a\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\alpha\}\partial y,$$

$$\{c\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\gamma\}\partial y = \{b\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\beta\}\partial z,$$

$$\{a\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\alpha\}\partial z = \{c\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\gamma\}\partial x.$$

Bezeichnet also $G$ einen gewissen Factor, so kann offenbar:

$$19)\ \ldots \left\{\begin{aligned} \partial x &= G\{a\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\alpha\}, \\ \partial y &= G\{b\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\beta\}, \\ \partial z &= G\{c\mathfrak{U} - \tfrac{1}{4}p^2(1+\frac{1-n^2}{n^2}U)\cos\gamma\} \end{aligned}\right.$$

gesetzt werden.

## §. 3.

Wir wollen nun annehmen, dass die beiden Curven, deren Proximitäten bestimmt werden sollen, zwei Kegelschnitte mit einerlei Brennpunkt sind, für welche wir alle Elemente ganz eben so wie im ersten Kapitel bezeichnen, indem wir nur alle Symbole für den einen Kegelschnitt mit dem unteren Index 0, für den anderen Kegelschnitt mit dem unteren Index 1 versehen. Dann haben

wir nach Kap. I. 63) und nach 15) und 19) im vorhergehenden Paragraphen die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{U}_0{}^2 = \tfrac{1}{4}p_0{}^2(1-2U_0-\frac{1-n_0{}^2}{n_0{}^2}U_0{}^2),$$

$$\mathfrak{U}_1{}^2 = \tfrac{1}{4}p_1{}^2(1-2U_1-\frac{1-n_1{}^2}{n_1{}^2}U_1{}^2);$$

ferner:

$$x_0 = a_0U_0 + \cos\alpha_0 . \mathfrak{U}_0,$$

$$y_0 = b_0U_0 + \cos\beta_0 . \mathfrak{U}_0,$$

$$z_0 = c_0U_0 + \cos\gamma_0 . \mathfrak{U}_0;$$

$$\partial x_0 = G_0\{a_0\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0{}^2(1+\frac{1-n_0{}^2}{n_0{}^2}U_0)\cos\alpha_0\},$$

$$\partial y_0 = G_0\{b_0\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0{}^2(1+\frac{1-n_0{}^2}{n_0{}^2}U_0)\cos\beta_0\},$$

$$\partial z_0 = G_0\{c_0\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0{}^2(1+\frac{1-n_0{}^2}{n_0{}^2}U_0)\cos\gamma_0\};$$

und:

$$x_1 = a_1U_1 + \cos\alpha_1 . \mathfrak{U}_1,$$

$$y_1 = b_1U_1 + \cos\beta_1 . \mathfrak{U}_1,$$

$$z_1 = c_1U_1 + \cos\gamma_1 . \mathfrak{U}_1;$$

$$\partial x_1 = G_1\{a_1\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1{}^2(1+\frac{1-n_1{}^2}{n_1{}^2}U_1)\cos\alpha_1\},$$

$$\partial y_1 = G_1\{b_1\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1{}^2(1+\frac{1-n_1{}^2}{n_1{}^2}U_1)\cos\beta_1\},$$

$$\partial z_1 = G_1\{c_1\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1{}^2(1+\frac{1-n_1{}^2}{n_1{}^2}U_1)\cos\gamma_1\}.$$

Sollen nun aber die Punkte $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ einer Proximität der beiden Kegelschnitte entsprechen, so haben wir hiernach und nach 10) die folgenden Gleichungen:

20)

$$\mathfrak{U}_0{}^2 = \tfrac{1}{4}p_0{}^2(1-2U_0-\frac{1-n_0{}^2}{n_0{}^2}U_0{}^2),$$

$$\mathfrak{U}_1{}^2 = \tfrac{1}{4}p_1{}^2(1-2U_1-\frac{1-n_1{}^2}{n_1{}^2}U_1{}^2);$$

$$(a_0U_0-a_1U_1+\cos\alpha_0.\mathfrak{U}_0-\cos\alpha_1.\mathfrak{U}_1)\{a_0\mathfrak{U}_0-\tfrac{1}{4}p_0^2(1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)\cos\alpha_0\}$$

$$+(b_0U_0-b_1U_1+\cos\beta_0.\mathfrak{U}_0-\cos\beta_1.\mathfrak{U}_1)\{b_0\mathfrak{U}_0-\tfrac{1}{4}p_0^2(1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)\cos\beta_0\}$$

$$+(c_0U_0-c_1U_1+\cos\gamma_0.\mathfrak{U}_0-\cos\gamma_1.\mathfrak{U}_1)\{c_0\mathfrak{U}_0-\tfrac{1}{4}p_0^2(1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)\cos\gamma_0\}$$

$$=0,$$

$$(a_0U_0-a_1U_1+\cos\alpha_0.\mathfrak{U}_0-\cos\alpha_1.\mathfrak{U}_1)\{a_1\mathfrak{U}_1-\tfrac{1}{4}p_1^2(1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)\cos\alpha_1\}$$

$$+(b_0U_0-b_1U_1+\cos\beta_0.\mathfrak{U}_0-\cos\beta_1.\mathfrak{U}_1)\{b_1\mathfrak{U}_1-\tfrac{1}{4}p_1^2(1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)\cos\beta_1\}$$

$$+(c_0U_0-c_1U_1+\cos\gamma_0.\mathfrak{U}_0-\cos\gamma_1.\mathfrak{U}_1)\{c_1\mathfrak{U}_1-\tfrac{1}{4}p_1^2(1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)\cos\gamma_1\}$$

$$=0.$$

Aus diesen vier Gleichungen müssen die vier unbekannten Grössen

$$U_0,\ \mathfrak{U}_0;\ U_1,\ \mathfrak{U}_1$$

bestimmt werden, worauf man die Coordinaten der Punkte der Proximität mittelst der folgenden Formeln findet:

$$21)\quad \begin{cases} x_0=a_0U_0+\cos\alpha_0.\mathfrak{U}_0, & x_1=a_1U_1+\cos\alpha_1.\mathfrak{U}_1,\\ y_0=b_0U_0+\cos\beta_0.\mathfrak{U}_0, & y_1=b_1U_1+\cos\beta_1.\mathfrak{U}_1,\\ z_0=c_0U_0+\cos\gamma_0.\mathfrak{U}_0; & z_1=c_1U_1+\cos\gamma_1.\mathfrak{U}_1. \end{cases}$$

Die Grösse der Proximität erhält man mittelst der Formel:

$$22)\ .\ .\ .\ E_{01}=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2},$$

und dann die Winkel

$$\varphi_{01},\ \psi_{01},\ \chi_{01}$$

mittelst der Formeln:

23)

$$\cos\varphi_{01}=\pm\frac{x_0-x_1}{E_{01}},\quad \cos\psi_{01}=\pm\frac{y_0-y_1}{E_{01}},\quad \cos\chi_{01}=\pm\frac{z_0-z_1}{E_{01}};$$

die man leicht aus 11) ableitet.

Dies ist die vollständige Auflösung des Problems von den Proximitäten zweier Kegelschnitte, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

## §. 4.

Wir müssen nun aber vorzüglich die Gleichungen 20) so viel als möglich zu vereinfachen suchen. Zu dem Ende setzen wir der Kürze wegen:

$$X_0 = a_0\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2\left(1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0\right)\cos\alpha_0,$$

$$Y_0 = b_0\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2\left(1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0\right)\cos\beta_0,$$

$$Z_0 = c_0\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2\left(1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0\right)\cos\gamma_0$$

und

$$X_1 = a_1\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2\left(1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1\right)\cos\alpha_1,$$

$$Y_1 = b_1\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2\left(1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1\right)\cos\beta_1,$$

$$Z_1 = c_1\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2\left(1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1\right)\cos\gamma_1;$$

dann können wir die dritte und vierte der Gleichungen 20) auf folgende Art ausdrücken:

$$(a_0U_0+\cos\alpha_0.\mathfrak{U}_0)X_0+(b_0U_0+\cos\beta_0.\mathfrak{U}_0)Y_0+(c_0U_0+\cos\gamma_0.\mathfrak{U}_0)Z_0$$
$$=(a_1U_1+\cos\alpha_1.\mathfrak{U}_1)X_0+(b_1U_1+\cos\beta_1.\mathfrak{U}_1)Y_0+(c_1U_1+\cos\gamma_1.\mathfrak{U}_1)Z_0,$$

$$(a_0U_0+\cos\alpha_0.\mathfrak{U}_0)X_1+(b_0U_0+\cos\beta_0.\mathfrak{U}_0)Y_1+(c_0U_0+\cos\gamma_0.\mathfrak{U}_0)Z_1$$
$$=(a_1U_1+\cos\alpha_1.\mathfrak{U}_1)X_1+(b_1U_1+\cos\beta_1.\mathfrak{U}_1)Y_1+(c_1U_1+\cos\gamma_1.\mathfrak{U}_1)Z_1.$$

Weil nun aber nach Kap. I. 40)

$$a_0\cos\alpha_0+b_0\cos\beta_0+c_0\cos\gamma_0=0,$$

$$a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1=0$$

ist, so ist offenbar:

$$a_0X_0+b_0Y_0+c_0Z_0=(a_0^2+b_0^2+c_0^2)\mathfrak{U}_0=\frac{p_0^2}{4n_0^2}\mathfrak{U}_0,$$

$$a_1X_1+b_1Y_1+c_1Z_1=(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\mathfrak{U}_1=\frac{p_1^2}{4n_1^2}\mathfrak{U}_1$$

und

$$\cos\alpha_0 . X_0 + \cos\beta_0 . Y_0 + \cos\gamma_0 . Z_0 = -\tfrac{1}{4}p_0^2(1 + \frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0),$$

$$\cos\alpha_1 . X_1 + \cos\beta_1 . Y_1 + \cos\gamma_1 . Z_1 = -\tfrac{1}{4}p_1^2(1 + \frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1);$$

also, wie man leicht findet:

$$(a_0 U_0 + \cos\alpha_0 . \mathfrak{U}_0)X_0 + (b_0 U_0 + \cos\beta_0 . \mathfrak{U}_0)Y_0 + (c_0 U_0 + \cos\gamma_0 . \mathfrak{U}_0)Z_0$$
$$= (a_0 X_0 + b_0 Y_0 + c_0 Z_0)U_0 + (\cos\alpha_0 . X_0 + \cos\beta_0 . Y_0 + \cos\gamma_0 . Z_0)\mathfrak{U}_0$$
$$= -\tfrac{1}{4}p_0^2(1 - U_0)\mathfrak{U}_0,$$

$$(a_1 U_1 + \cos\alpha_1 . \mathfrak{U}_1)X_1 + (b_1 U_1 + \cos\beta_1 . \mathfrak{U}_1)Y_1 + (c_1 U_1 + \cos\gamma_1 . \mathfrak{U}_1)Z_1$$
$$= (a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1)U_1 + (\cos\alpha_1 . X_1 + \cos\beta_1 . Y_1 + \cos\gamma_1 . Z_1)\mathfrak{U}_1$$
$$= -\tfrac{1}{4}p_1^2(1 - U_1)\mathfrak{U}_1.$$

Ferner ist:

$$a_1 X_0 + b_1 Y_0 + c_1 Z_0 =$$
$$(a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2(1 + \frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)(a_1\cos\alpha_0 + b_1\cos\beta_0 + c_1\cos\gamma_0),$$

$$a_0 X_1 + b_0 Y_1 + c_0 Z_1 =$$
$$(a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2(1 + \frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)(a_0\cos\alpha_1 + b_0\cos\beta_1 + c_0\cos\gamma_1)$$

und, wenn wir

$$\cos\Theta_{01} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1$$

setzen:

$$\cos\alpha_1 . X_0 + \cos\beta_1 . Y_0 + \cos\gamma_1 . Z_0$$
$$= (a_0\cos\alpha_1 + b_0\cos\beta_1 + c_0\cos\gamma_1)\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2(1 + \frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)\cos\Theta_{01},$$

$$\cos\alpha_0 . X_1 + \cos\beta_0 . Y_1 + \cos\gamma_0 . Z_1$$
$$= (a_1\cos\alpha_0 + b_1\cos\beta_0 + c_1\cos\gamma_0)\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2(1 + \frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)\cos\Theta_{01};$$

oder, wenn der Kürze wegen noch

$$M_{01} = a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1$$

und

$$N_{01} = a_0 \cos\alpha_1 + b_0 \cos\beta_1 + c_0 \cos\gamma_1\,,$$

$$N_{10} = a_1 \cos\alpha_0 + b_1 \cos\beta_0 + c_1 \cos\gamma_0$$

gesetzt wird:

$$a_1 X_0 + b_1 Y_0 + c_1 Z_0$$

$$= M_{01}\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2(1 + \frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)N_{10}\,,$$

$$a_0 X_1 + b_0 Y_1 + c_0 Z_1$$

$$= M_{01}\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2(1 + \frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)N_{01}\,;$$

und:

$$\cos\alpha_1 . X_0 + \cos\beta_1 . Y_0 + \cos\gamma_1 . Z_0$$

$$= N_{01}\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2(1 + \frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)\cos\Theta_{01}\,,$$

$$\cos\alpha_0 . X_1 + \cos\beta_0 . Y_1 + \cos\gamma_0 . Z_1$$

$$= N_{10}\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2(1 + \frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)\cos\Theta_{01}\,;$$

und weil nun

$$(a_1 U_1 + \cos\alpha_1 . \mathfrak{U}_1) X_0 + (b_1 U_1 + \cos\beta_1 . \mathfrak{U}_1) Y_0 + (c_1 U_1 + \cos\gamma_1 . \mathfrak{U}_1) Z_0$$

$$= (a_1 X_0 + b_1 Y_0 + c_1 Z_0) U_1 + (\cos\alpha_1 . X_0 + \cos\beta_1 . Y_0 + \cos\gamma_1 . Z_0)\mathfrak{U}_1\,,$$

$$(a_0 U_0 + \cos\alpha_0 . \mathfrak{U}_0) X_1 + (b_0 U_0 + \cos\beta_0 . \mathfrak{U}_0) Y_1 + (c_0 U_0 + \cos\gamma_0 . \mathfrak{U}_0) Z_1$$

$$= (a_0 X_1 + b_0 Y_1 + c_0 Z_1) U_0 + (\cos\alpha_0 . X_1 + \cos\beta_0 . Y_1 + \cos\gamma_0 . Z_1)\mathfrak{U}_0$$

ist, so ist:

$$(a_1 U_1 + \cos\alpha_1 . \mathfrak{U}_1) X_0 + (b_1 U_1 + \cos\beta_1 . \mathfrak{U}_1) Y_0 + (c_1 U_1 + \cos\gamma_1 . \mathfrak{U}_1) Z_0$$

$$= \{M_{01}\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2(1 + \frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)N_{10}\}U_1$$

$$+ \{N_{01}\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2(1 + \frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0)\cos\Theta_{01}\}\mathfrak{U}_1\,,$$

$$(a_0 U_0 + \cos\alpha_0 . \mathfrak{U}_0) X_1 + (b_0 U_0 + \cos\beta_0 . \mathfrak{U}_0) Y_1 + (c_0 U_0 + \cos\gamma_0 . \mathfrak{U}_0) Z_1$$

$$= \{M_{01}\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2(1 + \frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)N_{01}\}U_0$$

$$+ \{N_{10}\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2(1 + \frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1)\cos\Theta_{01}\}\mathfrak{U}_0\,.$$

Führen wir jetzt alle gefundenen Ausdrücke in die obigen Gleichungen ein, so können wir die vier Gleichungen, mittelst welcher die vier unbekannten Grössen

$$U_0,\ \mathfrak{U}_0;\ U_1,\ \mathfrak{U}_1$$

bestimmt ergeben müssen, auf folgende Art darstellen:

24)

$$\cos\Theta_{01} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1\,;$$

$$M_{01} = a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1\,;$$

$$N_{01} = a_0\cos\alpha_1 + b_0\cos\beta_1 + c_0\cos\gamma_1\,,$$

$$N_{10} = a_1\cos\alpha_0 + b_1\cos\beta_0 + c_1\cos\gamma_0\,;$$

$$\mathfrak{U}_0^2 = \tfrac{1}{4}p_0^2\left(1-2U_0-\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0^2\right),$$

$$\mathfrak{U}_1^2 = \tfrac{1}{4}p_1^2\left(1-2U_1-\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1^2\right);$$

$$\left.\begin{array}{r}\tfrac{1}{4}p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0+\left\{M_{01}\mathfrak{U}_0-\tfrac{1}{4}p_0^2\left(1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0\right)N_{10}\right\}U_1\\ +\left\{N_{01}\mathfrak{U}_0-\tfrac{1}{4}p_0^2\left(1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0\right)\cos\Theta_{01}\right\}\mathfrak{U}_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\tfrac{1}{4}p_1^2(1-U_1)\mathfrak{U}_1+\left\{M_{01}\mathfrak{U}_1-\tfrac{1}{4}p_1^2\left(1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1\right)N_{01}\right\}U_0\\ +\left\{N_{01}\mathfrak{U}_1-\tfrac{1}{4}p_1^2\left(1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1\right)\cos\Theta_{01}\right\}\mathfrak{U}_0\end{array}\right\}=0.$$

## §. 5.

Wir wollen nun zunächst den Fall etwas weiter betrachten, wenn keine der beiden Charakteristiken $n_0$ und $n_1$ der Einheit gleich ist. In diesem Falle setze man:

$$25)\ \ldots\ U_0 = U_0' - \frac{n_0^2}{1-n_0^2},\quad U_1 = U_1' - \frac{n_1^2}{1-n_1^2};$$

so ist, wie man leicht findet:

$$1-2U_0-\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0^2 = \frac{1}{1-n_0^2}-\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0'^2,$$

$$1-2U_1-\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1^2=\frac{1}{1-n_1^2}-\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1'^2;$$

also nach 24):

$$26)\ \ldots\ \begin{cases}\mathfrak{U}_0^2=\frac{1}{4}p_0^2\left(\frac{1}{1-n_0^2}-\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0'^2\right),\\[2ex]\mathfrak{U}_1^2=\frac{1}{4}p_1^2\left(\frac{1}{1-n_1^2}-\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1'^2\right);\end{cases}$$

oder:

$$27)\ \ldots\ \begin{cases}\left(\dfrac{U_0'}{\frac{n_0}{1-n_0^2}}\right)^2+\left(\dfrac{\mathfrak{U}_0}{\frac{p_0}{2\sqrt{1-n_0^2}}}\right)^2=1,\\[3ex]\left(\dfrac{U_1'}{\frac{n_1}{1-n_1^2}}\right)^2+\left(\dfrac{\mathfrak{U}_1}{\frac{p_1}{2\sqrt{1-n_1^2}}}\right)^2=1.\end{cases}$$

Ferner ist, wie sich leicht ergiebt:

$$1+\frac{1-n_0^2}{n_0^2}U_0=\frac{1-n_0^2}{n_0^2}\cdot U_0',$$

$$1+\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1=\frac{1-n_1^2}{n_1^2}U_1';$$

und die Gleichungen 24) lassen sich also im vorliegenden Falle, wenn man noch einige abkürzende Bezeichnungen einführt, auf folgende Art darstellen:

28)

$$\cos\Theta_{01}=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1;$$

$$M_{01}=a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1;$$

$$N_{01}=a_0\cos\alpha_1+b_0\cos\beta_1+c_0\cos\gamma_1,$$

$$N_{10}=a_1\cos\alpha_0+b_1\cos\beta_0+c_1\cos\gamma_0;$$

$$K_0=\frac{(1-n_0^2)p_0^2}{4n_0^2}N_{10},$$

$$K_1=\frac{(1-n_1^2)p_1^2}{4n_1^2}N_{01};$$

$$\mathfrak{K}_0=\frac{(1-n_0^2)p_0^2}{4n_0^2}\cos\Theta_{01},$$

$$\mathfrak{K}_1=\frac{(1-n_1^2)p_1^2}{4n_1^2}\cos\Theta_{01};$$

$$U_0' - U_0 = \frac{n_0^2}{1-n_0^2}, \quad U_1' - U_1 = \frac{n_1^2}{1-n_1^2};$$

$$\left(\frac{U_0'}{\frac{n_0}{1-n_0^2}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{U}_0}{\frac{p_0}{2\sqrt{1-n_0^2}}}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{U_1'}{\frac{n_1}{1-n_1^2}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{U}_1}{\frac{p_1}{2\sqrt{1-n_1^2}}}\right)^2 = 1;$$

$$\tfrac{1}{4}p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0 + (M_{01}\mathfrak{U}_0 - K_0U_0')U_1 + (N_{01}\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{K}_0U_0')\mathfrak{U}_1 = 0,$$

$$\tfrac{1}{4}p_1^2(1-U_1)\mathfrak{U}_1 + (M_{01}\mathfrak{U}_1 - K_1U_1')U_0 + (N_{10}\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{K}_1U_1')\mathfrak{U}_0 = 0.$$

## §. 6.

In dem Falle, wenn die Charakteristiken $n_0$ und $n_1$ beide der Einheit gleich sind, nehmen die Gleichungen 24) die folgende Gestalt an:

29)

$$\cos\Theta_{01} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1;$$

$$M_{01} = a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1;$$

$$N_{01} = a_0\cos\alpha_1 + b_0\cos\beta_1 + c_0\cos\gamma_1,$$

$$N_{10} = a_1\cos\alpha_0 + b_1\cos\beta_0 + c_1\cos\gamma_0;$$

$$\mathfrak{U}_0^2 = \tfrac{1}{4}p_0^2(1-2U_0), \quad \mathfrak{U}_1^2 = \tfrac{1}{4}p_1^2(1-2U_1);$$

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{4}p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0 + (M_{01}\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2N_{10})U_1 \\ \qquad + (N_{01}\mathfrak{U}_0 - \tfrac{1}{4}p_0^2\cos\Theta_{01})\mathfrak{U}_1\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{4}p_1^2(1-U_1)\mathfrak{U}_1 + (M_{01}\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2N_{01})U_0 \\ \qquad + (N_{10}\mathfrak{U}_1 - \tfrac{1}{4}p_1^2\cos\Theta_{01})\mathfrak{U}_0\end{array}\right\} = 0.$$

Weil

$$U_0 = \tfrac{1}{2} - \frac{2\mathfrak{U}_0^2}{p_0^2}, \quad U_1 = \tfrac{1}{2} - \frac{2\mathfrak{U}_1^2}{p_1^2}$$

ist, so unterliegt es natürlich nicht der geringsten Schwierigkeit, die Grössen $U_0$ und $U_1$ aus den beiden letzten der vorstehenden Gleichungen ganz zu eliminiren und dadurch zwei Gleichungen zu gewinnen, welche bloss noch die beiden unbekannten Grössen $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$ enthalten, wodurch jedoch die Lösung des Problems nicht wesentlich gefördert wird, weshalb wir uns weiterer Entwickelungen in dieser Beziehung hier enthalten.

Wenn wir

$$\tfrac{1}{4}p_0(1-2U_0)=U_0', \quad \tfrac{1}{4}p_1(1-2U_1)=U_1';$$

also:

$$U_0=\tfrac{1}{2}-\frac{2}{p_0}U_0', \quad U_1=\tfrac{1}{2}-\frac{2}{p_1}U_1'$$

setzen, und noch einige abkürzende Bezeichnungen einführen, so können die obigen Gleichungen auch auf folgende Art dargestellt werden:

30)

$$\cos\Theta_{01}=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1;$$

$$M_{01}=a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1;$$

$$N_{01}=a_0\cos\alpha_1+b_0\cos\beta_1+c_0\cos\gamma_1,$$

$$N_{10}=a_1\cos\alpha_0+b_1\cos\beta_0+c_1\cos\gamma_0;$$

$$M_{01}'=\frac{4}{p_0^2}M_{01}, \quad M_{01}''=\frac{4}{p_1^2}M_{01};$$

$$N_{01}'=\frac{4}{p_0^2}N_{01}, \quad N_{10}'=\frac{4}{p_1^2}N_{10};$$

$$U_0=\tfrac{1}{2}-\frac{2}{p_0}U_0', \quad U_1=\tfrac{1}{2}-\frac{2}{p_1}U_1';$$

$$\mathfrak{U}_0^2=p_0U_0', \quad \mathfrak{U}_1^2=p_1U_1';$$

$$(1-U_0)\mathfrak{U}_0+(M_{01}'\mathfrak{U}_0-N_{10})U_1+(N_{01}'\mathfrak{U}_0-\cos\Theta_{01})\mathfrak{U}_1=0,$$

$$(1-U_1)\mathfrak{U}_1+(M_{01}''\mathfrak{U}_1-N_{01})U_0+(N_{10}'\mathfrak{U}_1-\cos\Theta_{01})\mathfrak{U}_0=0.$$

## §. 7.

Wenn die Charakteristik $n_0$ nicht, dagegen die Charakteristik $n_1$ der Einheit gleich ist, so hat man nach 28) und 30) offenbar die folgenden Gleichungen:

31)

$$\cos\Theta_{01}=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1;$$

$$M_{01}=a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1;$$

$$N_{01}=a_0\cos\alpha_1+b_0\cos\beta_1+c_0\cos\gamma_1,$$

$$N_{10}=a_1\cos\alpha_0+b_1\cos\beta_0+c_1\cos\gamma_0;$$

$$K_0 = \frac{(1-n_0^2)p_0^2}{4n_0^2} N_{10},$$

$$\mathfrak{K}_0 = \frac{(1-n_0^2)p_0^2}{4n_0^2} \cos\Theta_{01};$$

$$M_{01}'' = \frac{4}{p_1^2} M_{01}, \quad N_{10}' = \frac{4}{p_1^2} N_{10};$$

$$U_0' - U_0 = \frac{n_0^2}{1-n_0^2}, \quad U_1 = \tfrac{1}{2} - \frac{2}{p_1} U_1';$$

$$\left(\frac{U_0'}{\frac{n_0}{1-n_0^2}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{U}_0}{\frac{p_0}{2\sqrt{1-n_0^2}}}\right)^2 = 1, \quad \mathfrak{U}_1^2 = p_1 U_1';$$

$$\tfrac{1}{4} p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0 + (M_{01}\mathfrak{U}_0 - K_0 U_0')U_1 + (N_{01}\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{K}_0 U_0')\mathfrak{U}_1 = 0,$$

$$(1-U_1)\mathfrak{U}_1 + (M_{01}''\mathfrak{U}_1 - N_{01})U_0 + (N_{10}'\mathfrak{U}_1 - \cos\Theta_{01})\mathfrak{U}_0 = 0.$$

## §. 8.

Durch das Vorhergehende sind alle Fälle, die bei der Bestimmung der Proximitäten der Bahnen der Planeten und Cometen vorkommen können, erledigt; aber freilich erübrigt noch die Auflösung der im Obigen entwickelten Gleichungen selbst, welche jedoch bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis in vollständiger algebraischer Entwickelung sich nicht geben lässt, indem man bei dieser Auflösung immer auf Näherungen hingewiesen sein wird. Methoden dazu lassen sich in nicht geringer Anzahl angeben, was ich hier nicht weitläufig entwickeln will, weil es mir in dieser Abhandlung hauptsächlich und zunächst nur darauf ankam, die das Problem lösenden allgemeinen Gleichungen in einer so einfachen Form, wie es die Natur der Sache irgend gestattet, aufzustellen. Bemerken will ich jedoch, dass mir im vorliegenden Falle eine gemischte geometrisch-analytische Methode diejenige zu sein scheint, welcher man sich bei der Auflösung der obigen Gleichungen mit dem meisten Vortheil bedienen dürfte. Diese Methode will ich an dem Falle zweier Ellipsen erläutern, und glaube, dass dies hinreichend sein wird, um übersehen zu lassen, wie man sich in jedem anderen Falle zu verhalten hat.

In dem in Rede stehenden Falle zweier Ellipsen, wo also die Charakteristiken $n_0$ und $n_1$ beide kleiner als die Einheit sind, berechne man zuvörderst nach den in 28) gegebenen Formeln die Grössen

$$\cos\Theta_{01},\ M_{01},\ N_{01},\ N_{10},\ K_0,\ K_1,\ \mathfrak{K}_0,\ \mathfrak{K}_1,$$

welche als Constanten der ganzen ferneren Rechnung zur Grundlage dienen.

Auf einem mit starkem Zeichnenpapier überzogenen Reissbrett nehme man nun zwei sich rechtwinklig schneidende gerade Linien, deren Durchschnittspunkt wir durch $O$ bezeichnen wollen, an, und lege dieselben als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{U}$, der ganzen ferneren Construction aber einen bestimmten, hinreichende Genauigkeit gewährenden Maassstab zu Grunde, nach welchem letzteren alle betreffenden Längen aufgetragen werden.

Hierauf construire man zwei Punkte $O_0$, und $O_1$, deren Coordinaten in dem angenommenen Systeme respective

$$-\frac{n_0^2}{1-n_0^2},\ 0 \quad \text{und} \quad -\frac{n_1^2}{1-n_1^2},\ 0$$

sind. Diese beiden Punkte nehme man als Anfangspunkte zweier neuen, dem primitiven Systeme der $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{U}$ parallelen Coordinatensysteme der $\mathfrak{u}_0'$, $\mathfrak{U}_0'$ und $\mathfrak{u}_1'$, $\mathfrak{U}_1'$ an; und construire aus den Mittelpunkten $O_0$ und $O_1$ zwei Ellipsen, deren Gleichungen in den beiden letzteren Systemen respective

$$(1)\ \ldots \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\mathfrak{u}_0'}{\frac{n_0}{1-n_0^2}}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{U}_0'}{\frac{p_0}{2\sqrt{1-n_0^2}}}\right)^2=1 \\ &\text{und} \\ &\left(\frac{\mathfrak{u}_1'}{\frac{n_1}{1-n_1^2}}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{U}_1'}{\frac{p_1}{2\sqrt{1-n_1^2}}}\right)^2=1 \end{aligned} \right.$$

sind *), welche wir im Folgenden die erste und die zweite Ellipse nennen wollen. Bezeichnen wir die Halbaxen dieser beiden Ellipsen respective durch $\mu_0$, $\nu_0$ und $\mu_1$, $\nu_1$; so ist:

$$(2)\ \ldots \left\{ \begin{aligned} &\mu_0=\frac{n_0}{1-n_0^2},\quad \nu_0=\frac{p_0}{2\sqrt{1-n_0^2}}; \\ &\mu_1=\frac{n_1}{1-n_1^2},\quad \nu_1=\frac{p_1}{2\sqrt{1-n_1^2}}; \end{aligned} \right.$$

---

*) Die Formeln sind in diesem Paragraphen durch besondere, in zwei Klammern eingeschlossene Nummern bezeichnet.

oder:

(3)

$$\mu_0 = \frac{n_0}{(1-n_0)(1+n_0)}, \quad \nu_0 = \frac{p_0}{2\sqrt{(1-n_0)(1+n_0)}} = \frac{p_0}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{n_0}},$$

$$\mu_1 = \frac{n_1}{(1-n_1)(1+n_1)}, \quad \nu_1 = \frac{p_1}{2\sqrt{(1-n_1)(1+n_1)}} = \frac{p_1}{2}\sqrt{\frac{\mu_1}{n_1}}.$$

Bezeichnet ferner $\varepsilon_0$ die Excentricität der ersten Ellipse, so ist.

$$(4) \quad . \; . \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\pm(\mu_0^2 - \nu_0^2)} = \sqrt{\pm(\mu_0 - \nu_0)(\mu_0 + \nu_0)},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\mu_0 > \nu_0$ oder $\mu_0 < \nu_0$ ist; im ersten Falle ist $2\mu_0$, im zweiten Falle ist $2\nu_0$ die Hauptaxe, und man wird also jetzt immer die Brennpunkte der ersten Ellipse leicht construiren können. Bezeichnet eben so $\varepsilon_1$ die Excentricität der zweiten Ellipse, so ist:

$$(5) \quad . \; . \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\pm(\mu_1^2 - \nu_1^2)} = \sqrt{\pm(\mu_1 - \nu_1)(\mu_1 + \nu_1)},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\mu_1 > \nu_1$ oder $\mu_1 < \nu_1$ ist; im ersten Falle ist $2\mu_1$, im zweiten Falle ist $2\nu_1$ die Hauptaxe, und man wird also auch die Brennpunkte der zweiten Ellipse leicht construiren können. Diese Elemente reichen hin, um die beiden Ellipsen selbst zu entwerfen, wozu man bekanntlich verschiedene, eine hinreichende Genauigkeit gewährende Methoden besitzt.

Nun nehme man in der ersten Ellipse einen beliebigen Punkt an*), und messe dessen Coordinaten in dem Systeme der $u_0'$, $\mathfrak{u}_0'$, welche wir durch $U_0'$, $\mathfrak{U}_0'$ bezeichnen wollen. Bezeichnen wir nun die Coordinaten dieses Punktes in dem Systeme der $u$, $\mathfrak{u}$ durch $U_0$, $\mathfrak{U}_0$; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad U_0 = -\frac{n_0^2}{1-n_0^2} + U_0', \quad \mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_0';$$

also:

$$(I) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad U_0' - U_0 = \frac{n_0^2}{1-n_0^2};$$

und $U_0'$, $\mathfrak{U}_0$ genügen offenbar der Gleichung:

---

*) Natürlich kann man seinen Auslauf auch von der zweiten Ellipse aus nehmen.

$$(\text{II}) \ldots \quad \left(\frac{U_0'}{\frac{n_0}{1-n_0^2}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{U}_0}{\frac{p_0}{2\sqrt{1-n_0^2}}}\right)^2 = 1.$$

Jetzt berechne man, wozu im Vorhergehenden alle erforderlichen Formeln gegeben sind, die Grössen:

$$\tfrac{1}{4}p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0, \quad M_{01}\mathfrak{U}_0 - K_0 U_0', \quad N_{01}\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{K}_0 U_0'$$

und construire die Gerade, deren Gleichung im Systeme der u, $\mathfrak{u}$ die folgende ist:

$$(7)$$

$$\tfrac{1}{4}p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0 + (M_{01}\mathfrak{U}_0 - K_0 U_0')u + (N_{01}\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{K}_0 U_0')\mathfrak{u} = 0;$$

wozu man die mit ihren gehörigen Vorzeichen genommenen Entfernungen der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den Axen der u und $\mathfrak{u}$ von dem Anfangspunkte dieser Coordinaten kennen muss, welche mittelst der beiden Formeln:

$$-\frac{p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0}{4(M_{01}\mathfrak{U}_0 - K_0 U_0')} \quad \text{und} \quad -\frac{p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0}{4(N_{01}\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{K}_0 U_0')}$$

leicht berechnet werden können.

Hierauf ermittele man, ob von dieser Geraden die zweite Ellipse getroffen wird, und unterwerfe jeden der Punkte, in denen dies geschieht, der folgenden Untersuchung. Die Coordinaten dieses Punktes in dem Systeme der $u_1'$, $\mathfrak{u}_1'$ seien $U_1'$, $\mathfrak{U}_1'$, welche gemessen werden. Sind dann ferner $U_1$, $\mathfrak{U}_1$ die Coordinaten dieses Punktes in dem Systeme der u, $\mathfrak{u}$; so ist:

$$(8) \ldots \quad U_1 = -\frac{n_1^2}{1-n_1^2} + U_1', \quad \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_1';$$

also:

$$(\text{III}) \ldots \quad U_1' - U_1 = \frac{n_1^2}{1-n_1^2},$$

und wir haben offenbar die folgenden Gleichungen:

$$(\text{IV})$$

$$\tfrac{1}{4}p_0^2(1-U_0)\mathfrak{U}_0 + (M_{01}\mathfrak{U}_0 - K_0 U_0')U_1 + (N_{01}\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{K}_0 U_0')\mathfrak{U}_1 = 0$$

und:

$$(\text{V}) \ldots \quad \left(\frac{U_1'}{\frac{n_1^2}{1-n_1^2}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{U}_1}{\frac{p_1}{2\sqrt{1-n_1^2}}}\right)^2 = 1,$$

so dass also jetzt die sechs Grössen

$$U_0,\ \mathfrak{U}_0,\ U_1,\ \mathfrak{U}_1,\ U_0',\ U_1'$$

den fünf Gleichungen (I), (II), (III), (IV), (V) vollständig genügen.

Nun berechne man, wozu im Vorhergehenden wiederum alle erforderlichen Formeln gegeben sind, die Grössen

$$\tfrac{1}{4}p_1^2(1-U_1)\mathfrak{U}_1,\quad M_{01}\mathfrak{U}_1-K_1U_1',\quad N_{10}\mathfrak{U}_1-\mathfrak{K}_1U_1'$$

und construire die Gerade, deren Gleichung im Systeme der u, $\mathfrak{u}$ die folgende ist:

(9)

$$\tfrac{1}{4}p_1^2(1-U_1)\mathfrak{U}_1+(M_{01}\mathfrak{U}_1-K_1U_1')u+(N_{10}\mathfrak{U}_1-\mathfrak{K}_1U_1')\mathfrak{u}=0,$$

wozu man die mit ihren gehörigen Vorzeichen genommenen Entfernungen der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den Axen der u und $\mathfrak{u}$ von dem Anfangspunkte dieser Coordinaten kennen muss, welche mittelst der beiden Formeln

$$-\frac{p_1^2(1-U_1)\mathfrak{U}_1}{4(M_{01}\mathfrak{U}_1-K_1U_1')}\quad\text{und}\quad-\frac{p_1^2(1-U_1)\mathfrak{U}_1}{4(N_{10}\mathfrak{U}_1-K_1U_1')}$$

leicht berechnet werden können, und ermittele, ob diese Gerade wenigstens nahe durch den Punkt der ersten Ellipse geht, von dem wir ausgingen, und dessen Coordinaten in dem Systeme der u, $\mathfrak{u}$ nach dem Obigen $U_0$, $\mathfrak{U}_0$ waren; dann wird wenigstens näherungsweise die Gleichung:

(VI)

$$\tfrac{1}{4}p_1^2(1-U_1)\mathfrak{U}_1+(M_{01}\mathfrak{U}_1-K_1U_1')U_0+(N_{10}\mathfrak{U}_1-K_1U_1')\mathfrak{U}_0=0$$

Statt finden, und die sechs Grössen

$$U_0,\ \mathfrak{U}_0,\ U_1,\ \mathfrak{U}_1,\ U_0',\ U_1'$$

werden also wenigstens näherungsweise den sechs Gleichungen (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) genügen, also durch diese sechs Grössen nach 28) offenbar eine näherungsweise richtige Lösung unserer Aufgabe gefunden sein.

Nimmt man jetzt auf dem ganzen Umfange der ersten Ellipse möglichst in gleichen Intervallen eine Reihe von Punkten an, und unterwirft jeden der vorhergehenden Untersuchung, wobei natürlich die oben angegebenen constanten Grössen nur einmal berechnet zu werden brauchen; so muss man nothwendig wenigstens annährend alle möglichen Auflösungen der Aufgabe entdecken,

da man es ja in seiner Gewalt hat, die in Rede stehenden Punkte in beliebig kleinen Intervallen auf dem Umfange der ersten Ellipse anzunehmen. Hat man aber nur erst Näherungswerthe der gesuchten Grössen auf dem vorher beschriebenen Wege ermittelt, so besitzt man bekanntlich Methoden genug, dieselben weiter zu verbessern und zu den genauen Auflösungen zu gelangen, wozu natürlich hier eine besondere Anleitung nicht gegeben zu werden braucht, da sich ein Jeder die betreffenden Formeln leicht selbst zu entwickeln im Stande sein wird.

Wir haben zwar bloss den Fall zweier Ellipsen betrachtet; in allen anderen Fällen bleibt aber die Auflösung im Wesentlichen ganz dieselbe. Wenn freilich keiner der beiden in der Ebene des Reissbretts zu beschreibenden Kegelschnitte eine Ellipse ist, von der man seinen Auslauf nehmen kann, so wird die Auflösung weitläufiger, wovon der Grund leicht ersichtlich ist, weil nämlich die Ellipse eine geschlossene, auf einen bestimmten endlichen Raum beschränkte Curve ist, wogegen die Parabel und Hyperbel sich in's Unendliche erstrecken, also auch die Anzahl der in dem einen der beiden zu beschreibenden Kegelschnitte anzunehmenden Punkte in's Unendliche verlaufen kann. Für astronomische Zwecke sind aber die folgenden Fälle die wichtigsten:

1. Wenn die beiden gegebenen Kegelschnitte Ellipsen sind, was der Fall der Planeten und der Cometen mit elliptischen Bahnen ist.

2. Wenn der eine der beiden gegebenen Kegelschnitte eine Ellipse, der andere eine Parabel ist, welcher Fall einem Planeten oder Cometen mit elliptischer Bahn, und einem Cometen mit parabolischer Bahn entspricht.

3. Wenn die beiden gegebenen Kegelschnitte Parabeln sind, was der Fall zweier Cometen mit parabolischen Bahnen ist.

In den beiden ersten Fällen kann man immer von einer Ellipse ausgehen. Im dritten Falle tritt freilich der vorher erwähnte üble Umstand ein, der aber in diesem Falle nie zu umgehen sein wird, wobei man indess zu bedenken hat, dass ja bei den Cometen die Annahme einer parabolischen Bahn nur auf einer näherungsweise richtigen Voraussetzung beruhet, die nur für den in der Nähe der Sonne liegenden Theil der Bahn zulässig und verstattet ist, so dass also auch nur die Betrachtung dieser Theile solcher Bahnen in astronomischer Rücksicht von Interesse sein kann, wodurch die Anzahl der in dem einen der beiden zu beschreibenden Kegelschnitte anzunehmenden Punkte eine sehr wesentliche Beschränkung erleidet.

§. 9.

Ohne weitere Beziehung auf die Proximitäten wollen wir uns zwei beliebige Punkte $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ in den beiden vorher betrachteten Kegelschnitten denken, und deren Entfernung von einander durch $E_{01}$ bezeichnen, so ist:

$$E_{01}{}^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2,$$

also:

$$E_{01}{}^2 = R_0{}^2 + R_1{}^2 - 2(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1).$$

Nun ist aber nach Kap. I. 80):

$$R_0{}^2 = \frac{p_0{}^2}{4}(1 - \frac{u_0}{a_0})^2, \quad R_1{}^2 = \frac{p_1{}^2}{4}(1 - \frac{u_1}{a_1})^2;$$

und nach Kap. I. 56):

$$32) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} x_0 = a_0\dfrac{u_0}{a_0} + \dfrac{x_0 - u_0}{\cos\alpha_0}\cos\alpha_0, \\[2ex] y_0 = b_0\dfrac{u_0}{a_0} + \dfrac{x_0 - u_0}{\cos\alpha_0}\cos\beta_0, \\[2ex] z_0 = c_0\dfrac{u_0}{a_0} + \dfrac{x_0 - u_0}{\cos\alpha_0}\cos\gamma_0 \end{cases}$$

und

$$33) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} x_1 = a_1\dfrac{u_1}{a_1} + \dfrac{x_1 - u_1}{\cos\alpha_1}\cos\alpha_1, \\[2ex] y_1 = b_1\dfrac{u_1}{a_1} + \dfrac{x_1 - u_1}{\cos\alpha_1}\cos\beta_1, \\[2ex] z_1 = c_1\dfrac{u_1}{a_1} + \dfrac{x_1 - u_1}{\cos\alpha_1}\cos\gamma_1; \end{cases}$$

also:

$$\begin{aligned} & x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 \\ = \; & (a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)\frac{u_0}{a_0}\cdot\frac{u_1}{a_1} \\ & + (a_0\cos\alpha_1 + b_0\cos\beta_1 + c_0\cos\gamma_1)\frac{u_0}{a_0}\cdot\frac{x_1 - u_1}{\cos\alpha_1} \\ & + (a_1\cos\alpha_0 + b_1\cos\beta_0 + c_1\cos\gamma_0)\frac{u_1}{a_1}\cdot\frac{x_0 - u_0}{\cos\alpha_0} \\ & + (\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1)\frac{x_0 - u_0}{\cos\alpha_0}\cdot\frac{x_1 - u_1}{\cos\alpha_1}, \end{aligned}$$

folglich:

34)

$$E_{01}{}^2 = \frac{p_0{}^2}{4}(1-\frac{u_0}{a_0})^2 + \frac{p_1{}^2}{4}(1-\frac{u_1}{a_1})^2$$

$$-2(a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\frac{u_0}{a_0}\cdot\frac{u_1}{a_1}$$

$$-2(a_0 \cos\alpha_1 + b_0\cos\beta_1 + c_0\cos\gamma_1)\frac{u_0}{a_0}\cdot\frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1}$$

$$-2(a_1\cos\alpha_0 + b_1\cos\beta_0 + c_1\cos\gamma_0)\frac{u_1}{a_1}\cdot\frac{x_0-u_0}{\cos\alpha_0}$$

$$-2(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1)\frac{x_0-u_0}{\cos\alpha_0}\cdot\frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1}.$$

Hierzu hat man nach Kap. I. 63) noch die folgenden Gleichungen:

$$35)\ldots\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{x_0-u_0}{\cos\alpha_0}\right)^2 = \frac{p_0{}^2}{4}\{(1-\frac{u_0}{a_0})^2 - \frac{1}{n_0{}^2}\cdot\left(\frac{u_0}{a_0}\right)^2\},\\ \left(\frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1}\right)^2 = \frac{p_1{}^2}{4}\{(1-\frac{u_1}{a_1})^2 - \frac{1}{n_1{}^2}\cdot\left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2\}.\end{array}\right.$$

Von diesen Formeln kann man die folgende für die Astronomie wichtige Anwendung machen: Wenn in einem der beiden Kegelschnitte, etwa in dem ersten, ein Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ gegeben ist; so kann man verlangen, in dem anderen Kegelschnitte diejenigen Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ anzugeben, welche eine bestimmte gegebene Entfernung $E_{01}$ von dem gegebenen Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ haben. Diese Aufgabe lässt sich mittelst der obigen Formeln auf folgende Art auflösen.

Setzen wir der Kürze wegen:

36)

$$A = E_{01}{}^2 - \frac{p_0{}^2}{4}(1-\frac{u_0}{a_0})^2,$$

$$B = (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\frac{u_0}{a_0} + (a_1\cos\alpha_0 + b_1\cos\beta_0 + c_1\cos\gamma_0)\frac{x_0-u_0}{\cos\alpha_0},$$

$$C = (a_0\cos\alpha_1 + b_0\cos\beta_1 + c_0\cos\gamma_1)\frac{u_0}{a_0}$$

$$+ (\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1)\frac{x_0-u_0}{\cos\alpha_0};$$

so haben wir nach 34) und 35) zur Bestimmung der beiden Grössen

$$\frac{u_1}{a_1} \quad \text{und} \quad \frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1}$$

die zwei folgenden Gleichungen:

37)

$$A=\frac{p_1^2}{4}(1-\frac{u_1}{a_1})^2-2B\frac{u_1}{a_1}-2C\frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1},$$

$$\left(\frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1}\right)^2=\frac{p_1^2}{4}\{(1-\frac{u_1}{a_1})^2-\frac{1}{n_1^2}\cdot\left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2\}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse $\frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1}$, so erhält man die Gleichung:

38)

$$\{A+2B\frac{u_1}{a_1}-\frac{p_1^2}{4}(1-\frac{u_1}{a_1})^2\}^2=p_1^2C^2\{(1-\frac{u_1}{a_1})^2-\frac{1}{n_1^2}\cdot\left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2\}$$

oder, wenn man

$$\frac{u_1}{a_1}=1-(1-\frac{u_1}{a_1})$$

setzt, die Gleichung:

$$39) \ldots \{A+2B-2B(1-\frac{u_1}{a_1})-\frac{p_1^2}{4}(1-\frac{u_1}{a_1})^2\}^2$$

$$=-p_1^2C^2\{\frac{1}{n_1^2}-\frac{2}{n_1^2}(1-\frac{u_1}{a_1})-(1-\frac{1}{n_1^2})(1-\frac{u_1}{a_1})^2\}.$$

mittelst welcher die Grösse $1-\frac{u_1}{a_1}$ bestimmt werden muss, wodurch dann auch $\frac{u_1}{a_1}$ gefunden ist; die Grösse $\frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1}$ ergiebt sich aber ferner sogleich mittelst der Formel:

$$40) \ldots \frac{x_1-u_1}{\cos\alpha_1}=\frac{1}{2C}\left\{\frac{p_1^2}{4}(1-\frac{u_1}{a_1})^2-2B\frac{u_1}{a_1}-A\right\},$$

und die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ erhält man mittelst der Formeln 33).

Die Gleichung 39) ist vom vierten Grade, und kann leicht auf die gewöhnliche algebraische Form gebracht werden. Bemerken will ich nur, dass man Gleichungen von der allgemeinen Form

$$(a+bx+cx^2)^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2,$$

unter welcher die in Rede stehende Gleichung enthalten ist, durch eine einfache Substitution sogleich so umformen kann, dass, wenn man die Gleichung entwickelt, in ihr das zweite Glied fehlt. Setzt man nämlich

$$x=y-\frac{b}{2c},$$

so wird die Gleichung:

$$(a-\frac{b^2}{4c}+cy^2)^2=\alpha-\beta\frac{b}{2c}+\gamma\left(\frac{b}{2c}\right)^2+(\beta-\gamma\frac{b}{c})y+\gamma y^2,$$

welche Gleichung, gehörig entwickelt, offenbar auf eine, die dritte Potenz von $y$ nicht enthaltende Gleichung des vierten Grades führt.

Eine nicht unwichtige Anwendung findet die hier aufgelöste Aufgabe in der Astronomie, wenn in der gegebenen Bahn eines Weltkörpers ein Punkt gegeben ist, und in der gegebenen Bahn eines anderen Weltkörpers diejenigen Punkte aufgesucht werden sollen, welche von dem ersteren Punkte eine bestimmte gegebene Entfernung haben.

---

## Schlussbemerkung.

Für die Anwendung in der Astronomie würde es nun noch nöthig sein, alle im Obigen zur Anwendung gekommenen Grössen durch die gewöhnlichen Elemente der Bahnen der Planeten und Cometen auszudrücken; um jedoch dieser Abhandlung nicht eine zu grosse Ausdehnung zu geben, beschränke ich mich in dieser Rücksicht auf die folgenden Bemerkungen.

Wir nehmen die Sonne als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x'y'z'$, die Ebene der Ekliptik als die Ebene der $x'y'$ an; der positive Theil der Axe der $x'$ sei nach dem aufsteigenden Knoten der Bahn hin gerichtet, und der positive Theil der Axe der $y'$ werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $x'$ durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y'$ zu gelangen, in demselben Sinne bewegen muss, in welchem die Längen von 0 bis 360° gezählt werden; der positive Theile der Axe der $z'$ sei nach dem Nordpole der Ekliptik hin gerichtet. Die Coordinaten des Punktes $(abc)$ in diesem Systeme bezeichnen

wir durch $a'$, $b'$, $c'$. Als Anfang der $xyz$ nehmen wir wieder die Sonne, als Ebene der $xy$ die Ebene der Ekliptik an; der positive Theil der Axe der $x$ sei nach dem Anfangspunkte, der positive Theil der Axe der $y$ nach dem neunzigsten Grade der Längen gerichtet, und der positive Theil der Axe der $z$ gehe nach dem Nordpole der Ekliptik. Auf dieses System beziehen sich die Coordinaten $a$, $b$, $c$ des Punktes $(abc)$.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von der Sonne nach dem Perihelium gezogene Gerade mit den positiven Theilen der Axen der $x'$, $y'$, $z'$ einschliesst, respective durch $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$; so ist offenbar:

$$a' = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\cos\lambda',$$

$$b' = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\cos\mu',$$

$$c' = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\cos\nu';$$

also:

$$1) \;.\;.\;.\; a' = \frac{p}{2n}\cos\lambda', \quad b' = \frac{p}{2n}\cos\mu', \quad c' = \frac{p}{2n}\cos\nu'.$$

Bezeichnet $P$ die im Sinne der Längen von 0 bis 360° gezählte Entfernung des Periheliums vom aufsteigenden Knoten, und $J$ den 90° nicht übersteigenden, jenachdem das Perihelium auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der $x'y'$ liegt, als positiv oder negativ betrachteten Neigungswinkel der von der Sonne nach dem Perihelium gezogenen Geraden gegen die Ebene der $x'y'$; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$2) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \begin{cases} \cos\lambda' = \cos P\cos J, \\ \cos\mu' = \sin P\cos J, \\ \cos\nu' = \sin J; \end{cases}$$

also nach 1):

$$3) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \begin{cases} a' = \dfrac{p}{2n}\cos P\cos J, \\ b' = \dfrac{p}{2n}\sin P\cos J, \\ c' = \dfrac{p}{2n}\sin J. \end{cases}$$

Bezeichnet $\Omega$ die Länge des aufsteigenden Knotens, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$4) \ldots\ldots \begin{cases} x = x'\cos\Omega - y'\sin\Omega, \\ y = x'\sin\Omega + y'\cos\Omega, \\ z = z'; \end{cases}$$

woraus leicht:

$$5) \ldots\ldots \begin{cases} x' = \phantom{-}x\cos\Omega + y\sin\Omega, \\ y' = -x\sin\Omega + y\cos\Omega, \\ z' = \phantom{-}z \end{cases}$$

folgt. Nach 4) ist also:

$$6) \ldots\ldots \begin{cases} a = a'\cos\Omega - b'\sin\Omega, \\ b = a'\sin\Omega + b'\cos\Omega, \\ c = c'; \end{cases}$$

und folglich nach 3):

$$7) \ldots\ldots \begin{cases} a = \frac{p}{2n}\cos(P+\Omega)\cos J, \\ b = \frac{p}{2n}\sin(P+\Omega)\cos J, \\ c = \frac{p}{2n}\sin J. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Neigung der Bahn, worunter wir den 180° nicht übersteigenden Winkel verstehen, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der $x'y'$ liegende Theil der Ebene der Bahn mit dem der beiden Theile der Ebene der $x'y'$ einschliesst, in welche dieselbe durch die Axe der $x'$ getheilt wird und in welchem der positive Theil der Axe der $y'$ liegt, durch $i$; so ist im Systeme der $x'y'$ die Gleichung der Ebene der Bahn offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$8) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z' = y'\operatorname{tang} i,$$

also auch:

$$c' = b'\operatorname{tang} i,$$

und folglich nach 3):

$$9) \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tang} J = \sin P \operatorname{tang} i,$$

woraus, weil $\cos J$ immer positiv ist, sogleich:

$$10) \ldots\ldots \begin{cases} \cos J = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i^2 \sin P^2}}, \\ \sin J = \dfrac{\operatorname{tang} i \sin P}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i^2 \sin P^2}}; \end{cases}$$

und daher nach 7):

$$11) \ldots\ldots \begin{cases} a = \dfrac{p}{2n} \cdot \dfrac{\cos(P+\Omega)}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i^2 \sin P^2}}, \\ b = \dfrac{p}{2n} \cdot \dfrac{\sin(P+\Omega)}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i^2 \sin P^2}}, \\ c = \dfrac{p}{2n} \cdot \dfrac{\operatorname{tang} i \sin P}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i^2 \sin P^2}} \end{cases}$$

folgt.

Bezeichnen wir die Länge des Periheliums durch $L$, so ist offenbar:

$$\left.\begin{array}{l} P+\Omega = L \\ P = L-\Omega \\ \Omega = L-P \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} P+\Omega = L+360^0 \\ P = L-\Omega+360^0 \\ \Omega = L-P+360^0 \end{array}\right.$$

also in völliger Allgemeinheit:

$$12) \ldots \begin{cases} \cos L = \cos(P+\Omega), \quad \sin L = \sin(P+\Omega); \\ \cos P = \cos(L-\Omega), \quad \sin P = \sin(L-\Omega); \\ \cos\Omega = \cos(L-P), \quad \sin\Omega = \sin(L-P); \end{cases}$$

und daher nach 11) auch:

$$13) \ldots\ldots \begin{cases} a = \dfrac{p}{2n} \cdot \dfrac{\cos L}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i^2 \sin P^2}}, \\ b = \dfrac{p}{2n} \cdot \dfrac{\sin L}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i^2 \sin P^2}}, \\ c = \dfrac{p}{2n} \cdot \dfrac{\operatorname{tang} i \sin P}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i^2 \sin P^2}}. \end{cases}$$

Nach 8) und 5) ist:

$$z = -(x \sin\Omega - y \cos\Omega) \operatorname{tang} i$$

die Gleichung der Ebene der Bahn im Systeme der $xyz$, und folglich auch:

$$c = -(a \sin \Omega - b \cos \Omega) \operatorname{tang} i;$$

also durch Subtraction:

$$z - c = -\{(x-a) \sin \Omega - (y-b) \cos \Omega\} \operatorname{tang} i$$

oder

$$(x-a) \operatorname{tang} i \sin \Omega - (y-b) \operatorname{tang} i \cos \Omega + (z-c) = 0,$$

folglich, weil

$$\frac{x-a}{\cos \alpha} = \frac{y-b}{\cos \beta} = \frac{z-c}{\cos \gamma}$$

ist, wenn der Punkt $(xyz)$, wie es verstattet ist, in der Directrix angenommen wird:

$$\sin i \sin \Omega \cos \alpha - \sin i \cos \Omega \cos \beta + \cos i \cos \gamma = 0.$$

Verbindet man hiermit die bekannte Gleichung

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0,$$

so erhält man, wenn $G$ einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \quad G(b \cos i + c \sin i \cos \Omega),\\
\cos \beta &= \quad G(c \sin i \sin \Omega - a \cos i),\\
\cos \gamma &= -G(a \sin i \cos \Omega + b \sin i \sin \Omega);
\end{aligned}$$

also nach 13):

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \quad G \cdot \frac{p}{2n} \cdot \frac{\cos i^2 \sin L + \sin i^2 \sin P \cos \Omega}{\cos i \sqrt{1 + \operatorname{tang} i^2 \sin P^2}},\\
\cos \beta &= -G \cdot \frac{p}{2n} \cdot \frac{\cos i^2 \cos L - \sin i^2 \sin P \sin \Omega}{\cos i \sqrt{1 + \operatorname{tang} i^2 \sin P^2}},\\
\cos \gamma &= -G \cdot \frac{p}{2n} \cdot \frac{\cos (L - \Omega) \sin i}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i^2 \sin P^2}};
\end{aligned}$$

oder nach 12):

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \quad G \cdot \frac{p}{2n} \cdot \frac{\sin L - \sin i^2 \cos P \sin \Omega}{\cos i \sqrt{1 + \operatorname{tang} i^2 \sin P^2}},\\
\cos \beta &= -G \cdot \frac{p}{2n} \cdot \frac{\cos L - \sin i^2 \cos P \cos \Omega}{\cos i \sqrt{1 + \operatorname{tang} i^2 \sin P^2}},\\
\cos \gamma &= -G \cdot \frac{p}{2n} \cdot \frac{\sin i \cos P}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i^2 \sin P^2}};
\end{aligned}$$

oder:

$$\cos\alpha = G\cdot\frac{p}{2n}\cdot\frac{\sin P\cos\Omega + \cos i^2\cos P\sin\Omega}{\cos i\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}},$$

$$\cos\beta = G\cdot\frac{p}{2n}\cdot\frac{\sin P\sin\Omega - \cos i^2\cos P\cos\Omega}{\cos i\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}},$$

$$\cos\gamma = -G\cdot\frac{p}{2n}\cdot\frac{\sin i\cos P}{\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}}.$$

Quadrirt man diese Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man leicht:

$$(G\cdot\frac{p}{2n})^2 = 1,\quad G.\frac{p}{2n} = \pm 1;$$

also:

$$14)\ \ldots\ \begin{cases} \cos\alpha = \pm\dfrac{\sin L - \sin i^2\cos P\sin\Omega}{\cos i\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}}, \\ \cos\beta = \mp\dfrac{\cos L - \sin i^2\cos P\cos\Omega}{\cos i\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}}, \\ \cos\gamma = \mp\dfrac{\sin i\cos P}{\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}}; \end{cases}$$

oder:

$$15)\ \ldots\ \begin{cases} \cos\alpha = \pm\dfrac{\sin P\cos\Omega + \cos i^2\cos P\sin\Omega}{\cos i\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}}, \\ \cos\beta = \pm\dfrac{\sin P\sin\Omega - \cos i^2\cos P\cos\Omega}{\cos i\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}}, \\ \cos\gamma = \mp\dfrac{\sin i\cos P}{\sqrt{1+\tang i^2\sin P^2}}. \end{cases}$$

Wenn man in die Gleichung der Ebene der Bahn im Systeme der $xyz$ für $\tang i$ seinen aus 9) sich ergebenden Ausdruck einführt, so wird diese Gleichung:

$$z = -\frac{(x\sin\Omega - y\cos\Omega)\tang J}{\sin P},$$

folglich ist auch:

$$c = -\frac{(a\sin\Omega - b\cos\Omega)\tang J}{\sin P},$$

und daher die Gleichung der Ebene der Bahn:

$$z-c=-\frac{\{(x-a)\sin\Omega-(y-b)\cos\Omega\}\tang J}{\sin P}$$

oder:

$$(x-a)\sin\Omega\sin J-(y-b)\cos\Omega\sin J+(z-c)\sin P\cos J=0,$$

also wie oben:

$$\sin\Omega\sin J\cos\alpha-\cos\Omega\sin J\cos\beta+\sin P\cos J\cos\gamma=0.$$

Verbindet man hiermit wieder die Gleichung

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0,$$

so erhält man:

$$\cos\alpha=\quad G(b\sin P\cos J+c\cos\Omega\sin J),$$

$$\cos\beta=\quad G(c\sin\Omega\sin J-a\sin P\cos J),$$

$$\cos\gamma=-G(a\cos\Omega\sin J+b\sin\Omega\sin J);$$

folglich nach 7), wie man leicht findet:

$$\cos\alpha=\quad G\frac{p}{2n}\{\sin(P+\Omega)\sin P\cos J^2+\cos\Omega\sin J^2\},$$

$$\cos\beta=-G\frac{p}{2n}\{\cos(P+\Omega)\sin P\cos J^2-\sin\Omega\sin J^2\},$$

$$\cos\gamma=-G\frac{p}{2n}\cos P\sin J\cos J;$$

oder:

$$\cos\alpha=\quad G\frac{p}{2n}\{\cos\Omega-\cos J^2\cos P\cos(P+\Omega)\},$$

$$\cos\beta=\quad G\frac{p}{2n}\{\sin\Omega-\cos J^2\cos P\sin(P+\Omega)\},$$

$$\cos\gamma=-G\frac{p}{2n}\cos P\sin J\cos J.$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man:

$$(G\frac{p}{2n})^2=\frac{1}{1-\cos J^2\cos P^2},\quad G\frac{p}{2n}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos J^2\cos P^2}};$$

also:

$$16) \ldots \begin{cases} \cos\alpha = \pm\dfrac{\cos\Omega - \cos J^2 \cos P \cos(P+\Omega)}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}, \\[2ex] \cos\beta = \pm\dfrac{\sin\Omega - \cos J^2 \cos P \sin(P+\Omega)}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}, \\[2ex] \cos\gamma = \mp\dfrac{\cos P \sin J \cos J}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}; \end{cases}$$

oder nach 12):

$$17) \ldots \begin{cases} \cos\alpha = \pm\dfrac{\cos\Omega - \cos J^2 \cos P \cos L}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}, \\[2ex] \cos\beta = \pm\dfrac{\sin\Omega - \cos J^2 \cos P \sin L}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}, \\[2ex] \cos\gamma = \mp\dfrac{\cos P \sin J \cos J}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}; \end{cases}$$

oder nach 12):

$$18) \ldots \begin{cases} \cos\alpha = \pm\dfrac{\cos(L-P) - \cos J^2 \cos P \cos L}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}, \\[2ex] \cos\beta = \pm\dfrac{\sin(L-P) - \cos J^2 \cos P \sin L}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}, \\[2ex] \cos\gamma = \mp\dfrac{\cos P \sin J \cos J}{\sqrt{1-\cos J^2 \cos P^2}}. \end{cases}$$

Man könnte in der Entwickelung solcher Formeln noch viel weiter gehen, namentlich im Falle zweier Kegelschnitte aus denselben Ausdrücke für die im Obigen durch $\cos\Theta_{01}$, $M_{01}$, $N_{01}$, $N_{10}$ bezeichneten Grössen ableiten, was aber Alles so wenig irgend einer Schwierigkeit unterliegt, dass diese Entwickelungen sämmtlich dem Leser überlassen bleiben können, indem das Obige alles für weitere Untersuchungen wesentlich Nothwendige enthält.

---

Das Problem von den Proximitäten der Bahnen der Planeten und Cometen gewinnt in der neueren Astronomie täglich mehr an Interesse, weil bei der schon jetzt so sehr grossen Anzahl dieser Weltkörper, die durch neuere Entdeckungen gewiss immer noch vergrössert werden wird, das dermaleinstige Zusammentreffen zweier derselben immer wahrscheinlicher wird.

---

S. 10. Z. 7. v. u. statt „anlytischen" s. m. „analytischen". — S. 76. Z. 5. v. u. statt „Vorhergehen" s. m. „Vorhergehenden".

# II.

# Geometrische Untersuchungen über einige Curven *).

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

---

## I. Die Hypocycloide mit vier Aesten.

Die Umhüllungscurven, welchen die folgende Untersuchung gewidmet ist, entstehen durch eine Gerade von unveränderlicher Länge, deren Endpunkte sich auf den Schenkeln eines festen Winkels bewegen. Es sei (Taf. I. Fig. 1.) $OQ$ ein Durchmesser des um $MNO$ beschriebenen Kreises, $O'$ ein beliebiger Punkt auf dem Umfange, der sich dem Punkte $O$ ohne Ende nähert, $OV$ senkrecht auf $NO'$ und $OV'$ senkrecht auf $MO'$: dann ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $OO'V'$ und $OQM$ ferner $OO'V$ und $OQN$:

$$O'V'=\frac{QM.OO'}{OQ} \text{ und } O'V=\frac{QN.OO'}{OQ},$$

also

$$O'V':O'V=QM:QN.$$

Ist nun $\Delta M'N'O \cong \Delta MNO'$, also $M'N'=MN$, $M'O=MO'$ und $N'O=NO'$, so ist:

$$\frac{QM}{QN}=\frac{O'V'}{O'V}=\lim.\frac{MM'}{NN'}.$$

---

*) Herr Doctor Böklen schreibt mir bei Uebersendung dieses und des folgenden Aufsatzes, dass diese Aufsätze einiges Bekannte enthalten, aber ein Material zu Uebungsaufgaben für Schüler darbieten dürften, welches in manchen Fällen, z. B. bei Prüfungen, nicht unwillkommen sein möchte. G.

Die Linien $M'T$, $QP$, $OR$, $UN$ stehen sämmtlich senkrecht auf $MN$, dann ist:

$$TM' = \frac{MM'.RO}{MO} \text{ und } UN = \frac{NN'.RO}{NO},$$

also

$$\frac{TM'}{UN} = \frac{MM'.NO}{NN'.MO} \text{ und } \frac{QM.NO}{QN.MO} = \lim. \frac{TM'}{UN}.$$

Vermöge einer leicht zu beweisenden Eigenschaft des Kreisvierecks ist:

$$\frac{QM.NO}{QN.MO} = \frac{RN}{RM},$$

und weil das Perpendikel, welches vom Mittelpunkt des Kreises auf die Sehne $MN$ gefällt wird, sowohl diese, als auch $PR$ halbirt, so ist $RN = PM$ und $RM = PN$. Je näher also $M'N'$ an $MN$ rückt, um so mehr nähert sich das Verhältniss $TM' : UN$ dem Verhältniss $PM : PN$. Andererseits ist $TM' : UN = ST : SN$, woraus hervorgeht, dass der Durchschnittspunkt $S$ sich ohne Ende dem Punkte $P$ nähert. Wir haben somit folgenden Satz:

Bewegt sich eine Gerade $MN$ von unveränderlicher Länge mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines Winkels $XOY$, so ist der Durchschnittspunkt der Geraden mit der ihr unendlich nahen von $M$ eben so weit entfernt, als der Fusspunkt des von $O$ auf $MN$ gefällten Perpendikels von $N$.

$P$ ist also ein Punkt der Umhüllungscurve, $MN$ die Tangente und $QP$ die Normale. Es verdient noch bemerkt zu werden, dass der Durchmesser des um das Dreieck $MNO$ beschriebenen Kreises constant ist, welche Lage auch $MN$ haben mag, weil in diesem Kreise der constanten Sehne $MN$ stets derselbe Peripheriewinkel $XOY$ entspricht. Die Linien $OH$ und $OG$ (Taf. I. Fig. 2.) halbiren den Winkel $MON$ und seinen Nebenwinkel, mithin ist $\angle GOH = 90^0$, $OF$ ist senkrecht auf $HG$, also parallel mit $MN$, $DH = FG$ und $OR$ senkrecht auf $MN$. Nun ist $\angle QOM = \angle RON$, weil beide $= \angle QNM$ sind; also ist $\angle QOH = \angle HOR$ und $\angle GQO = \angle QOR = 2\angle QOH$, woraus folgt, dass das Dreieck $QOH$ gleichschenklig ist, und also $QO = QH = QG$. Da $QO$ als der Durchmesser des um das Dreieck $MNO$ beschriebenen Kreises constant ist, so ist es auch $HG$, woraus sich folgender Satz ergibt:

Bewegt sich eine Gerade $MN$ von unveränderlicher Länge mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines

**festen Winkels, so hat die Umhüllungscurve dieser Geraden die Eigenschaft, dass die Halbirungslinien des festen Winkels und seines Nebenwinkels auf ihrer Normale ein Stück *HG* abschneiden, welches constant und doppelt so gross als der Durchmesser des um *MNO* beschriebenen Kreises ist.**

Die Normale *HG* berührt also ihrerseits in *D* die Umhüllungscurve einer Geraden von unveränderlicher Länge, deren Endpunkte sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen. Diese letztere Curve ist, wie bekannt, eine Hypocycloide mit vier Aesten, welche durch Rollen eines Kreises innerhalb eines andern viermal so grossen entsteht. Wir schliessen also:

**Die Evolventen einer Hypocycloide mit vier Aesten sind ebenfalls Umhüllungscurven und zwar einer Geraden von unveränderlicher Länge, deren Endpunkte sich auf den Schenkeln eines im Allgemeinen schiefen Winkels bewegen.**

Betrachtet man die von *HG* erzeugte Curve als gegeben, so erhält man eine Evolvente derselben, wenn man durch ihren Mittelpunkt *O* zwei Linien zieht, die mit *OH* gleiche Winkel $XOH = YOH$ bilden und von einem über *QO* als Durchmesser beschriebenen Kreise in *M* und *N* geschnitten werden; der Punkt *P*, in welchem die Sehne *MN* von *HG* getroffen wird, ist ein Punkt der Evolvente. Der Winkel *XOY* kann einen beliebigen Werth haben zwischen 0° und 180°; betrachten wir zunächst den speziellen Fall, wo $\angle XOY = 90^0$ ist (Taf. I. Fig. 3.). *MN* ist hier $= OQ = \frac{1}{2} HG$; die besondere Evolvente, welche diesem Fall entspricht, ist also wieder eine Hypocycloide mit vier Aesten von halb so grossen Dimensionen. Die Figur zeigt unmittelbar, dass $OR = QP = \frac{1}{3} DP$ ist. *DP* ist der Krümmungshalbmesser der von *MN* erzeugten *U*-Curve, woraus folgt:

**Die Hypocycloide mit vier Aesten ist ihrer Evolute ähnlich; die Dimensionen der letzteren sind doppelt so gross, als die der ersteren. Der Krümmungshalbmesser eines Punktes *P* der Curve ist dreimal so gross als das vom Mittelpunkte *O* auf die Tangente von *P* gefällte Perpendikel *OR*.**

Die Rectification der Curve hat nun weiter keine Schwierigkeit. Es sei *XPY* ein Quadrant derselben und *DX* ein Bogen ihrer Evolute. Wir haben Bogen $DX = DP = \frac{3}{4} DF$; *X* ist ein Scheitel und *DF* so gross als der Abstand des Mittelpunkts *O* von der Normale in *D*, woraus sich folgender Satz ergibt:

**Der Bogen zwischen einem Punkte $D$ und dem Scheitel $X$ eines Quadranten ist gleich $\frac{3}{4}$ von dem Normalen-Abstand von $D$**; oder weil der Scheitel $X$ den Quadranten in zwei congruente Hälften theilt: **Der Quadrant wird durch einen Punkt $D$ in zwei Theile getheilt, deren Unterschied gleich $\frac{3}{2}$ des Normalen-Abstands von $D$ ist.**

Ehe wir in der Untersuchung der Evolventen der genannten Curve weiter gehen, mögen einige allgemeine Betrachtungen über Evolventen von symmetrischen Curven vorausgeschickt werden. Rollt eine Gerade über ein Polygonstück und dreht sich dabei um einen Winkel, dessen Bogen für den Halbmesser 1 gleich $\varphi$ ist, so ist die Summe der von zwei Punkten $P$ und $Q$ der Geraden beschriebenen Kreisbögen gleich $PQ.\varphi$, wenn derjenige Theil des Polygons, über welchen die Gerade rollt, stets zwischen den Punkten $P$ und $Q$ bleibt; im anderen Falle ist der Unterschied der von $P$ und $Q$ beschriebenen Kreisbögen $= PQ.\varphi$.

Die Curve $AXB$ (Taf. I. Fig. 4.) ist gegen ihre Normale in $X$ symmetrisch oder $OX$ ist ein Theil der Axe. Die Tangenten an den äussersten Punkten $A$ und $B$ schneiden sich in $O$. $BP'VPC$ ist die Evolvente, also $AC$ gleich dem Bogen $AXB$, $XV$ gleich dem Bogen $XD'P$. $OF$ und $OF'$ sind die Normalen-Abstände von $P$ und $P'$. Da nun wegen der Symmetrie der Curve $AXB$ gegen ihre Axe bei'm Rollen der Tangente $AC$ der von dem einen Endpunkte $C$ beschriebene Evolventenbogen $CPVP'B$ dem vom andern Endpunkt $A$ beschriebenen congruent ist, so haben wir für die Länge dieses Bogens $\frac{1}{2}AC.\varphi$ oder $XV.\varphi$, wo $\varphi$ den Bogen des Winkels $COB$ bedeutet, für den Halbmesser $=1$. Aus der Symmetrie der Curve $AXB$ ergibt sich ferner für zwei Punkte $P$ und $P'$, deren Normalen sich in einem Punkte $S$ der Axe schneiden, $OF = OF'$, $\angle PSO = \angle P'SX$ oder $\angle PSO + \angle P'SO = 180^0$; $\angle P'N'B = \angle PMO$, also $\angle PNB + \angle P'N'B = \angle\varphi$; $PS + P'S = AC = 2XV$; $PD + P'D' = PF + P'F' = AC = 2XV$. Nennen wir den Bogen $CPVP'B$ den Quadranten der Evolvente, $OC$ die kleine, $OB$ die grosse Halbaxe, so ergeben sich folgende Sätze: Die Länge des Quadranten ist gleich einem Kreisbogen, dessen Halbmesser gleich der halben Summe der Halbaxen und dessen Centriwinkel gleich $\varphi$ ist. Auf dem Quadranten der Evolvente gibt es einen Punkt $V$, dessen Normalen-Abstand ein Maximum ist. Der Krümmungshalbmesser desselben oder sein Abstand von der Axe der Evolute ist gleich der halben Summe der Halbaxen; der Winkel, welchen seine Normale mit der grossen Halbaxe bildet, ist gleich $\frac{1}{2}\varphi$. Zwei Punkte $P$ und $P'$, deren Normalen gleichen Abstand von $O$ haben und mit ein-

ander den Winkel $\varphi'$ bilden, haben folgende Eigenschaften: sie theilen den Quadranten in drei Stücke, wovon das mittlere gleich einem Kreisbogen ist, der mit der halben Summe der Halbaxen als Halbmesser in den Winkel $\varphi-2\varphi'$ beschrieben, oder wovon die Summe der beiden äussern gleich einem mit demselben Halbmesser in den Winkel $2\varphi'$ beschriebenen Kreisbogen ist. Die Summe der Winkel, welche die Normalen mit der grossen Halbaxe nach Einer Seite hin machen, ist constant und gleich $\varphi$. Die Summe der Krümmungshalbmesser von zwei solchen Punkten, die Summe der Abschnitte ihrer Normalen zwischen der Evolvente und der Axe der Evolute, oder zwischen der Evolvente und dem Fusspunkte der vom Mittelpunkte auf sie gefällten Perpendikel ist ebenfalls constant und gleich der Summe der Halbaxen.

Betrachten wir $AXB$ als den Quadranten der Umhüllungscurve einer Geraden $MN$ von unveränderlicher Länge, deren Endpunkte sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen, so finden die vorhergehenden Ausführungen unverändert Anwendung auf die Evolvente $CPVP'B$. Es kommen jedoch noch einige besondere Umstände hinzu: Der Winkel $\varphi$ ist $=90^0$, das Stück $MN$ der Normale der Evolvente, welches zwischen $AO$ und $BO$ eingeschlossen ist, hat eine constante Länge, die wir mit $c$ bezeichnen wollen. Der Bogen $AXB$ ist $=\frac{3}{2}AO=\frac{3}{2}c$, also $CO=\frac{1}{2}c$. Die Evolvente $XpZ=Xp'Z'$, welche vom Scheitel $X$ der Curve ausgeht, ist selbst wieder eine vierästige Hypocycloide und rectificirbar, d. h. der Bogen $Zp$ ist $\frac{3}{4}OF$. Wir schliessen daraus, dass sämmtliche Evolventen der Curve mittelst gerader Linien und Kreisbögen rectificirt werden können. Doch beschränken wir uns vorläufig auf die Evolvente, welche von $B$ ausgeht und deren Halbaxen $OC=\frac{c}{2}$ und $OB=c$ sind. $CP-Zp$ ist $=CZ.\varphi'$, wo $\varphi'$ den Bogen des Winkels $CMP$ für den Halbmesser 1 bedeutet, also Bogen $CP$ = Bogen $Zp+CZ.\varphi'$. Nun ist $OX=\frac{1}{2}c$, $OZ=\frac{1}{4}c$, also $CZ=\frac{3}{4}c$; Bogen $BP'$ + Bogen $Z'p'=BZ'.\varphi'$ $=CZ.\varphi'$, also Bogen $CP$ — Bogen $BP'=2$ Bogen $Zp=\frac{3}{2}OF$. Fasst man diese Resultate in Worte, so ergeben sich folgende Eigenschaften der Evolvente $CPVP'B$:

Der Umfang ist gleich dem eines Kreises, dessen Halbmesser $=\frac{3}{4}c$; zwei Punkte, $P$ und $P'$, von gleichem Normalen-Abstand theilen den Quadranten in drei Theile, wovon der Unterschied der beiden äussern dreimal so gross ist, als die Hälfte dieses Normalen-Abstands. Der Punkt $F$, dessen Normalen-Abstand ein Maximum ist, theilt den Quadranten in zwei Theile,

deren Unterschied gleich $\frac{3}{4}c$. Die Summe der Winkel, welche die Normalen zweier Punkte $P$ und $P'$ von gleichem Normalen-Abstand mit einer Axe der Evolvente nach Einer Seite hin bilden, ist $= 90^{0}$. Die Abschnitte dieser Normalen zwischen der Evolvente und der grossen Halbaxe sind zusammen $= \frac{1}{2}c$ und zwischen der Evolvente und der Verlängerung der kleinen Halbaxe $= \frac{5}{8}c$.

Die Construction der Evolvente $CPVP'B$ hat keine Schwierigkeit, wenn die drei Punkte $A$, $O$, $B$ gegeben sind. Man zieht von einem Punkte $M$ auf $AO$ eine Linie $MN = AO = c$, fällt die Senkrechte $OF$, macht $DM = FN$ und $DP = \frac{3}{4}DF + \frac{3}{4}c$, so ist $DP$ gleich dem Bogen $DXB$. Aus dieser Construction folgt leicht, dass $NP = \frac{1}{2}DN$ ist.

## II. Ueber Fusspunkten- und Rollcurven.

Der Eine Endpunkt $O$ einer Geraden $r$ sei fest, der andere bewege sich auf dem Umfange eines ebenfalls festen Polygons; so lange der bewegliche Endpunkt auf einer bestimmten Seite des Polygons läuft, haben die über $r$ als Durchmesser beschriebenen Kreise zwei gemeinschaftliche Durchschnittspunkte, nämlich $O$ und den Fusspunkt $F$ des von $O$ auf diese Seite oder ihre Verlängerung gefällten Perpendikels. Bei'm Uebergang des beweglichen Endpunkts auf die zweite Polygonseite erhält man statt $F$ den Fusspunkt $F'$ des von $O$ auf die zweite Seite oder ihre Verlängerung gefällten Perpendikels. Also steht dem gegebenen Vieleck ein Fusspunkten-Vieleck gegenüber, dessen Ecken die auf einander folgenden Durchschnitte der über der Geraden $r$ als Durchmesser beschriebenen Kreise sind. Bei'm Uebergang jenes Vielecks zur Curve verwandelt sich das Fusspunkten-Vieleck in die Fusspunktencurve, welche nun als der Ort der auf einander folgenden Durchschnitte der über dem beweglichen Strahl $r$ als Durchmesser beschriebenen Kreise zugleich deren Umhüllungscurve ist und sie also alle berührt. Daraus folgt eine Construction der Tangente der Fusspunktencurve: Man ziehe von $O$ an einen beliebigen Punkt $D$ der gegebenen Curve eine Gerade $r$, ziehe die Tangente in $D$, welche den über $r$ als Durchmesser beschriebenen Kreis in $F$ schneidet, so ist $F$ ein Punkt der Fusspunktencurve und die Tangente des Kreises in $F$ zugleich eine Tangente der letzteren.

Einem Punkte $D$ der gegebenen Curve entspricht für den Convergenzpunkt $O$ nur Ein Punkt $F$ der Fusspunktencurve; nennen

wir $D$ und $F$ correspondirende Punkte, so schliesst sich dem Vorigen Folgendes an: Die Tangenten in zwei solchen Punkten bilden mit den correspondirenden Strahlen $OD$ und $OF$ gleiche Winkel. Der Convergenzpunkt, zwei correspondirende Punkte und ihr Normalendurchschnitt bilden mit einander ein Rechteck. Die Fusspunkte der von $O$ und $D$ auf die Tangente von $F$ gefällten Perpendikel sind von diesem Punkte gleichweit entfernt.

Lassen wir den Bogen der gegebenen Curve (Taf. I. Fig. 5.) in $D$ um $DD' = ds$ zunehmen; der Winkel, welchen die Tangenten in $D$ und $D'$ mit einander machen, $\angle FSF'$, sei $= dt$, der Winkel der beiden Strahlen, $\angle DOD'$, $= dv$, die Zunahme des Winkels zwischen Strahl und Tangente $\angle ODF - \angle OD'F' = dw$; $ds'$, $dt'$, $dv'$, $dw'$ haben ähnliche Bedeutungen für die correspondirenden Punkte $F$ und $F'$ der Fusspunktencurve, d. h. $ds' = FF'$, $dt' = \angle LS'K$, $dv' = \angle FOF'$, $dw' = \angle OFK - \angle OF'L$; $\varrho$ und $\varrho'$ sind die Krümmungshalbmesser in $D$ und $F$, endlich ist $OD = r$ und $OF = p$; es bestehen jetzt folgende Relationen:

$dt = dv'$ weil $SOFF'$ ein Kreisviereck ist,

$dw = dw'$ weil die Winkel zwischen Strahl und Tangente in zwei correspondirenden Punkten gleich sind,

$dt = dv + dw$,

$dt' = dv' + dw'$ wie leicht aus der Figur hervorgeht, also

$dt' = 2dt - dv$,

$ds' = r.dt$ wenn man in dem Kreisviereck $SOFF'$ $SO = r$ setzt,

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{dt'}{ds'} = \frac{2dt - dv}{rdt} = \frac{2}{r} - \frac{dv}{rdt}, \text{ aber } \varrho = \frac{ds}{dt}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{r} - \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{dv}{ds}.$$

Steht $D'U$ senkrecht auf $DO$, so ist bei verschwindenden $ds$, $dv$ u. s. w.:

$$dv = \frac{D'U}{D'O} \text{ und}$$

$$D'U = DD' \cdot \frac{OF}{OD}, \text{ weil } \Delta D'UD \sim \Delta OFD, \text{ also}$$

$$dv = \frac{DD'.OF}{D'O.OD} = ds.\frac{p}{r^2}, \text{ und durch Substitution:}$$

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{r} - \frac{\varrho \cdot p}{r^3} \text{ oder } \varrho' = \frac{r^3}{2r^2 - p\varrho}.$$

Diese Formel setzt uns in den Stand, den Krümmungshalbmesser eines Punkts $F$ der Fusspunktencurve aus seinem Strahl $OF=p$, aus dem Strahl $OD=r$ und dem Krümmungshalbmesser $\varrho$ des correspondirenden Punkts der gegebenen Curve zu bestimmen.

Wir denken uns nun die Tangente $DF$ als fest und die gegebene Curve in $D$ auf ihr rollend, so zwingt sie den Punkt $O$, wenn er mit ihr fest verbunden ist, ihrer Bewegung zu folgen und dabei eine besondere Curve, die Rollcurve, zu beschreiben. Es ist leicht einzusehen, dass dieser Punkt, wenn seine Lage in Beziehung auf die gegebene Curve bestimmt ist (wenn er z. B. der Mittelpunkt oder ein Brennpunkt ist), stets die nämliche Rollcurve beschreibt, auf welcher ihrer Tangenten auch die gegebene Curve rollt, nur ist jedesmal die Rollcurve in einer andern Lage. Nennen wir diese Tangente die Directrix, so lässt sich, in welcher Lage auch die dem Punkte $O$ zukommende Rollcurve verzeichnet sein mag, dieselbe mit der Figur in Uebereinstimmung bringen, wenn man sie so verlegt, dass ihre Directrix auf die Tangente in $D$ fällt und sie selbst durch $O$ geht, so dass ihre Normale mit $DO$ zusammenfällt; denn wenn die gegebene Curve ihre rollende Bewegung auf der Tangente $DF$ im Berührungspunkte $D$ beginnt, so ist dieser Punkt der augenblickliche Drehungspunkt, also das Element der Bahn von $O$ senkrecht auf $OD$. Ist die gegebene Curve so weit fortgerollt, dass $D'$ zur Berührung kommt, so ist $O$ nach $O'$ gekommen, wo $OO'$ ein Bogenelement $ds''$ der Rollcurve vorstellt. Die Richtung der Tangente in $O'$ erhält man, wenn man durch $O$ eine Gerade $OK$ senkrecht auf $OD'$ zieht und sie um einen Winkel gleich $FSF'=dt$ dreht; daraus folgt, dass der Winkel $dt''$, welchen die Tangenten $OK$ in $O$ und $O'K'$ in $O'$ mit einander bilden, $=\angle FSF'-\angle DOD' = dt-dv$ ist. Dreht man die Linie $DD'$, als Polygonseite gedacht, um $D$, bis sie auf $DF$ fällt, also um einen Winkel $FSF'=dt$, so beschreibt der Strahl $DO=r$ einen ebenso grossen Winkel, also ist $ds''=r.dt$, woraus in Verbindung mit der früheren Gleichung $ds'=r.dt$ sich ergibt $ds'=ds''$, oder die Fusspunkten- und die Rollcurve sind gleich lang, welches der Steiner'sche Satz ist. Bezeichnet $\varrho''$ den Krümmungshalbmesser der Rollcurve in $O$, so ist:

$$\frac{1}{\varrho''}=\frac{dt''}{ds''}=\frac{dt-dv}{r.dt}=\frac{1}{r}-\frac{dv}{r.dt},\quad \text{allein } \varrho=\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{1}{\varrho''}=\frac{1}{r}-\frac{\varrho}{r}.\frac{dv}{ds}.$$

Nach dem Obigen ist:

$$dv = ds\frac{p}{r^2},\ \text{also}\ \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{r} - \frac{p\varrho}{r^3}.$$

Diese Formel lehrt den Krümmungshalbmesser $\varrho''$ eines Punktes $O$ der Rollcurve aus den Strahlen $OD = r$ und $OF = p$, so wie aus dem Krümmungshalbmesser $\varrho$ in $D$ bestimmen. Durch Vergleichung der beiden Formeln

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{r} - \frac{p\varrho}{r^3}\ \text{ und }\ \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{r} - \frac{p\varrho}{r^3}$$

ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho''},$$

d. h. der reciproke Werth des Krümmungshalbmessers der Fusspunktencurve ist gleich der Summe der reciproken Werthe des correspondirenden Strahls der gegebenen Curve und des Krümmungshalbmessers vom correspondirenden Punkte der Rollcurve.

Wir fällen auf $DF$ die Senkrechte $O'F''$, so ist $\angle KOF = \angle KFO$, $\angle K'O'F'' = \angle LF'O$, $O'F'' = OF'$; rollen wir nun die Fusspunktencurve auf der innern Seite der Rollcurve, so dass stets zwei correspondirende Punkte beider Curven zusammenfallen, was möglich ist wegen der Gleichheit der Bögen $FF'$ und $OO'$, so kommt, wenn $F$ auf $O$ fällt, die Tangente $FK$ der Fusspunktencurve auf die Tangente $OK$ der Rollcurve, der Convergenzpunkt $O$ der erstern, welchen wir mit ihr fest verbunden und ihrer Bewegung folgend denken, auf den Punkt $F$ der Directrix der letztern zu liegen. Ebenso fallen zugleich $F'$ auf $O'$, $F'L$ auf $O'K'$, $O$ auf $F''$ u. s. w. Wir haben also den Satz:

Rollt die Fusspunktencurve auf der innern Seite der Rollcurve, so dass stets zwei correspondirende Punkte beider Curven zusammenfallen, so beschreibt der Convergenzpunkt der Fusspunktencurve, wenn er mit ihr fest verbunden ist und von ihrer Bewegung nachgezogen wird, eine gerade Linie, nämlich die Directrix der Rollcurve, und umgekehrt: Rollt die Rollcurve mit ihrer innern Seite auf der Fusspunktencurve, so geht die Directrix der ersteren stets durch den Convergenzpunkt der letzteren.

## III. Anwendung auf besondere Curven.

Um die bisher entwickelten allgemeinen Sätze auf besondere

Beispiele anzuwenden, möge zunächst der Fall betrachtet werden, wo die Fusspunktencurve eine Gerade ist (Taf. I. Fig. 6.). $FF'$ sei ein Theil dieser Geraden, $O$ der Convergenzpunkt. Wenn es sich darum handelt, die Eigenschaften der Curve zu bestimmen, deren Fusspunktencurve $FF'$ ist, so fälle man die Senkrechte $OX$; sie wird eine Axe der gesuchten Curve sein und $FF'$ ihre Scheiteltangente. Man beschreibe nun einen Kreis, der durch $O$ geht und die gegebene Gerade berührt, z. B. in $F$, ziehe den Durchmesser $OD$, so ist $D$ ein Punkt der gesuchten Curve und $FD$ ihre Tangente. Beschreibt man einen zweiten Kreis, der den ersten in $O$ und die gegebene Gerade in $F'$ berührt, so ist der Durchmesser $OD'$ in der Verlängerung von $OD$, $D'$ ein zweiter Punkt der gesuchten Curve und $D'F'$ die Tangente. Die Verlängerungen von $FD$ und $OX$ schneiden sich in $E$, von $DF$ und $D'F'$ in $S$. Die Figur gibt unmittelbar folgende Relationen:

$$EO = DO, \quad \angle FOF' = \angle DSD' = 90^0, \quad XF.XF' = \overline{XO}^2.$$

Die Entfernung des Punktes $S$ von $FF'$ ist gleich $OX$, also constant. Zieht man durch $S$ eine Linie parallel $FF'$, welche die Verlängerung von $OF$ in $Q$ schneidet, verbindet $Q$ mit $D$, so ist $\triangle SQD \cong \triangle SOD$, also $\angle SQD = 90^0$, $QD = OD$. Gleiche Beziehungen gelten für $Q'$. Durch alle diese Eigenschaften ist die gesuchte Curve als Parabel mit dem Brennpunkt $O$ hinreichend charakterisirt. Die Formel

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{r} - \frac{p\varrho}{r^3}$$

gibt, da $\varrho' = \infty$ ist:

$$\varrho = 2\frac{r^2}{p}.$$

$\varrho$ ist der Krümmungshalbmesser der Parabel in $D$, $OD = r$, $OF = p$. Zieht man die Normale in $D$, welche senkrecht auf der Tangente $DF$ ist, so ist das Stück derselben von $D$ bis zur Verlängerung der Directrix $SQ$ gleich

$$\frac{\overline{QD}^2}{QF} = \frac{\overline{OD}^2}{OF} = \frac{r^2}{p} = \tfrac{1}{2}\varrho.$$

Die Linie $OS$ ist senkrecht auf $DD'$, also $\overline{OS}^2 = OD.OD'$; wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $OFF'$ und $SDD'$ ist:

$$XO = \frac{\overline{OS}^2}{DD'}, \text{ also } \frac{1}{XO} = \frac{DD'}{OD.OD'} = \frac{OD+OD'}{OD.OD'} = \frac{1}{OD} + \frac{1}{OD'}$$
$$= \frac{1}{QD} + \frac{1}{Q'D'},$$

auch ist:

$$\frac{1}{\overline{OF}^2}+\frac{1}{\overline{OF'}^2}=\frac{\overline{OF}^2+\overline{OF'}^2}{\overline{OF}^2.\overline{OF'}^2}=\frac{\overline{FF'}^2}{XF.XF'.\overline{FF'}^2}=\frac{1}{\overline{XO}^2}.$$

*XO* ist der vierte Theil des Parameters der Parabel. Von den hier nachgewiesenen Eigenschaften der Parabel mögen diejenigen in Worten ausgedrückt werden, welchen ähnliche Eigenschaften der Rollcurve zur Seite stehen:

**Das Stück der Normale einer Parabel zwischen der Curve und der Directrix ist halb so gross als der Krümmungshalbmesser. Fällt man von einem Punkte der Parabel auf die Directrix ein Perpendikel, vom Fusspunkte desselben auf die Tangente jenes Punktes ebenfalls ein Perpendikel, so ist in dem so entstandenen rechtwinkligen Dreieck das eine Hypotenusensegment constant und gleich dem Viertels-Parameter der Parabel.**

Zwei Punkte der Parabel, deren Tangenten einen Winkel von 90° mit einander bilden, haben folgende Eigenschaften:

**Die Summe der reciproken Werthe ihrer Abstände von der Directrix sowohl, als auch vom Brennpunkte ist constant und gleich dem reciproken Werthe des Viertels-Parameters der Parabel. Die Summe der Quadrate der reciproken Werthe der Abstände des Brennpunkts von den Durchschnittspunkten ihrer Tangenten mit der Scheiteltangente ist gleich dem Quadrat des reciproken Werths vom Viertels-Parameter der Parabel. Das Product der Entfernungen dieser Durchschnittspunkte vom Scheitel ist constant und gleich dem Quadrat des Viertels-Parameters der Parabel.**

Wir lassen die Parabel auf ihrer Scheiteltangente rollen, bis der Punkt *D* zur Berührung kommt in *T*, dann ist *XT* gleich dem Parabelbogen *XD*. Der Brennpunkt, welcher die Rollcurve beschreibt, ist nach *O'* gekommen, *O'T* ist die Normale in *O'* und gleich *OD*, $O'U = OF$, überhaupt $\Delta\, O'TU \cong \Delta\, ODF$. Fällt man von *U* ein Perpendikel *UV* auf die Tangente *O'V*, so lässt sich die Congruenz der Dreiecke *O'UV* und *FOX* ohne Schwierigkeit beweisen. Ferner ist nach dem Satze von Steiner, wornach die Roll- und die Fusspunktencurve gleich lang sind, der Bogen *OO'* der erstern gleich $XF = O'V$, wodurch diese Rollcurve hinreichend als Kettenlinie charakterisirt ist. Die Formel

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho''} \text{ gibt, da } \varrho' = \infty \text{ ist, } \varrho'' = -r,$$

$$r \text{ ist } = OD = O'T.$$

Lassen wir die Parabel auf der andern Seite vom Scheitel $X$ rollen, bis der Punkt $D'$ zur Berührung kommt in $T'$, dann ist $XT'$ gleich dem Parabelbogen $XD'$; der Brennpunkt, welcher die Rollcurve beschreibt, ist nach $O''$ gekommen, $O''T'$ ist die Normale in $O''$ und gleich $OD'$, der Bogen $OO''$ ist gleich $XF'$. Wir haben nun folgende Zusammenstellung der Eigenschaften der Kettenlinie, welche denjenigen der Parabel analog sind, wobei nach der früheren Erklärung $XT$ oder die Scheiteltangente der Parabel zugleich die Directrix der Kettenlinie, und, wie bekannt, $OX$ oder der Viertels-Parameter der Parabel zugleich der Parameter der Kettenlinie ist.

Das Stück der Normale einer Kettenlinie zwischen der Curve und der Directrix ist so gross als der Krümmungshalbmesser. Fällt man von einem Punkte der Kettenlinie auf die Directrix ein Perpendikel, vom Fusspunkt desselben auf die Tangente jenes Punktes ebenfalls ein Perpendikel, so ist in dem so entstandenen rechtwinkligen Dreiecke die Eine Kathete constant und gleich dem Parameter der Kettenlinie.

Zwei Punkte der Kettenlinie, deren Tangenten einen Winkel von 90° mit einander bilden, haben folgende Eigenschaften:

Die Summe der reciproken Werthe ihrer Krümmungshalbmesser sowohl, als auch derjenigen Stücke ihrer Normalen, welche zwischen der Kettenlinie und ihrer Directrix enthalten sind, ist constant und gleich dem reciproken Werth des Parameters der Kettenlinie. Die Summe der Quadrate der reciproken Werthe ihrer Abstände von der Directrix ist constant und gleich dem Quadrat des reciproken Werths des Parameters der Kettenlinie. Das Product ihrer Bogenabstände vom Scheitel ist constant und gleich dem Quadrat des Parameters der Kettenlinie.

Es möge nun noch als weiteres Beispiel die Untersuchung der Roll- und Fusspunktencurve der Hypocycloide mit vier Aesten folgen. Die Curve $ADB$ (Taf. II. Fig. 7.) oder die Umhüllungscurve der Geraden $MN$ von constanter Länge $c$, deren Endpunkte $M$ und $N$ sich auf den Schenkeln des rechten Winkels $AOB$ bewegen und deren Fusspunktencurve durch $F$ geht, wenn $O$ der Con-

vergenzpunkt ist, soll auf ihrer Tangente $OB$ rollen, so fragt es sich, welche Curve der Punkt $O$ beschreibt. Wir haben, wenn $X$ der Scheitel ist, Bogen $DX = \frac{3}{4}DF$, Bogen $AXDB = \frac{3}{2}c$, $DN = FM$, also Bogen $DB = \frac{3}{2}DN = \frac{3}{2}MF$. Wenn also bei'm Rollen der Curve $AXDB$ auf der festen Tangente $OB$ der Punkt $D$ zur Berührung kommt und seine Tangente $MN$ in die Richtung von $OB$ fällt, so wird der Punkt $F$ der Tangente auf $F''$ fallen, wenn $BF'' = DF +$ Bogen $DB$ ist; der Bogen $DB$ ist $= \frac{3}{2}DN$ oder $= DN + Fm$, wo $m$ die Mitte von $FM$ ist, also haben wir $BF'' = mN$. Der Punkt $O$ ist nach $O'$ gekommen, so dass $O'F''$ senkrecht auf der Directrix $OB$ und gleich $OF$ ist, und $OF'' = mF$. Setzen wir $OF'' = y$ und $O'F'' = x$, so ist:

$$\overline{OF}^2 = MF.FN \quad \text{oder} \quad x^2 = 2y(c - 2y),$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist, deren kleine Axe $OO'' = \frac{1}{2}c$ und deren grosse Axe $= c$ ist. Wir haben demgemäss folgenden Satz:

Rollt eine Hypocycloide mit vier Aesten auf einer ihrer Tangenten, so beschreibt ihr Mittelpunkt eine Ellipse, deren Axen sich wie 1:2 verhalten.

Verbindet man damit den Satz von der gleichen Länge der Roll- und Fusspunktencurve, so ergibt sich:

Bewegt sich eine Gerade von constanter Länge $c$ mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels und seines Scheitelwinkels, von dessen Spitze Perpendikel auf die Gerade gefällt werden, so liegen deren Fusspunkte in einer Curve von der Form eines Achters, welche so lang ist als eine Ellipse, deren Axen gleich $c$ und $\frac{c}{2}$ sind.

# III.

## Ueber cyclische Curven.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

---

Zwei Kreise, deren Durchmesser $D$ und $d$ sind, berühren einander von Aussen; $A$ ist der äussere Aehnlichkeitspunkt, $B$ der Berührungspunkt. Sie rollen auf der innern Seite von zwei concentrischen Kreisen, deren Mittelpunkt $A$ ist. Die Halbmesser dieser festen Kreise sind also $AB$ und $AB+D$. Während dieser Bewegung liegt der gemeinschaftliche Berührungspunkt der beweglichen Kreise mit ihren Mittelpunkten und mit $A$ stets in gerader Linie; nachdem sie eine gewisse Strecke durchlaufen haben, sei $P$ ihr Berührungspunkt geworden, dann hat der Punkt $B$, welcher mit dem Kreise $D$ fest verbunden gedacht wird, eine Curve $BN$ beschrieben, und wenn er dem Kreise $d$ folgt, eine zweite Curve $Bn$. Die beiden Rollcurven $BN$ und $Bn$ stehen in naher Beziehung zu einander. Die Punkte $N$, $P$, $n$ liegen stets in Einer Richtung, $P$ ist der augenblickliche Drehungspunkt des Kreises $d$, also $Pn$ die Normale der Curve $Bn$; auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass $PN$ die Tangente der Curve $BN$ ist. $N$ ist mithin der Krümmungsmittelpunkt von $n$, die Curve $BN$ die Evolute von $Bn$. $Nn$ ist der Krümmungshalbmesser von $n$ und gleich dem Bogen $BN$. Wenn der Punkt $B$ zum zweiten Mal zur Berührung kommt, so hat er einen Ast der Rollcurve $Bn$ vollständig beschrieben, welcher einen Scheitel $s$ hat, der ihn in zwei congruente Theile trennt, die wir Quadranten nennen wollen. Wenn $S$ der Krümmungsmittelpunkt von $s$ ist, so sind die Quadranten $Bs$ und $BS$ einander ähnlich; $B$ ist zugleich die Spitze der Evolvente $Bs$ und der Scheitel der Evolute $BS$. Es sei $m$

der Punkt auf dem zweiten Quadranten der Evolvente, welcher eine ähnliche Lage hat wie der Punkt $N$ auf der Evolute, so gelten für die Punkte $m$ und $n$ folgende Sätze, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann: Die Quadratsumme ihrer Krümmungshalbmesser ist constant und gleich dem Quadrat über $D+d$. Die Quadratsumme der Abschnitte ihrer Normalen, welche von der Curve und dem Kreise $AB$ begrenzt sind, ist gleich $d^2$. Die Quadratsumme ihrer Bogenabstände vom Scheitel $s$ ist gleich dem Quadrat, dessen Seite so lang ist als der Quadrant $Bs$. Die Quadratsumme der Entfernungen von $A$ ist ebenfalls constant. Der Winkel, welchen ihre Normalen mit einander bilden, ist gleich dem Winkel zwischen den Normalen im Scheitel und an der Spitze.

Die bisherigen Sätze finden auch Anwendung, wenn die Kreise $D$ und $d$ auf der äussern Seite von zwei concentrischen Kreisen rollen, und man findet, dass in diesem Fall der Kreis $d$ die Evolute beschreibt, welche also kleiner ist als die Evolvente. Wir haben somit den Satz:

Wenn ein Kreis auf der innern oder äussern Seite der Peripherie eines festen Kreises rollt, so ist die Curve, welche ein Punkt auf dem Umfange des beweglichen Kreises beschreibt, rectificirbar und ihrer Evolute ähnlich.

Besondere Fälle sind folgende:

1. $D=d$, der äussere Aehnlichkeitspunkt $A$ rückt in's Unendliche, die Kreise rollen auf zwei parallelen Geraden, die Aehnlichkeit zwischen Evolvente und Evolute wird zur Congruenz; es ist diess der Fall der gemeinen Cycloide.

2. $A$ liegt auf dem Umfange vom Kreise $d$, dann wird $D$ unendlich. Entweder rollt nun der Kreis $d$ auf der innern Seite der Peripherie eines doppelt so grossen Kreises, die Evolute wird eine Gerade; ein Punkt auf dem Umfange des beweglichen Kreises bewegt sich auf einem Durchmesser des festen. Oder rollt der Kreis $d$ auf der äussern Seite eines festen Kreises, welchen hier der Punkt $A$ vorstellt, der Kreis $D$, welcher zu einer Geraden wurde, rollt auf der äussern Seite des Umfanges eines Kreises, dessen Mittelpunkt $A$ und Halbmesser $=d$ ist. Ein Punkt dieser Geraden beschreibt eine Kreis-Evolvente, deren Scheitel in der Unendlichkeit liegt.

3. $D=2d=\frac{1}{2}AB$. Jeder der beweglichen Kreise rollt innerhalb eines viermal so grossen Kreises; es entsteht dann eine Hypocycloide mit vier Aesten, welche halb so gross als ihre Evo-

lute ist und durch die Eigenschaft sich auszeichnet, zugleich die Umhüllungscurve einer Geraden von unveränderlicher Länge zu sein, deren Endpunkte sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen.

4. $D = 3d = 2AB$. Beide Kreise rollen auf der äusseren Seite eines ihnen gleichen Kreises; es entsteht eine Epicycloide mit Einem Ast und Einer Spitze, welche dreimal so gross ist, als ihre Evolute und identisch mit der Fusspunktencurve eines Kreises, wenn die Perpendikel auf die Tangenten von einem Punkte des Umfangs aus gefällt werden. Die Punkte $m$ und $n$, für welche die Quadratsumme der Krümmungshalbmesser, der Bogenabstände vom Scheitel $s$ constant ist, besitzen noch weitere Eigenschaften: die Sehne $mn$ ist constant und geht durch die Spitze $B$, sie wird halbirt durch das von der Mitte von $Bs$ darauf gefällte Perpendikel. Die Tangenten in $m$ und $n$ schneiden sich unter rechten Winkeln, ihr Durchschnittspunkt liegt auf einem Kreise; dasselbe gilt von den Normalen in $m$ und $n$.

Denken wir uns ein Parallelogramm $ABCD$, dessen Ecke $A$ fest ist. Die Seiten $AB$ und $AC$ seien jede mit einer besondern und constanten Winkelgeschwindigkeit begabt, nach gleichen oder entgegengesetzten Richtungen. Dadurch wird $ABCD$ zwar die Form verändern, aber doch stets ein Parallelogramm bleiben. In einem bestimmten Falle können die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ auch in Einer Richtung liegen. Die Curve, welche $C$ beschreibt, kann man sich nun auf zweierlei Art entstanden denken; entweder durch das Rollen eines Kreises, dessen Mittelpunkt $B$ und Halbmesser $BC$ ist, auf dem Umfange eines festen Kreises, dessen Mittelpunkt $A$ und Halbmesser $= AB \pm BC$ ist; oder durch das Rollen eines Kreises, dessen Mittelpunkt $D$ und Halbmesser $DC$, auf dem Umfange eines festen Kreises, dessen Mittelpunkt $A$ und Halbmesser $= AD \pm DC$. Diese Betrachtungen führen zu dem Satz: Wenn man eine Gerade in zwei Abschnitte theilt, $D$ und $d$, und drei Kreise beschreibt, deren Durchmesser $D$, $d$ und $D+d$ sind, so dass die zwei kleineren Kreise sich von Aussen und den grösseren Kreis von Innen berühren, dann entstehen durch die Bewegung von je zweien dieser Kreise auf dem dritten, welchen man sich als fest denkt, identische Rollcurven. Ein Punkt des Kreises $D$ beschreibt z. B. beim Rollen innerhalb des Kreises $D+d$ dieselbe Curve, wie ein Punkt des Kreises $d$. Hiedurch wird der obige Satz, worin die Rectification der Hypo- und Epicycloiden und ihre Aehnlichkeit mit den Evoluten ausgesprochen ist, verallgemeinert.

Taf. II. Fig. 8. Der Kreis $O$, dessen Durchmesser $d$ ist, rollt auf der innern Seite der Peripherie des Kreises $C$, dessen Durchmesser $D$. Wenn der Punkt $S$ zur Berührung kommt in $U$, so hat er einen Quadranten $SNU$ der Hypocycloide beschrieben; man fälle auf die Verlängerung der Tangente $NQ$ das Perpendikel $CT$. Nun ist

$$\text{Bogen } SN = 2\frac{D-d}{D}\cdot QN.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $CTQ$ und $QNP$ folgt:

$$TQ = \frac{D-2d}{2d}.QN, \quad TN = \frac{D}{2d}.QN.$$

Wenn $MN$ gleich dem Bogen $SN$ ist, so haben wir:

$$TM = \frac{(D-2d)^2}{2dD}\cdot QN = \frac{D-2d}{D}.TQ.$$

$CT$ und $TQ$ sind die Coordinaten eines Kreises, mithin sind $CT$ und $TM$ diejenigen einer Ellipse. Wenn man die Curve $SNU$ auf $CU$ rollt, so beschreibt der mit ihr fest verbundene und ihrer Bewegung folgende Punkt $C$ den Quadranten einer Ellipse, deren Halbaxen sind:

$$CQ = \frac{D-2d}{2} \text{ und } \frac{(D-2d)^2}{2D}.$$

Setzt man in diesen Formeln überall statt $-$ das Zeichen $+$, so passen sie auf die Epicycloide, welche entsteht, wenn der Kreis $O$ auf der äussern Seite der Peripherie des Kreises $C$ rollt. Es sei $o$ die Mitte von $CQ$ und $O't = O'C$; der Punkt $t$, welcher fest mit dem rollenden Kreis $O'$ verbunden ist und seiner Bewegung folgt, beschreibt eine verlängerte Hypocycloide, welche offenbar ähnlich ist der Curve, die der Punkt $T$ als Fusspunkt des von $C$ auf die Tangente von $N$ gefällten Perpendikels beschreibt; denn $O't$ ist stets parallel $oT$ und $Co:CO' = oT:O't$. Wir haben also nachstehende Sätze:

Wenn man einen Ast der Hypo- oder Epicycloide auf einer seiner Tangenten im Endpunkte rollt, so beschreibt der Mittelpunkt des festen Kreises, indem er der Bewegung folgt, eine halbe Ellipse, die nach dem Satz von Steiner so lang ist als die Fusspunktencurve der Hypo- oder Epicycloide, wenn die Perpendikel auf die Tangenten von seinem Mittelpunkt aus gefällt werden; genannte Fusspunktencurve ist selbst wieder eine verlängerte Hypo- oder Epicycloide.

Da diese Rollcurven, wie auch eine ihrer Evolventen rectificirbar sind, so folgt, dass sich die Rectification der übrigen Evolventen durch gerade Linien und Kreisbögen ausführen lässt. Die Eigenschaften, welche ich von den Evolventen der Hypocycloide mit vier Aesten entwickelt habe, lassen sich leicht auf die Evolventen der andern Rollcurven ausdehnen. Die Curven, welche die Fusspunkte der vom Mittelpunkt des festen Kreises auf die Tangenten oder auf die Normalen der Hypo- und Epicycloiden gefällten Perpendikel verbinden, sind einander ähnlich.

Taf. II. Fig. 9. Während der Kreis $O$ innerhalb des Kreises $C$ rollt und nach und nach die Punkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}$, $S$ in $P'$, $P$, $U$ zur Berührung kommen, hat der mit $O$ fest verbundene Punkt $A$ einen Quadranten der Rollcurve $A\mathfrak{p}'\mathfrak{p}F$ beschrieben. Wenn aber der Kreis $O$ innerhalb eines doppelt so grossen Kreises rollt, dessen Mittelpunkt $S$ ist, so hat der Punkt $A$, wenn die Punkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}$, $S$ zur Berührung kommen, den elliptischen Quadranten $A\Pi'\Pi E$ beschrieben. Es sei $A\mathfrak{P}' = p'$ und $A\mathfrak{P} = p$, dann ist

$$\text{der Bogen } A\Pi' = \int_0^{\omega'} p'd\omega', \quad \text{Bogen } E\Pi = \int_0^{\omega} pd\omega \text{ und}$$

$$\int_0^{\omega} pd\omega - \int_0^{\omega'} p'd\omega' = 2.OV.$$

Nun ist, wie man sich sehr leicht überzeugen kann,

$$\text{Bogen } A\mathfrak{p}' = 2\frac{D-d}{D}\int_0^{\omega'} p'd\omega', \quad \text{Bogen } F\mathfrak{p} = 2\frac{D-d}{d}\int_0^{\omega} pd\omega,$$

$$\text{also } F\mathfrak{p} - A\mathfrak{p}' = 4\frac{D-d}{D}.OV.$$

Da die Linie $A\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$ gleiche Winkel mit den Tangenten des Kreises $O$ in $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}$ macht, so müssen die von $C$ auf die Normalen $\mathfrak{p}'P'$ und $\mathfrak{p}P$ gefällten Perpendikel einander gleich sein. Nennen wir $\delta$ den gemeinschaftlichen Normalabstand der Punkte $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}$ von $C$, so führt die Aehnlichkeit von Dreiecken auf die Proportion:

$$\delta : OV = D : d, \quad \delta = \frac{D}{d}.OV, \text{ also } F\mathfrak{p} - A\mathfrak{p}' = 4\frac{D-d}{D^2}.d\delta.$$

Geht die Linie $A\mathfrak{P}$ in die Tangente über, dann fallen die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, $P$ und $P'$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, $\Pi$ und $\Pi'$ zusammen. Man erhält auf dem Quadranten der Rollcurve den ausgezeichneten

Punkt, der ihn in zwei Theile trennt, deren Unterschied ein Vielfaches von dem Normalabstand dieses Punktes ist. Die Quadranten $AF$ und $AE$ verhalten sich wie $2\frac{D-d}{D}:1$.

Hiemit ist nachgewiesen, dass sich für jede gegebene Ellipse beliebig viele gleich lange Curven construiren lassen, welche alle die Eigenschaft haben, dass ihre Quadranten durch zwei Punkte von gleichem Normalabstand in drei Abschnitte getheilt werden, wovon der Unterschied der beiden äussern ein Vielfaches dieses Normalabstands ist. Die Form dieser Curven ist sehr mannigfaltig. Sind $a$ und $b$ die Halbaxen der Ellipse, setzen wir $a-b=d$ und rollen den Kreis, dessen Durchmesser $d$, innerhalb eines beliebigen grösseren mit dem Durchmesser $D$, so beschreibt der Punkt, dessen grösste und kleinste Entfernung von der Peripherie des Kreises $d$ beziehungsweise gleich $a$ und $b$ ist, eine Rollcurve, deren Quadrant sich zum elliptischen Quadranten verhält wie $2\frac{D-d}{D}:1$. Rollt der kleinere Kreis ausserhalb des grösseren, so ist statt $-$ das Zeichen $+$ zu setzen. Man kann auch über $a+b$ als Durchmesser einen Kreis beschreiben; ein Punkt innerhalb dieses Kreises, dessen grösste und kleinste Entfernung von der Peripherie $a$ und $b$ ist, beschreibt eine Rollcurve, deren Länge zur Ellipse ebenfalls in einem leicht angebbaren Verhältniss steht. Durch entsprechende Verkleinerung oder Vergrösserung der entstandenen Rollcurven erhalten sie gleiche Länge mit der gegebenen Ellipse.

Setzen wir $D=\infty$, so wird $2\frac{D-d}{D}=2$. Eine verlängerte oder verkürzte Cycloide ist also doppelt so lang als die Ellipse, deren Halbaxen gleich der grössten und kleinsten Entfernung des beschreibenden Punktes von dem rollenden Kreise sind, wenn man von beiden Curven die Quadranten vergleicht. Diese Cycloiden sind so lang als die Fusspunktencurven, welche entstehen, wenn man von dem genannten Punkte auf die Tangenten des Kreises Perpendikel fällt. Solche Fusspunktencurven lassen noch zwei weitere Erzeugungsarten zu. Wenn ein Kreis ausserhalb eines gleichgrossen Kreises rollt, so beschreibt jeder mit ihm fest verbundene Punkt eine solche Curve. Es sei $A$ der Brennpunkt, $M$ ein Punkt auf dem Umfange eines Kegelschnitts, man nehme auf $AM$ oder der Verlängerung einen Punkt $M'$ an, so dass $AM.AM'=\text{const.}$ Dann liegt $M'$ auf der Fusspunktencurve eines Kreises. Bei der Ellipse liegt $A$ innerhalb, bei der Hyperbel ausserhalb, bei der Parabel auf dem Umfange des Kreises.

# IV.

## Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Verbindet man mit der Gleichung

$$(bc_1-cb_1)x+(ca_1-ac_1)y+(ab_1-ba_1)z=0$$

die eine oder die andere der beiden identischen Gleichungen:

$$(bc_1-cb_1)a+(ca_1-ac_1)b+(ab_1-ba_1)c=0$$

und

$$(bc_1-cb_1)a_1+(ca_1-ac_1)b_1+(ab_1-ba_1)c_1=0;$$

so erhält man sehr leicht die folgenden Gleichungen:

$$(bc_1-cb_1)(cx-az)=(ca_1-ac_1)(bz-cy),$$
$$(ca_1-ac_1)(ay-bx)=(ab_1-ba_1)(cx-az),$$
$$(ab_1-ba_1)(bz-cy)=(bc_1-cb_1)(ay-bx)$$

und

$$(bc_1-cb_1)(c_1x-a_1z)=(ca_1-ac_1)(b_1z-c_1y),$$
$$(ca_1-ac_1)(a_1y-b_1x)=(ab_1-ba_1)(c_1x-a_1z),$$
$$(ab_1-ba_1)(b_1z-c_1y)=(bc_1-cb_1)(a_1y-b_1x).$$

Also ist

$$\frac{ay-bx}{ab_1-ba_1}=\frac{bz-cy}{bc_1-cb_1}=\frac{cx-az}{ca_1-ac_1},$$

und

$$\frac{a_1y-b_1x}{ab_1-ba_1}=\frac{b_1z-c_1y}{bc_1-cb_1}=\frac{c_1x-a_1z}{ca_1-ac_1}$$

oder:

$$\begin{aligned} & ab_1-ba_1:bc_1-cb_1:ca_1-ac_1 \\ =\; & ay-bx:bz-cy:cx-az \\ =\; & a_1y-b_1x:b_1z-c_1y:c_1x-a_1z, \end{aligned}$$

welche Relationen also immer aus der Gleichung

$$(bc_1-cb_1)x+(ca_1-ac_1)y+(ab_1-ba_1)z=0$$

abgeleitet werden können, was zuweilen vortheilhafte Anwendung finden kann.

# V.

# Weitere Ausführung der politischen Arithmetik.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

(Fortsetzung von Nr. XXVII. Thl. XXXVI.)

---

## Viertes Kapitel.

## Ueber Staatsanleihen.

### §. 45.

### Allgemeine Bemerkungen.

Durch die im vorigen Kapitel aufgestellten Sätze sind die Mittel gegeben, welche bei der Werthberechnung der Staatsanleihen maassgebend auftreten.

Schliesst ein Staat eine Anleihe ab, so werden gewöhnlich die Bedingungen, unter welchen dieselbe verzinst und zurückgezahlt wird, zum Voraus durch einen Tilgungsplan festgestellt. Zur leichtern Durchführung des Anleihegeschäfts und um auch den kleinern Kapitalisten Gelegenheit zur Theilnahme zu bieten, stellt der Staat Schuldscheine im Betrage von Tausend, einem oder mehreren Hunderten, auch Halbhunderten in runder Zahl aus, die in der Regel von dem Gläubiger oder Besitzer nicht, sondern nur von dem Staate aufkündbar sind und nach dem festgestellten Plane und einer durch das Loos zu bestimmenden Ordnung zurückgezahlt werden.

Den Schuldscheinen ist eine Zinsanweisung (Coupon) angehängt, welche auf mehrere Jahre oder Halbjahre mit Angabe des Werthes und der Verfallzeit lautet, so dass der jeweilige Besitzer des Schuldscheins nur den bezüglichen Coupon vorzeigen darf, um gegen dessen Aushändigung den Betrag der verfallenen Zinse

bei den Staatskassen oder bei den vom Staate bezeichneten Bankhäusern in Empfang zu nehmen. Ist die Zinsanweisung aufgebraucht und der Schuldschein noch nicht getilgt, so wird sie durch eine neue, sich auf einen weitern Zeitraum erstreckende ersetzt. Zu dem Ende ist eine besondere Anweisung (Talon) dem Schuldschein beigedruckt, gegen deren Abgabe der bezügliche Zinsbogen ausgeliefert wird.

Gewöhnlich werden die Schuldscheine nicht auf eine bestimmte Person, sondern im Allgemeinen als solche, ohne Nennung eines Namens, für den Vorzeiger oder Ueberbringer (au porteur) gültig ausgestellt. Das Vorzeigen des Schuldscheines genügt, um sich als dessen Besitzer oder Inhaber auszuweisen. Sie können aber auch auf Verlangen, der Sicherheit wegen, auf den Namen einer bestimmten Person eingetragen werden.

Die Ausstellung der Staatsschuldscheine auf den Vorzeiger oder jeweiligen Inhaber erleichtert den Verkehr mit denselben, denn der Besitzer kann zu jeder Zeit einen solchen Schuldschein ganz nach Belieben gegen baares Geld verkaufen. Dadurch sind sie zur Waare geworden, die auf der Börse käuflich und verkäuflich ist. Die Summe, um welche ein solcher Schuldschein verhandelt wird oder verhandelt werden kann, heisst **Curs**, und man versteht hierunter den Betrag, welcher zu zahlen ist, um je 100 zu kaufen und der also kleiner oder grösser oder auch so gross (al pari) als 100 sein kann. Der Curs spielt, wie man später sehen wird, eine wichtige Rolle bei der Werthberechnung der Staatsanleihen oder Staatspapiere. Er hängt von dem Tilgungsplan, von der Zeit und dem Zinsfuss, nicht von der Grösse des aufgenommenen Capitals ab, denn es folgert sich leicht, dass unter gleichen Bedingungen der Curs der gleiche bleiben wird, wenn auch die Anleihe den doppelten, dreifachen oder $m$fachen Werth hat.

Hiebei zeigt der durch Berechnung gefundene Curs häufig einen andern Werth, als derjenige ist, welchen die Börse oder der Geldmarkt aufstellt, denn im letztern Falle spielt ein Factor, das **Vertrauen**, eine Hauptrolle, und dieser Factor entzieht sich bekanntlich aller und jeder Berechnung.

Bei Begebung der Staatsanleihen können verschiedene Wege gewählt werden, je nachdem der Geldmarkt, Zeitumstände, politische Verhältnisse, Stand des Handels u. s. w. günstig oder ungünstig sind und die finanzielle Lage oder der geordnete Haushalt des ausbietenden Staates Vertrauen erweckt.

Entweder eröffnet der Staat eine öffentliche Subscription oder er tritt mit einzelnen Unternehmern in Unterhandlung.

Im ersten Falle kann sich das grosse und kleine Kapital gleichzeitig dabei betheiligen und ein guter Erfolg wird nicht zu bezweifeln sein, wenn der Geldmarkt und die Zeitumstände günstig sind und die finanzielle Lage des Staates Vertrauen einflösst. Der Staat hat dann die subscribirten Summen selbst einzuheben.

Im zweiten Falle tritt der Staat nicht selbst mit den einzelnen Darleihern in Verbindung, sondern er überlässt einem Unternehmer oder einer Gesellschaft von Unternehmern nach festgestelltem Tilgungsplan und Zinsfuss und gegenseitiger Sicherheitsleistung die ganze Anleihe gegen Einzahlung eines bestimmten Preises und unter Gewährung irgend eines Vortheils zur Verwerthung. Es kann jedoch auch in diesem Falle eine öffentliche Concurrenz zur Uebernahme der ganzen Anleihe mit dem Anerbieten eingeleitet werden, dass die Anleihe demjenigen überlassen wird, welcher bei gehöriger Sicherheitsleistung die vortheilhaftesten Bedingungen stellt. Die Betretung des einen oder des andern Weges wird vorzugsweise durch Zeitverhältnisse bedingt sein.

In den beiden zuletzt genannten Fällen kann sich auch der kleinere Kapitalist betheiligen, indem der Unternehmer der ganzen Anleihe weiter mit andern Personen in Verbindung tritt, die ihm bei Verwerthung der Anleihe behülflich sind, selbst wieder gegen Gewährung bestimmter Vortheile Theile der Anleihe übernehmen und für deren Unterbringung sorgen.

Eröffnet nun der Staat bei Aufnahme einer Anleihe die Subscription selbst, so ist es nicht ungewöhnlich, dass er, um grössere Betheiligung hervorzurufen, Vortheile den Unterzeichnern gewährt und bei einem bestimmten Zinsfuss einen niedern Curs als 100 gestattet und dafür Schuldscheine im vollen Werthe für jedes Hundert ausgibt. So hat Preussen im Jahre 1859 eine Einzahlung von 95 statt 100 bei einer fünfprocentigen und Baden eine Einzahlung von 96 statt 100 bei einer vierprocentigen Anleihe gestattet.

Wird aber eine allgemeine Concurrenz für die ganze Anleihe bei bestimmtem Tilgungsplan und Zinsfuss eröffnet, so kömmt häufig der Fall vor, dass Anerbieten zur Uebernahme einlaufen, bei denen ein niederer Curs und niederer Zinsfuss vorgeschlagen wird.

Hiedurch tritt die Werthbestimmung der möglichen Angebote in eine neue Phase, und es entsteht die Frage: Welches ist das vortheilhafteste Anerbieten, wenn auf eine Anleihe von bestimmtem Tilgungsplan und Zinsfuss verschiedene Anerbieten mit bestimmtem Curse in einem andern Zinsfuss gemacht werden?

Diese Frage wird nun zunächst zu beantworten sein. Eine besondere Art der Staatsanleihen sind die Lotterieanleihen. Da dieselben in meiner Schrift: „Theorie der Lotterieanlehen, Freiburg 1843“ und auch in meiner Anleitung schon behandelt sind, so erscheint ihre Wiederbehandlung überflüssig und ich verweise hierüber auf die angeführten Schriften.

## § 46.

### Umwandlung einer in einem bestimmten Tilgungsplane und Zinsfusse zu zahlenden Anleihe in eine gleichwerthige bei demselben Tilgungsplan aber verschiedenen Zinsfuss.

1) Eine Anleihe $K$ soll zu $p$ Procent verzinst und nach einem bestimmten Tilgungsplan in $n$ Jahren zurückbezahlt werden. Es wird verlangt, dass dieselbe unter Beibehaltung des festgestellten Tilgungsplans in eine gleichwerthige bei dem Zinsfuss $q$ umgewandelt werde. Es fragt sich:

a) Welches ist der Nennwerth $K_1$ der umgewandelten Anleihe?

b) Welches ist der Curs $C$, zu welchem sie in dem Zinsfuss $q$ begeben werden kann?

Die erste Frage beantwortet sich im Allgemeinen sehr leicht. Ist nämlich der Tilgungsplan für die Abtragung einer Anleihe nach den Grundsätzen des dritten Kapitels und die Werthe sämmtlicher Summen (Zins und Kapitalabtragungen), die im Laufe der Zeit fällig werden, $L_1$, $L_2$, $L_3$, .... $L_n$, festgestellt, so kommt ihr Gesammtwerth dem der Anleihe gleich. Wird nun der Werth sämmtlicher in dem Zinsfuss $p$ festgestellten Zahlungen in dem Zinsfuss $q$ auf die Gegenwart zurückgebracht oder rabattirt, so ist die unter $a$ gestellte Aufgabe gelöst, denn es wird dadurch an dem Werthe oder dem Inhalte der Anleihe nichts, sondern nur an der Form geändert. Es entsteht aber dem Namen nach eine andere Summe, welche der Nennwerth $K_1$ der umgewandelten Anleihe heissen soll, denn es ist in der That für den Schuldner einerlei, ob er die schuldigen Summen als eine $p$- oder $q$procentige Anleihe zurück bezahlt. In dem einen oder andern Falle werden immer nur die im Voraus bedungenen Summen (nicht mehr,

nicht weniger) ausbezahlt und es hat sich bei Abwickelung des Geschäfts nur die Form oder der Name, nicht der Inhalt geändert.

Eine nothwendige Folge dieser Umwandlung ist, dass der sich ergebende Nennwerth $K_1$ grösser wird, als $K$ das ursprüngliche Kapital, wenn $q$ kleiner als $p$ ist, was gewöhnlich der Fall sein wird; dagegen kleiner wird, wenn $q$ grösser als $p$ ist, was wohl kaum vorkommt, da es nicht im Interesse der Speculation und der Börse liegt.

Das Gesagte wird sich leicht an folgendem einfachen Falle verdeutlichen.

Ein Kapital von 1071200 soll mit 5 Procent verzinst und am Ende des Jahres sammt Zinsen zurückgezahlt werden. Man verlangt, dass dasselbe in ein gleichwerthiges 4- oder 3procentiges verwandelt und als solches am Ende des Jahres sammt Zinsen zurückgezahlt werde. Wie gross ist der Nennwerth des Kapitals in beiden Fällen?

Man hat nach dem Gesagten zuerst die Schuldigkeit der fünfprocentigen Anleihe am Ende des Jahres (also Kapital und Zins) zu bestimmen. Es ist:

$$L_1 = 1071200 + 1071200 . 0{,}05 = 1124760.$$

Verwandelt man nun diese Schuldigkeit in eine 4procentige, so hat man mit 1,04 zu rabattiren. Der sich ergebende Nennwerth ist daher:

$$K_1 = \frac{L_1}{1{,}04} = \frac{1124760}{1{,}04} = 1081500.$$

Verwandelt man die Anleihe in eine 3procentige, so ist der gesuchte Nennwerth:

$$K_2 = \frac{L_1}{1{,}03} = \frac{1124760}{1{,}03} = 1092000.$$

Die beiden Nennwerthe sind von der ursprünglichen Schuld und unter sich verschieden, und um so grösser, je kleiner der Zinsfuss ist, für welchen die Umwandlung verlangt wird. Nominell hat nun der Schuldner eine grössere Schuld zu tilgen, in Wirklichkeit aber nicht. Wird nämlich die Summe 108150 als eine 4procentige getilgt, so hat er am Ende des Jahres Kapital und Zins zu zahlen:

$$L_2 = 1081500 + 1081500 . 0{,}04 = 1124760.$$

Wird die Summe 1092000 als eine 3procentige zurückgezahlt, so ist zu entrichten:

$$L_3 = 1092000 + 1092000 . 0,03 = 1124760.$$

Er zahlt daher nach allen drei Arten gleich viel am Ende des Jahres.

Wie nun die Zahlungssumme des ersten Jahres in dem vorliegenden Falle behandelt wurde, so hat man, wenn der Tilgungsplan sich auf eine Reihe von Jahren erstreckt, sämmtliche fällig werdenden Summen zu behandeln und der Zeit entsprechend zu rabattiren. Wird nun die Anleihe $K$ durch die im Zinsfuss $p$ festgestellten Summen $L_1$, $L_2$, $L_3$, .... $L_n$ verzinst und getilgt, so hat man für ihre Umwandlung in den Zinsfuss $q$ folgende allgemein gültige Gleichung:

2) $$K_1 = \frac{L_1}{1,0q} + \frac{L_2}{1,0q^2} + \frac{L_3}{1,0q^3} + \dots \frac{L_n}{1,0q^n}.$$

Diese Gleichung bestimmt den Nennwerth für jährliche Verzinsung und Tilgung. Geschieht aber die Verzinsung und Tilgung halbjährlich, so ist:

3) $$K_1 = \frac{L_1}{1,0q_1} + \frac{L_2}{1,0q_1{}^2} + \frac{L_3}{1,0q_1{}^3} + \dots \frac{L_{2n}}{1,0q_1{}^{2n}}.$$

Dass $K_1 > K$ sein muss, wenn $q < p$ ist, ergibt sich einfach aus den im ersten Kapitel aufgestellten Sätzen. Dort wurde gezeigt, dass wenn die Werthe sämmtlicher Zahlungen, wodurch eine Anleihe $K$ getilgt und verzinst wird, in dem gleichen Zinsfuss rabattirt werden, worin die Anleihe verzinst wird, der hieraus fliessende Werth der aufgenommenen Anleihe gleich kommt. Werden nun sämmtliche Werthe in einem niederen Zinsfuss ($q$) rabattirt, so ist die nothwendige Folge, dass der aus ihnen hervorgehende Gesammtwerth grösser als die ursprüngliche Anleihe ist. Umgekehrt muss $K_1 < K$ sein, wenn $q > p$ wird, was, wie bemerkt, in der Wirklichkeit nicht wohl vorkommt und daher hier auch keine Berücksichtigung findet.

Hiemit ist die unter a) gestellte Frage beantwortet.

Zu b). Der Curs $C$, welcher dem Nennwerthe $K_1$ entspricht, bestimmt sich einfach durch folgende Proportion:

$$K_1 : K = 100 : C,$$

denn der Nennwerth steht zu dem Werthe der Anleihe in gleichem Verhältniss wie 100 zu dem Curs. Es ist daher:

4) $$C = \frac{K . 100}{K_1}.$$

Diess lässt sich auch so erschliessen. Wenn der Staat eine An-

leihe im Curse zu 100 (al pari) ausgibt, so muss er so viele Schuldscheine zu je Hundert aushändigen, als Hunderte vorhanden sind. Nennt man die Zahl der Schuldscheine $Z$, so ist

$$Z=\frac{K}{100},$$

und die Ausgabe von $Z$ Schuldscheinen im vollen Werthe wird ihm die aufzunehmende Anleihe einbringen, denn er erhält hiedurch:

$$5)\qquad S=Z.100=\frac{K.100}{100}=K.$$

Wird aber die Anleihe in eine gleichwerthige für den Zinsfuss $q$ umgewandelt, so muss er nominell ein höheres Kapital $K_1$ aufnehmen, aber niederer verzinsen. Er wird daher auch eine grössere Zahl von Schuldscheinen:

$$Z_1=\frac{K_1}{100},$$

die alle auf 100 lauten, ausstellen müssen, um die gleiche Baarsumme zu erhalten. Er wird aber nicht den vollen Werth 100 für jeden Schuldschein, sondern nur $C$ fordern dürfen, um den Werth der Anleihe eingezahlt zu erhalten. Der hiefür eingehende Betrag ist:

$$6)\qquad S=Z_1 C.$$

Aus 5) und 6) hat man, da der Staat in beiden Fällen die gleiche Summe erhalten soll,

$$K=Z_1 C=S,$$

und hieraus:

$$7)\qquad C=\frac{K}{Z_1}=\frac{K.100}{K_1},$$

wie oben.

Wendet man nun die Bestimmung No. 4) oder No. 7) auf den oben behandelten Fall an, so stellt sich der Curs für die 5procentige Anleihe von 1071200, wenn sie in eine gleichwerthige 4procentige verwandelt wird, auf:

$$C=\frac{1071200.100}{1081500}=99{,}047....,$$

für die 3procentige auf:

$$C_1=\frac{1071200.100}{1092000}=98{,}095....,$$

und ein Schuldschein von 100 ist im ersten Falle 99,047...., im zweiten Falle 98,095.... werth, und in der That erhält der Staat im ersten Falle die Summe:

$$S = K_1 C = 10815.99,047.... = 1071199,99....,$$

im zweiten Falle:

$$S = K_2 C_1 = 10920.98,095.... = 1071199,99...$$

oder 1071200 für die betreffenden Schuldscheine in die Kasse.

Führt man die in No. 2) und No. 3) gefundenen Werthe statt $K_1$ in die Gleichung No. 4) ein, so ergibt sich zur Bestimmung des Curses bei jährlicher und halbjährlicher Verzinsung und Tilgung

$$8)\qquad C = \frac{K.100}{L_1.1,0q^{-1} + L_2.1,0q^{-2} + .... L_n.1,0q^{-n}},$$

$$9)\qquad C = \frac{K.100}{L_1.1,0q_1{}^{-1} + L_2.1,0q_1{}^{-2} + .... L_{2n}.1,0q_1{}^{-2n}}.$$

Ist aber, wie hier vorausgesetzt ist, der Werth der Anleihe $K$ nicht bekannt, sondern nur die nach dem Tilgungsplane im Zinsfusse $p$ zu zahlenden Summen, dann hat man zur Bestimmung des Curses vorerst $K$ zu berechnen, d. h. mit $1,0p$ und $1,0p_1$ zu rabattiren und den so erhaltenen Werth für $K$ in No. 8) und No. 9) einzuführen. Man erhält dann für jährliche und halbjährliche Verzinsung und Tilgung folgende Bestimmungen:

$$10)\qquad C = 100\frac{L_1.1,0p^{-1} + L_2.1,0p^{-2} + .... L_n.1,0p^{-n}}{L_1.1,0q^{-1} + L_2.1,0q^{-2} + .... L_n.1,0q^{-n}},$$

$$11)\qquad C = 100\frac{L_1.1,0p_1{}^{-1} + L_2.1,0p_1{}^{-2} + .... L_{2n}.1,0p_1{}^{-2n}}{L_1.1,0q_1{}^{-1} + L_2.1,0q_1{}^{-2} + .... L_{2n}.1,0q_1{}^{-2n}}.$$

Von den im vorigen Kapitel angegebenen Tilgungsplänen eignen sich vorzüglich drei zur Umwandlung in einen andern Zinsfuss: wenn die Anleihe durch gleiche Summen, oder wenn sie durch Tilgungssummen, die nach einer geometrischen Progression fortschreiten, oder wenn sie durch gleiche Tilgungssummen abgetragen wird. Sie sollen im Folgenden betrachtet werden.

## §. 47.

### Umwandlung einer Anleihe in eine gleichwerthige von anderm Zinsfuss, wenn dieselbe durch gleiche Abtragssummen getilgt werden soll.

Soll eine im Zinsfuss $p$ durch gleiche Abtragssummen ($A$) zu

tilgende Anleihe $K$ in eine gleichwerthige bei dem Zinsfuss $q$ umgewandelt werden, so hat man die in No. 1) §. 32. angegebenen Werthe der Reihe nach in dem Zinsfuss $q$ auf die Gegenwart zurückzubringen oder zu rabattiren, wie diess die Gleichung No. 2) §. 46. vorschreibt. Man erhält dann bei jährlicher Verzinsung und Tilgung folgende Darstellung:

$$1)\qquad K_1 = \frac{A+K.0{,}0p}{1{,}0q}$$
$$+\frac{A+K.0{,}0p}{1{,}0q^2}-\frac{A.0{,}0p}{1{,}0q^2}$$
$$+\frac{A+K.0{,}0p}{1{,}0q^3}-\frac{2A.0{,}0p}{1{,}0q^3}$$
$$+\frac{A+K.0{,}0p}{1{,}0q^4}-\frac{3A.0{,}0p}{1{,}0q^4}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{A+K.0{,}0p}{1{,}0q^n}-\frac{(n-1)A.0{,}0p}{1{,}0q^n}.$$

Setzt man nun $L=A+K.0{,}0p$ und $D=A.0{,}0p$ und $q$ statt $p$ in No. 1) und No. 5) §. 43., so geht die vorstehende Darstellung No. 1) in folgende über:

$$2)\qquad K_1=\left(A+K.0{,}0p-\frac{A.0{,}0p}{0{,}0q}\right).\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q}$$
$$+\frac{nA.0{,}0p}{0{,}0q.1{,}0q^n}.$$

Schliesst die Tilgungszeit nicht mit dem Ende eines Jahres, besteht also $n$ aus einer ganzen Zahl und einem Bruche, so wird die Rechnung etwas mühevoller. Man kann diese Schwierigkeit umgehen, wenn man die Restschuld für das Ende des $n$ten Jahres bestimmt und in Rechnung bringt. Bezeichnet man sie mit $S_n$, so erhält man folgende Gleichung:

$$3)\qquad K_1=\left(K.0{,}0p+A-\frac{A.0{,}0p}{0{,}0q}\right).\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q}$$
$$+\frac{nA.0{,}0p}{0{,}0q.1{,}0q^n}+\frac{S_n}{1{,}0q^n}.$$

Geschieht die Verzinsung halbjährlich, die Tilgung aber jährlich, so hat man die Glieder der Reihe No. 8) §. 32. halbjährlich zu rabattiren, wodurch entsteht:

$$4)\qquad K_1 = \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1}$$
$$+\frac{A+K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^2}$$
$$+\frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^3}-\frac{A.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^3}$$
$$+\frac{A+K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^4}-\frac{A.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^4}$$
$$+\frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^5}-\frac{2A.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^5}$$
$$+\frac{A+K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^6}-\frac{2A.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^6}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n-1}}-\frac{(n-1)A.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n-1}}$$
$$+\frac{A+K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n}}-\frac{(n-1)A.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

Setzt man nun hierin $K.0{,}0p_1 = L$, $A+K.0{,}0p_1 = L_1$, $A.0{,}0p_1 = D$, so löst sich diese Darstellung in folgende zwei Reihen auf:

$$K_1 = \frac{L}{1{,}0q_1}+\frac{L-D}{1{,}0q_1{}^3}+\frac{L-2D}{1{,}0q_1{}^5}+\ldots\frac{L-(n-1)D}{1{,}0q_1{}^{2n-1}}$$
$$+\frac{L_1}{1{,}0q_1{}^2}+\frac{L-D}{1{,}0q_1{}^4}+\frac{L-2D}{1{,}0q_1{}^6}+\ldots\frac{L-(n-1)D}{1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

Die erste Reihe lässt sich auf die Form der zweiten zurückbringen, wenn man mit $1{,}0q_1$ multiplicirt und dividirt, und es wird:

$$K_1 = 1{,}0q_1\left(\frac{L}{1{,}0q_1{}^2}+\frac{L-D}{1{,}0q_1{}^4}+\frac{L-2D}{1{,}0q_1{}^6}+\ldots\frac{L-(n-1)D}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right)$$
$$+\frac{L_1}{1{,}0q_1{}^2}+\frac{L_1-D}{1{,}0q_1{}^4}+\frac{L_1-2D}{1{,}0q_1{}^6}+\ldots\frac{L-(n-1)D}{1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

Diese beiden Reihen lassen sich nun leicht nach den in §. 43. gegebenen Entwickelungen summiren, wenn man dort in No. 1) und No. 5) $1{,}0q_1{}^2$ statt $1{,}0p$ und $1{,}0q_1{}^2-1$ an die Stelle von $0{,}0p = 1{,}0p-1$ setzt. Man erhält sofort:

$$K_1 = 1{,}0q_1\left(L-\frac{D}{1{,}0q_1{}^2-1}\right).\frac{1-1{,}0q_1{}^{-2n}}{1{,}0q_1{}^2-1}+\frac{n.D.1{,}0q_1}{(1{,}0q_1{}^2-1)\,1{,}0q_1{}^{2n}}$$
$$+\left(L_1-\frac{D}{1{,}0q_1{}^2-1}\right).\frac{1-1{,}0q_1{}^{-2n}}{1{,}0q_1{}^2-1}+\frac{nD}{(1{,}0q_1{}^2-1)\,1{,}0q_1{}^{2n}},$$

und hieraus nach der nöthigen Zusammenzählung und Vereinfachung:

$$K_1 = (L_1 + 1{,}0q_1 L - \frac{2{,}0q_1 D}{1{,}0q_1{}^2 - 1}) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{1{,}0q_1{}^2 - 1} + \frac{2{,}0q_1 n D}{(1{,}0q_1{}^2 - 1)\, 1{,}0q_1{}^{2n}},$$

oder da $1{,}0q_1{}^2 - 1 = (1{,}0q_1 + 1) \cdot (1{,}0q_1 - 1) = 2{,}0q_1 \cdot 0{,}0q_1$ ist:

$$5)\quad K_1 = (L_1 + L \cdot 1{,}0q_1 - \frac{D}{0{,}0q_1}) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{1{,}0q_1{}^2 - 1} + \frac{nD}{0{,}0q_1 \cdot 1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

Führt man nun die obigen Werthe wieder ein, so ist:

$$L_1 + L \cdot 1{,}0q_1 = A + K \cdot 0{,}0p_1 + K \cdot 0{,}0p_1 \cdot 1{,}0q_1 = K \cdot 0{,}0p_1 \cdot 2{,}0q_1 + A,$$

und man erhält mit Rücksicht auf die Restschuld:

$$6)\quad K_1 = (K \cdot 0{,}0p_1 \cdot 2{,}0q_1 + A - \frac{A \cdot 0{,}0p_1}{0{,}0q_1}) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{1{,}0q_1{}^2 - 1}$$
$$+ \frac{nA \cdot 0{,}0p_1}{0{,}0q_1 \cdot 1{,}0q_1{}^{2n}} + \frac{S_n}{1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

Ist $n$ eine ganze Zahl, so ist $S_n = 0$. Im andern Falle wird der Werth von $S_n$ auf die früher angegebene Weise bestimmt.

Geschieht aber die Verzinsung und Tilgung halbjährlich, dann ist aus No. 12) §. 32., wenn mit $1{,}0q_1$ rabattirt wird:

$$7)\quad K_1 = \frac{A + K \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0q_1}$$
$$+ \frac{A + K \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^2} - \frac{A \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^2}$$
$$+ \frac{A + K \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^3} - \frac{2A \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{A + K \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n}} - \frac{(2n-1)\, A \cdot 0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

Diese Darstellung führt, wenn man wie in No. 1) und No. 2) verfährt, zu folgender Bestimmung:

$$8)\quad K_1 = (K \cdot 0{,}0p_1 + A - \frac{A \cdot 0{,}0p_1}{0{,}0q_1}) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1}$$
$$+ \frac{2nA \cdot 0{,}0p_1}{0{,}0q_1 \cdot 1{,}0q_1{}^{2n}} + \frac{S_{2n}}{1{,}0q_1{}^{2n}},$$

worin $S_{2n}$ die Restschuld des letzten Halbjahres bedeutet, die Zahl der Halbjahre kann auch eine ungerade $(2n+1)$ sein.

Ist der Nennwerth $K_1$ gefunden, so unterliegt die Werthbestimmung des Curses nach No. 4) §. 46. keiner weitern Schwierigkeit mehr.

## §. 48.

### Umwandlung einer Anleihe in eine gleichwerthige von anderm Zinsfuss, wenn dieselbe durch Tilgungssummen zurückgezahlt wird, die in einer geometrischen Progression wachsen.

Soll eine im Zinsfusse $p$ zu verzinsende Anleihe $K$ durch Summen getilgt werden, die in einer geometrischen Progression $(1{,}0w)$ steigen und sofort in eine gleichwerthige für den Zinsfuss $q$ umgesetzt werden, so kommen die Gleichungen des §. 39. zur Anwendung und man hat dieselben in dem entsprechenden Zinsfusse zu rabattiren. Für die jährliche Verzinsung und Tilgung ergibt sich der Nennwerth der Anleihe aus No. 5) §. 39., wenn die Glieder der dritten Reihe aufgelöst und die entstehenden Reihen ergänzt werden, durch folgende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
1)\ K_1 = {} & \frac{A}{1{,}0q} && + \frac{K.0{,}0p}{1{,}0q} - \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w.1{,}0q} && + \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w.1{,}0q} \\
& + \frac{A.1{,}0w}{1{,}0q^2} && + \frac{K.0{,}0p}{1{,}0q^2} - \frac{A.0{,}0p.1{,}0w}{0{,}0w.1{,}0q^2} && + \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w.1{,}0q^2} \\
& + \frac{A.1{,}0w^2}{1{,}0q^3} && + \frac{K.0{,}0p}{1{,}0q^3} - \frac{A.0{,}0p.1{,}0w^2}{0{,}0w.1{,}0q^3} && + \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w.1{,}0q^3} \\
& + \frac{A.1{,}0w^3}{1{,}0q^4} && + \frac{K.0{,}0p}{1{,}0q^4} - \frac{A.0{,}0p.1{,}0w^3}{0{,}0w.1{,}0q^4} && + \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w.1{,}0q^4} \\
& \quad \cdots && \cdots && \cdots \\
& + \frac{A.1{,}0w^{n-1}}{1{,}0q^n} && + \frac{K.0{,}0p}{1{,}0q^n} - \frac{A.0{,}0p.1{,}0w^{n-1}}{0{,}0w.1{,}0q^n} && + \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w.1{,}0q^n}.
\end{aligned}
$$

Es entstehen wie man sieht vier verschiedene Reihen, von denen die zweite und vierte sich leicht summirt. Die erste und dritte unterliegen dem gleichen, aber etwas zusammengesetztern Gesetze. Sie führen zu folgender Darstellung:

$$2)\quad K_1 = \left(A - \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w}\right).\left(\frac{1}{1{,}0q} + \frac{1{,}0w}{1{,}0q^2} + \frac{1{,}0w^2}{1{,}0q^3} + \ldots \frac{1{,}0w^{n-1}}{1{,}0q^n}\right)$$

$$+ K.0{,}0p \cdot \frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q} + \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w} \cdot \frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q}.$$

Die eingeschlossene Reihe ist eine geometrische, deren erstes und letztes Glied gegeben sind und deren Exponent $\frac{1{,}0w}{1{,}0q}$ ist. Ihre Summe ist daher:

$$S = \frac{\frac{1{,}0w^{n-1}}{1{,}0q^n} \cdot \frac{1{,}0w}{1{,}0q} - \frac{1}{1{,}0q}}{\frac{1{,}0w}{1{,}0q} - 1} = \frac{\frac{1{,}0w^n}{1{,}0q^n} - 1}{1{,}0w - 1{,}0q}.$$

Hiernach bestimmt sich der gesuchte Nennwerth $K_1$, wenn man diesen Werth in No. 2) einführt und auf die Restschuld Rücksicht nimmt für den Fall, als $n$ keine ganze Zahl bedeutet, durch folgende Gleichung:

$$3)\qquad K_1 = \left(A - \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w}\right).\frac{\frac{1{,}0w^n}{1{,}0q^n} - 1}{1{,}0w - 1{,}0q}$$

$$+ \left(K.0{,}0p + \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w}\right).\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q} + \frac{S_n}{1{,}0q^n}.$$

Diese Darstellung ist bequem, wenn $w > q$ ist. Ist aber $w < q$, so eignet sich folgende Darstellung besser zur Benutzung:

$$4)\qquad K_1 = \left(A - \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w}\right).\frac{1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q^n}}{1{,}0q - 1{,}0w}$$

$$+ \left(K.0{,}0p + \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w}\right).\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q} + \frac{S_n}{1{,}0q^n}.$$

Der Werth für $S_n$ bestimmt sich aus:

$$5)\qquad S_n = K - A.\frac{1{,}0w^n - 1}{0{,}0w}$$

und geht in 0 über, wenn $n$ eine ganze Zahl ist.

Geschieht die Verzinsung halbjährlich und die Tilgung jährlich, so hat man die Darstellung No. 16) §. 39. mit $1{,}0q_1$ zu rabattiren, um den fraglichen Nennwerth zu finden. Dadurch wird aber der Calcul noch zusammengesetzter, als im vorigen Falle. Es entsteht dann:

6)

$$\begin{aligned}
K_1 = \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1} & & - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1} \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^2} & + \frac{A}{1{,}0q_1{}^2} & - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^2} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^2} \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^3} & & - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^3} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^3} \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^4} & + \frac{A.1{,}0w}{1{,}0q_1{}^4} & - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^4} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^4} \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^5} & & - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^2}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^5} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^5} \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^6} & + \frac{A.1{,}0w^2}{1{,}0q_1{}^6} & - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^2}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^6} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^6} \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^7} & & - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^3}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^7} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^7} \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^8} & + \frac{A.1{,}0w^3}{1{,}0q_1{}^8} & - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^3}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^8} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^8} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n-1}} & & - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^{n-1}}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^{2n-1}} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^{2n-1}} \\
+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n}} & + \frac{A.1{,}0w^{n-1}}{1{,}0q_1{}^{2n}} & - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^{n-1}}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^{2n}} & + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^{2n}}.
\end{aligned}$$

Diese Darstellung zerfällt in vier Reihen. Die erste und vierte summiren sich leicht. Die dritte Reihe zerfällt in zwei verschiedene, wovon sich die eine durch Multipliciren und Dividiren mit $1{,}0q_1$ auf die gleiche Form mit der andern zurückbringen lässt. Geschieht diess, so erhält man hieraus Folgendes:

$$\begin{aligned}
K_1 = \; & K.0{,}0p_1 . \frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1} + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w} . \frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1} \\
& + A.\left(\frac{1}{1{,}0q_1{}^2} + \frac{1{,}0w}{1{,}0q_1{}^4} + \frac{1{,}0w^2}{1{,}0q_1{}^6} + \ldots \frac{1{,}0w^{n-1}}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right) \\
& - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0q_1}{0{,}0w} . \left(\frac{1}{1{,}0q_1{}^2} + \frac{1{,}0w}{1{,}0q_1{}^4} + \frac{1{,}0w^2}{1{,}0q_1{}^6} + \ldots \frac{1{,}0w^{n-1}}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right) \\
& - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w} . \left(\frac{1}{1{,}0q_1{}^2} + \frac{1{,}0w}{1{,}0q_1{}^4} + \frac{1{,}0w^2}{1{,}0q_1{}^6} + \ldots \frac{1{,}0w^{n-1}}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right).
\end{aligned}$$

Die drei eingeklammerten Reihen unterliegen dem gleichen Gesetz. Das erste und letzte Glied dieser Reihen ist gegeben und ihr Exponent ist $\frac{1{,}0w}{1{,}0q_1^2}$. Ihre Summe ist daher:

$$S = \frac{\frac{1{,}0w^{n-1}}{1{,}0q_1^{2n}} \cdot \frac{1{,}0w}{1{,}0q_1^2} - \frac{1}{1{,}0q_1^2}}{\frac{1{,}0w}{1{,}0q_1^2} - 1} = \frac{\frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}} - 1}{1{,}0w - 1{,}0q_1^2}.$$

Wird dieser Werth eingeführt und werden die den gleichen Summenausdrücken zugehörigen Vorzahlen zusammengezählt, so erhält man zur Bestimmung des gesuchten Nennwerthes mit Rücksicht auf die Restschuld, wenn $n$ keine ganze Zahl bedeutet, folgende Gleichung:

$$7) \qquad K_1 = \left(K.0{,}0p_1 + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1}$$
$$+ \left(A - \frac{A.0{,}0p_1.2{,}0q_1}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{\frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}} - 1}{1{,}0w - 1{,}0q_1^2} + \frac{S_n}{1{,}0q_1^{2n}}.$$

Diese Darstellung ist bequem, wenn $1{,}0w > 1{,}0q_1^2$ ist. Ist aber $1{,}0q_1^2 > 1{,}0w$, so eignet sich folgende Form besser zur Berechnung des Nennwerthes:

$$8) \qquad K_1 = \left(K.0{,}0p_1 + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1}$$
$$+ \left(A - \frac{A.0{,}0p_1.2{,}0q_1}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}}{1{,}0q_1^2 - 1{,}0w} + \frac{S_n}{1{,}0q_1^{2n}}.$$

$S_n$ wird durch die Gleichung No. 5) bestimmt.

Geschieht aber die Verzinsung und Tilgung halbjährlich und wächst die Tilgungssumme halbjährlich um $w$ Procent (was zulässig ist, da $w$ jeden Werth bedeuten kann), und soll die Anleihe in eine gleichwerthige für den Zinsfuss $q$ umgesetzt werden, so hat man die Darstellung No. 21) §. 39. zu benutzen. Löst man die dritte Reihe in ihre Glieder auf und vervollständigt durch Zu- und Abzählen von $\frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}$ die beiden hiedurch entstehenden Reihen, so gewinnt man:

9)

$$K_1 = \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1} + \frac{A}{1{,}0q_1} \quad - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1} \quad + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1}$$

$$+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^2} + \frac{A.1{,}0w}{1{,}0q_1{}^2} \quad - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^2} \quad + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^2}$$

$$+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^3} + \frac{A.1{,}0w^2}{1{,}0q_1{}^3} \quad - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^2}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^3} \quad + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^3}$$

$$+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^4} + \frac{A.1{,}0w^3}{1{,}0q_1{}^4} \quad - \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^3}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^4} \quad + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n}} + \frac{A.1{,}0w^{2n-1}}{1{,}0q_1{}^{2n}} + \frac{A.0{,}0p_1.1{,}0w^{2n-1}}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^{2n}} + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w.1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

Die erste und vierte Reihe summiren sich leicht, die zweite und dritte lässt sich in eine zusammenziehen und man erhält hiedurch:

$$K_1 = K.0{,}0p_1 \frac{1-1{,}0q_1{}^{2n}}{0{,}0q_1} + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w} \cdot \frac{1-1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1}$$

$$+ \left(A - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right) . \left(\frac{1}{1{,}0q_1} + \frac{1{,}0w}{1{,}0q_1{}^2} + \frac{1{,}0w^2}{1{,}0q_1{}^3} + \cdots \frac{1{,}0w^{2n-1}}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right).$$

Die eingeklammerte Reihe gibt nach dem früher Gesagten folgenden Summenausdruck:

$$S = \frac{\frac{1{,}0w^{2n}}{1{,}0q_1{}^{2n}} - 1}{1{,}0w - 1{,}0q_1} = \frac{1 - \frac{1{,}0w^{2n}}{1{,}0q_1{}^{2n}}}{1{,}0q_1 - 1{,}0w}.$$

Hiernach bestimmt sich für diesen Fall der Nennwerth für die umgewandelte Anleihe mit Berücksichtigung der Restschuld durch Einführung auf folgende Weise:

10) $$K_1 = \left(K.0{,}0p_1 + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right) . \frac{1-1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1}$$

$$+ \left(A - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right) . \frac{\frac{1{,}0w^{2n}}{1{,}0q_1{}^{2n}} - 1}{1{,}0w - 1{,}0q_1} + \frac{S_{2n}}{1{,}0q_1{}^{2n}}$$

oder:

11) $$K_1 = \left(K.0{,}0p_1 + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right) . \frac{1-1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1}$$

$$+ \left(A - \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right) . \frac{1 - \frac{1{,}0w^{2n}}{1{,}0q_1{}^{2n}}}{1{,}0q_1 - 1{,}0w} + \frac{S_{2n}}{1{,}0q_1{}^{2n}},$$

je nachdem $w > q_1$ oder $q_1 > w$ ist. Die Restschuld bestimmt sich durch:

12) $$S_{2n} = K - A.\frac{1{,}0w^{2n}-1}{0{,}0w}.$$

Ist der Nennwerth $K_1$ gefunden, so ermittelt sich in den vorstehenden Fällen der Curs leicht.

## §. 49.

### Umwandlung einer Anleihe in eine gleichwerthige von anderm Zinsfuss, wenn die Tilgung und Verzinsung durch gleich grosse Summen geschieht.

Soll eine im Zinsfuss $p$ zu verzinsende Anleihe $K$ durch gleich grosse Summen (Zins und Abtragsummen einbegriffen) getilgt und in eine gleichwerthige für den Zinsfuss $q$ umgewandelt werden, so vereinfachen sich die in §. 46. aufgestellten Bestimmungen sehr. Man hat dann die Grösse der Zahlungssummen zu bestimmen, die erfordert werden, um die Anleihe in dem Zinsfusse $p$ zu tilgen und dann ihren Werth in den Zinsfuss $q$ umzusetzen.

Geschieht die Verzinsung und Tilgung jährlich und nennt man die Summe, welche nach dem Tilgungsplan jährlich zu zahlen ist, $L$, so hat man für ihre Bestimmung:

$$K = \frac{L}{1{,}0p} + \frac{L}{1{,}0p^2} + \frac{L}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p^n} = L.\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p},$$

und hieraus:

1) $$L = \frac{K.0{,}0p}{1-1{,}0p^{-n}}.$$

Da nun jede Jahreszahlung bekannt ist, so hat man nun sämmtliche Summen in den Zinsfuss $q$ umzusetzen. Es ist sofort der gesuchte Nennwerth:

2) $$K_1 = \frac{L}{1{,}0q} + \frac{L}{1{,}0q^2} + \frac{L}{1{,}0q^3} + \ldots \frac{L}{1{,}0q^n} = L.\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q}.$$

Setzt man nun den Werth für $L$ aus No. 1) in No. 2), so bestimmt sich der Nennwerth durch

3) $$K_1 = K.\frac{0{,}0p}{1-1{,}0p^{-n}}.\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q}.$$

Ist $n$ keine ganze Zahl, was eintreten kann, wenn $L$ gegeben ist, so wird:

$$4)\qquad K_1 = K.\frac{0{,}0p}{1-1{,}0p^{-n}}.\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0q}+\frac{S_n}{1{,}0q^n}.$$

wenn $S_n$ die Restschuld bedeutet. Sie bestimmt sich dann durch:

$$5)\qquad S_n = K.1{,}0p^n - L.\frac{1{,}0p^n-1}{0{,}0p}.$$

Geschieht die Verzinsung und Tilgung halbjährlich, so bleiben die gemachten Schlüsse in Kraft und man hat den Calcul auf die entsprechende Zahl von Halbjahren auszudehnen. Man erhält dann auf dieselbe Weise:

$$6)\qquad K_1 = K.\frac{0{,}0p_1}{1-1{,}0p_1^{-2n}}.\frac{1-1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1}.$$

Geschieht aber die Tilgung jährlich und die Verzinsung halbjährlich, so erhält man auf dieselbe Weise:

$$7)\qquad K_1 = K.\frac{1{,}0p_1^2-1}{1-1{,}0p_1^{-2n}}.\frac{1-1{,}0q_1^{-2n}}{1{,}0q_1^2-1}.$$

Diese Formel findet aber in der Wirklichkeit wohl keine Anwendung. In den Fällen, wo die halbjährlichen Zinsen wirklich ausgezahlt werden, was in der Wirklichkeit vorkommt, hat man nach den in §. 48. entwickelten Gleichungen zu verfahren.

Der Curs der umzuwandelnden Anleihe ergibt sich nach §. 46. aus $C=\frac{100.K}{K_1}$, und man erhält durch Einführung aus No. 3) und No. 6):

$$8)\qquad C = 100.\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.\frac{0{,}0q}{1-1{,}0q^{-n}},$$

$$9)\qquad C = 100.\frac{1-1{,}0p_1^{-2n}}{0{,}0p_1}.\frac{0{,}0q_1}{1-1{,}0q_1^{-2n}}.$$

Wird die Restschuld berücksichtigt, so ändert sich derselbe um ein Unbedeutendes.

## §. 50.

### Anwendung.

1) Eine Anleihe von 1000000 wird zu 5 Procent verzinst und so getilgt, dass jährlich 100000 abgetragen

**werden. Sie soll in eine gleichwerthige, vierprocentige verwandelt werden. Wie hoch stellt sich der Nennwerth oder wie viele 4procentige Schuldscheine zu 100 müssen ausgestellt werden? Welches ist der Curs der 4procentigen Anleihe?**

Auflösung. Die Anleihe wird in 10 Jahren getilgt sein. Man kann nun vorerst nach §. 32. No. 1) so verfahren, dass man die Summen bestimmt, welche nach dem Tilgungsplane bei 5 Procent auszuzahlen sind. Man erhält der Reihe nach die Summen 150000, 145000, 140000, 135000, 130000, 125000, 120000, 115000, 110000, 105000. Diese Summen sind nun im Zinsfuss 4 auf die Gegenwart zurückzubringen. Hiernach erhält man durch directe Rechnung:

$$2)\qquad K_1 = \frac{150000}{1{,}04} = 144\,230{,}7693$$

$$\frac{145000}{1{,}04^2} = 134\,060{,}6509$$

$$\frac{140000}{1{,}04^3} = 124\,459{,}4903$$

$$\frac{135000}{1{,}04^4} = 115\,398{,}5658$$

$$\frac{130000}{1{,}04^5} = 106\,850{,}5239$$

$$\frac{125000}{1{,}04^6} = 98\,789{,}3158$$

$$\frac{120000}{1{,}04^7} = 91\,190{,}1376$$

$$\frac{115000}{1{,}04^8} = 84\,029{,}3736$$

$$\frac{110000}{1{,}04^9} = 77\,284{,}5409$$

$$\frac{105000}{1{,}04^{10}} = 70\,934{,}2377$$

$$= 1047227{,}6057\ldots.$$

Hiernach stellt sich der Nennwerth auf 1047227,60...., und es müssen 10472 vierprocentige Schuldscheine zu 100 statt 10000 fünfprocentige ausgestellt werden.

Der Curs bestimmt sich durch

$$3)\qquad C = \frac{1000000.100}{1047227{,}605} = 95{,}49023.$$

Werden nun 10472,276.... vierprocentige Schuldscheine jeder zu 95,49.... ausgegeben, so erhält man in die Casse:

$$S = 10472{,}276 . 95{,}49023 = 1000000,$$

und diess ist die verlangte Summe.

Löst man nun, um die Richtigkeit des gefundenen Resultats zu prüfen, die vorliegende Frage nach No. 2) §. 47., so hat man dort $K = 1000000$, $A = 100000$, $p = 5$, $q = 4$, $n = 10$, ferner $K.0{,}0p = 1000000.0{,}05 = 50000$, $\frac{A.0{,}05}{0{,}04} = \frac{100000.5}{4} = 125000$ zu setzen, und es entsteht:

$$4) \quad K_1 = (150000 - 125000).\frac{1 - 1{,}04^{-10}}{0{,}04} + \frac{10.125000}{1{,}04^{10}}$$
$$= 25000.8{,}1108958 + 1250000.0{,}6755642$$
$$= 202772{,}3944.... + 844455{,}2112....$$
$$= 1047227{,}6056....$$

wie oben. Will man nun die Richtigkeit des gefundenen Resultats prüfen, so ergibt sich hiefür folgende Rechnung, wobei die Decimalbrüche beibehalten sind. Man hat zu dem Ende den Nennwerth als eine vierprocentige Anleihe zu behandeln und jeweils die oben angegebenen fünfprocentigen Zahlungssummen am Ende der Jahre in Abzug zu bringen.

5)

| | | |
|---|---|---|
| 1stes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . | 1047227,6057 |
| | Zins zu 4 % hinzu . . . . . . . . . . . | 41889,1042 |
| | | 1089116,7099 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . | 150000 |
| 2tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 939116,7099 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 37564,6684 |
| | | 976681,3783 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . | 145000 |
| 3tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 831681,3783 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 33267,2551 |
| | | 864948,6334 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . | 140000 |
| 4tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 724948,6334 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 28997,9453 |
| | | 753946,5787 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . | 135000 |
| 5tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 618946,5787 |

| | | |
|---|---|---|
| 5tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 618946,5687 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 24757,8631 |
| | | 643704,4418 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . . | 130000 |
| 6tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 513704,4418 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 20548,1777 |
| | | 534252,6195 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . . | 125000 |
| 7tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 409252,6195 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 16370,1048 |
| | | 425622,7243 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . . | 120000 |
| 8tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 305622,7243 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 12224,9089 |
| | | 317847,6332 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . . | 115000 |
| 9tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 202847,6332 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 8113,9053 |
| | | 210961,5385 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . . | 110000 |
| 10tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . | 100961,5385 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 4038,4615 |
| | | 105000,0000 |
| | Zahlung ab . . . . . . . . . . . . . . . | 105000 |
| | | 000000 |

Es zeigt sich hieraus, dass die fragliche Anleihe als eine vierprocentige durch die ursprünglich bestimmten Zahlungssummen getilgt wird.

Die Zahl der vierprocentigen Schuldscheine findet man, wenn man die fälligen vierprocentigen Zinsen eines Jahres von der Zahlungsleistung abzieht. Hiernach werden im ersten Jahre 150000 — 41889,102.... = 1081,11, im zweiten 145000 — 37564,6.... = 1074,36.... u. s. w. getilgt. Da aber bei den Schuldscheinen keine Bruchtheile vorkommen können, so hat man diese wegzulassen und den Ausfall zur passenden Zeit in runder Summe wieder auszugleichen. Geschieht diess, so erhält man folgende Zahlen für die Schuldscheine, welche der Reihe nach in den verschiedenen Jahren zur Tilgung gelangen: 1081, 1074, 1067, 1060, 1053, 1044, 1037, 1028, 1019, 1009, welche zusammen die Summe von 10472 Schuldscheinen betragen. Hiedurch wird die in No. 5) gegebene Rechnung etwas, aber nicht wesentlich, modificirt. Die Differenz wird aber ganz gering erscheinen und kann sich nicht auf den Werth eines ganzen Schuldscheins erheben,

was sich leicht zeigen wird, wenn man die Rechnung nach der in No. 5) gezeigten Weise durchführt.

## §. 51.

### Fortsetzung.

1) Eine Anleihe von 1000000 wird zu 5 Procent verzinst und so getilgt, dass jährlich 100000 abgetragen werden, die Verzinsung aber halbjährlich geschieht. Die Anleihe soll in eine gleichwerthige bei 4 Procent verwandelt werden. Wie gross ist der Nennwerth der umgewandelten Anleihe? Welches ist der Curs?

Auflösung. Die Anleihe wird in 10 Jahren getilgt sein. Da die Tilgung jährlich, die Verzinsung halbjährlich geschieht, so kommt die Gleichung No. 4) und No. 6) §. 47. zur Anwendung. Man hat daher $K = 1000000$, $A = 100000$, $p_1 = 2{,}5$, $q_1 = 2$, $n = 10$ in No. 6) zu setzen. Da $n$ eine ganze Zahl ist, so fällt $S_n$ weg. Es entsteht:

$$K.0{,}0p_1.2{,}0q_1 = 1000000.0{,}025.2{,}02 = 1000000.0{,}0505 = 50500,$$

$$\frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0q_1} = \frac{100000.2{,}5}{2} = 125000,$$

und hieraus durch Einführung:

$$K_1 = (50500 + 100000 - 125000)\frac{1-1{,}02^{-20}}{1{,}02^2-1} + \frac{10.125000}{1{,}02^{20}}.$$

Nun ist:

$$\frac{1-1{,}02^{-20}}{1{,}02^2-1} = \frac{1-0{,}6729713}{1{,}0404-1} = \frac{0{,}3270287}{0{,}0404} = 8{,}0947689,$$

also wird:

$$K_1 = 25500.8{,}0947689 + 1250000.0{,}6729713$$
$$= 206416{,}607 + 841214{,}166,$$

2) $$K_1 = 1047630{,}773.$$

Der Nennwerth der verwandelten Anleihe stellt sich daher auf 1047630,7.... und es müssen 10476 vierprocentige Schuldscheine zu 100 statt 10000 fünfprocentige ausgestellt werden.

Der Curs dieser Schuldscheine stellt sich auf:

3) $$C=\frac{100.1000000}{1047630,7}=95,45349.$$

$$\lg 100000000 = 8,0000000$$
$$\lg 1047630,7 = 6,0202082$$
$$1,9797918,$$

$$N.\ 1,9797918 = 95,45349.$$

Man kann nun auch hier die Richtigkeit des gefundenen Resultats durch Rechnung, wie in No. 5) §. 50. geschah, nachweisen. Die Rechnung wird aber etwas zusammengesetzter werden, weil Halbjahreszinsen in Betrachtung kommen und die Rechnung von Halbjahr zu Halbjahr abgeschlossen werden muss. Da diese Durchführung aber keiner weiteren Schwierigkeit unterliegt, so wird sie übergangen. Durch Ausgabe von 1047630,7.... Schuldscheine im Curse von 95,45.... kommt in die Casse: 10476,307 $\times$ 95,45349 = 1000000, und der Staat erleidet keinen Schaden.

5) Eine Anleihe von 1000000 wird zu 5 Procent verzinst und so getilgt, dass halbjährlich 50000 abgetragen werden. Die Anleihe soll in eine 4procentige gleichwerthige umgewandelt werden. Wie gross ist der Nennwerth der umgewandelten Anleihe? Wie gross ihr Curs?

Auflösung. Die Anleihe wird in $\frac{1000000}{50000}=20$ Halbjahren oder 10 Jahren getilgt sein. Da Tilgung und Verzinsung halbjährlich geschieht, so kommt die Gleichung No. 7) und No. 8) §. 47. zur Anwendung. Man hat daher $K=1000000$, $A=50000$, $p_1=2,5$, $q_1=2$, $n=10$ in No. 8) zu setzen. Nun ist:

$$K.0,0p_1 = 1000000.0,025 = 25000, \quad \frac{A.0,0p_1}{0,0q_1}=\frac{50000.2,5}{2}=62500.$$

$S_{20}$ wird wegfallen, da $n$ keinen Bruch enthält. Hieraus wird:

$$K_1 = (25000+50000-62500)\frac{1-1,02^{-20}}{0,02}+\frac{20.62500}{1,02^{20}}$$
$$=12500.16,3514333+1250000.0,6729713$$
$$=204392,9168+8141214,1662,$$

6) $$K_1 = 1045607,083.$$

Der Nennwerth stellt sich auf 1045607,08 und es sind 10456 vierprocentige Schuldscheine zu 100 statt 10000 auszugeben. Der Curs bestimmt sich zu:

$$C = \frac{100.1000000}{1045607,08} = 95,63822, \tag{7}$$

lg 100000000 = 8,0000000
lg 1045607 = 6,0193685
N. 1,9806315 = 95,63822.

Es kommen, wenn 10456 Schuldscheine im Curse von 95,63.... statt 100 ausgegeben werden, 10456,0708 . 95,63822 = 1000000 in Casse.

Vergleicht man nun die Nennwerthe und Curse, welche in diesem und dem vorigen Paragraphen für die Verwandlung derselben Anleihe in eine gleichwerthige vierprocentige bei verschiedener Verzinsung und Tilgung gefunden wurden, so ergibt sich für die Nennwerthe

| | |
|---|---|
| bei jährlicher Verzinsung und Tilgung: | 1047227,605, |
| bei halbjährlicher Verzinsung und jährlicher Tilgung: | 1047630,773, |
| bei halbjährlicher Verzinsung u. halbjährlicher Tilgung: | 1045607,083. |

Die Curse stellen sich so:

| | |
|---|---|
| bei jährlicher Verzinsung und Tilgung: | 95,49023, |
| bei halbjährlicher Verzinsung und jährlicher Tilgung: | 95,45349, |
| bei halbjährlicher Verzinsung und halbjährlicher Tilgung: | 95,63822. |

Hieraus zeigt sich, dass die halbjährliche Tilgung und Verzinsung die vortheilhafteste ist, dass hierauf die jährliche Tilgung und Verzinsung folgt und die halbjährliche Verzinsung und jährliche Tilgung die ungünstigste ist.

Der Curs hängt von den beiden Zinsfüssen und dann hauptsächlich von der Tilgungszeit ab. Die grössere Dauer vermindert den Curs. Diess wird sich an folgendem Falle verdeutlichen.

8) Eine fünfprocentige Anleihe von 5000000 soll durch jährliche gleiche Abtragssummen von 100000 getilgt und in eine gleichwerthige, vierprocentige verwandelt werden. Welches ist der Nennwerth? Welches der Curs?

Auflösung. Die Anleihe wird in 50 Jahren getilgt sein. Da hier die Gleichung No. 2) §. 47. zur Anwendung kommt, so hat man dort:

$$K=5000000,\quad A=100000,\quad p=5,\quad q=4,\quad n=50,$$

$$K.0{,}0p=5000000.0{,}05=250000,\quad \frac{A.0{,}0p}{0{,}04}=\frac{5.100000}{4}=125000$$

zu setzen und man erhält für den Nennwerth:

$$9)\qquad K_1=(350000-125000)\frac{1-1{,}04^{-50}}{0{,}04}+\frac{50.125000}{1{,}04^{50}}$$

$$=225000.21{,}4821846+6250000.0{,}1407126$$

$$=4833491{,}5388....+879453{,}8437$$

$$=5712945{,}2825....$$

Der Curs bestimmt sich hieraus zu:

$$10)\qquad C=\frac{100.5000000}{5712945{,}38....}=87{,}52054,$$

$$\lg 500000000=8{,}6989700$$
$$\lg 5712945\quad=\underline{6{,}7568600}$$
$$\text{N. }1{,}9421100=87{,}52054.$$

Die früher behandelten Fälle in diesem und dem vorigen Paragraphen beruhen auf den gleichen Elementen. Ihr Curs stellt sich viel höher. Der Grenzwerth, welchem sich der Curs nähert, findet sich, wenn man zur ewigen Rente übergeht. In diesem Falle hat man in No. 2) §. 47. $n=\infty$, und da bei einer ewigen Rente keine Tilgung erfolgt, $A=0$ zu setzen. Es ergibt sich hieraus:

$$11)\qquad C=\frac{100.K}{K.\frac{0{,}0p}{0{,}0q}}=\frac{100.q}{p},$$

und der Grenzwerth des Curses bestimmt sich durch das Verhältniss der Zinsfüsse $q:p$, wie diess sein muss, denn der Curs einer 5procentigen Rente stellt sich, wenn sie in eine 4procentige reducirt wird, auf $C=\frac{4.100}{5}=80$.

Die Grenze des Nennwerthes einer Rente ist in dem genannten Falle nach No. 2) §. 47.:

$$12)\qquad K_1=K.\frac{p}{q},$$

oder, wenn 100 statt $K$ geschrieben wird,

$$13)\qquad K_1=100.\frac{p}{q},$$

und ein Staat, der eine 5procentige in eine 4procentige Rente umwandelt, hat für jeden Schuldschein von 100 ein Rentenkapital von $K_1 = 100.\frac{5}{4} = 125$ zu notiren.

Der Stand des Curses gibt ein wesentliches Moment für die Speculation ab. Er kann um so niederer gestellt werden, je länger die Tilgungszeit dauert. In diesem Falle wird gerade die Speculation am meisten angeregt werden, da sich im glücklichen Falle der Gewinn durch die baldige Heimzahlung im vollen Werthe steigert. Papiere von geringer Tilgungszeit eignen sich hierzu weniger.

## §. 52.

### Fortsetzung.

1) Eine Anleihe von 10000000 soll mit 4 Procent verzinst und durch gleiche Jahreszahlungen in 30 Jahren getilgt werden. Bei Uebernahme derselben wird verlangt, dass sie in eine gleichwerthige 3,5procentige umgesetzt werden soll. Welches ist der Nennwerth der umgewandelten Anleihe? Welches der Curs?

Auflösung. Man hat nach §. 49. zuerst die Grösse der jährlichen Zahlungssummen $L$ in dem Zinsfusse 4 festzustellen, und, wenn diess geschehen ist, sie in gleichwerthige bei dem Zinsfuss 3,5 umzusetzen. Geschieht die Tilgung und Verzinsung jährlich, so hat man No. 3) §. 49. anzuwenden und $K = 10000000$, $p = 4$, $q = 3{,}5$ und $n = 30$ zu setzen. Hieraus ergibt sich folgender Nennwerth:

$$2) \qquad K_1 = 10000000 . \frac{0{,}04}{1-1{,}04^{-30}} . \frac{1-1{,}035^{-30}}{0{,}035}$$

$$= 10000000 . \frac{18{,}3920454}{17{,}2920333} = 10636139,$$

$$\begin{aligned} \lg 10000000 &= 7{,}0000000 \\ \lg 18{,}3920454 &= \underline{1{,}2646301} \\ &\phantom{=} 8{,}2646301 \\ \lg 17{,}2920333 &= \underline{1{,}2378461} \\ &\mathrm{N.}\ 7{,}0267840 = 10636139. \end{aligned}$$

Der Curs bestimmt sich nach No. 8) §. 49.:

$$3) \qquad C = 100 . \frac{1-1{,}04^{-30}}{0{,}04} . \frac{0{,}035}{1-1{,}035^{-30}} = 100 . \frac{17{,}2920333}{18{,}3920454}$$

$$= 94{,}01908,$$

$$\begin{aligned} \lg 1729{,}20333 &= 3{,}2378461 \\ \lg 18{,}3920454 &= 1{,}2646301 \\ \text{N. } \overline{1{,}9732160} &= 94{,}01908. \end{aligned}$$

4) **Die in No. 1) genannte Anleihe soll unter denselben Voraussetzungen durch gleiche halbjährliche Zahlungssummen getilgt werden. Welches ist der Nennwerth und Curs der umgewandelten Anleihe?**

Um diese Aufgabe zu lösen, hat man No. 6) §. 49. anzuwenden und $p_1 = 2$, $q_1 = 1{,}75$ zu setzen. Hiernach erhält man:

$$5) \qquad K_1 = 10000000 . \frac{0{,}02}{1-1{,}02^{-60}} . \frac{1-1{,}0175^{-60}}{0{,}0175}$$

$$= 10000000 . \frac{36{,}9639855}{34{,}7608867} = 10633784,$$

$$\begin{aligned} \lg 369639855 &= 8{,}5677785 \\ \lg 34{,}7608867 &= 1{,}5410909 \\ \text{N. } \overline{7{,}0266876} &= 10633784, \end{aligned}$$

und es ergibt sich ein Vortheil gegen den vorhin gefundenen Nennwerth, der sich jedoch als unbedeutend herausstellt, aber auch nur nominell ist, denn in Wirklichkeit hat der Staat für die umgewandelte Anleihe bei jährlicher Verzinsung und Tilgung:

$$L = \frac{10000000 . 0{,}04}{1-1{,}04^{-30}} = 578300{,}9,$$

und bei halbjährlicher:

$$L_1 = \frac{10000000 . 0{,}02}{1-1{,}02^{-60}} = 287679{,}6,$$

also weniger als die Hälfte der jährlichen Summe zu zahlen, und der Vortheil ist in Wirklichkeit grösser.

Der Curs bestimmt sich aus §. 49. No. 9):

$$6) \quad C = 100 . \frac{1-1{,}02^{-60}}{0{,}02} . \frac{0{,}175}{1-1{,}0175^{-60}} = 100 . \frac{34{,}7608867}{36{,}9639855}$$

$$= 94{,}03996,$$

$$\begin{aligned} \lg 3476{,}08867 &= 3{,}5410909 \\ \lg 36{,}9639855 &= 1{,}5677785 \\ \text{N. } \overline{1{,}9733124} &= 94{,}03996. \end{aligned}$$

Soll aber die obige Anleihe in 50 Jahren durch gleiche Zahlungsleistungen getilgt und zu dem Ende in eine 3,5procentige

verwandelt werden, so ist bei jährlicher Verzinsung und Tilgung der Nennwerth aus No. 3) §. 49.:

$$7)\qquad K_1 = 10000000 \cdot \frac{0,04}{1-1,04^{-50}} \cdot \frac{1-1,035^{-50}}{0,035}$$

$$= 10000000 \cdot \frac{23,4556179}{21,4821846} = 10918640.$$

Der Curs bestimmt sich, wenn gleichfalls von Ausführung der Rechnung abgesehen wird:

$$8)\quad C = 100 \cdot \frac{1-1,04^{-50}}{0,04} \cdot \frac{0,035}{1-1,035^{-50}} = 100 \cdot \frac{21,4821846}{23,4556179}$$

$$= 91,58646.$$

Geschieht die Verzinsung und Tilgung durch gleiche Halbjahreszahlungen, so stellt sich bei der Umwandlung der Nennwerth auf

$$9)\qquad K_1 = 10000000 \cdot \frac{1-1,0175^{-100}}{0,0175} \cdot \frac{0,02}{1-1,02^{-100}}$$

$$= 10000000 \cdot \frac{47,0614730}{43,0983516} = 10919550.$$

Der Curs stellt sich in diesem Falle auf:

$$10)\ C = 100 \cdot \frac{1-1,02^{-100}}{0,02} \cdot \frac{0,0175}{1-1,0175^{-100}} = 100 \cdot \frac{43,0983516}{47,0614730}$$

$$= 91,57881.$$

Hier erscheint der Nennwerth der halbjährlichen Tilgung (No. 9)) grösser, als der bei jährlicher (No. 7)). Diess ist aber in der That nur nominell, denn die jährlichen Zahlungssummen für die reducirte Anleihe betragen in Wirklichkeit:

$$L = 10000000 \cdot \frac{0,04}{1-1,04^{-50}} = 465502,1,$$

die halbjährlichen:

$$L_1 = 10000000 \cdot \frac{0,02}{1-1,02^{-100}} = 232027,5,$$

also weniger als die Hälfte der jährlichen. Daher ist die letzte Tilgungsweise in der Wirklichkeit vortheilhafter, wenn auch der Nennwerth etwas höher erscheint. Hiermit stimmt das zu No. 5) Gesagte überein.

## §. 53.

### Vergleichung der Werthe der Anleihen unter einander bei verschiedenen Cursen und verschiedenen Zinsfüssen.

Werden auf Anleihen, die nach einem bestimmten Tilgungsplan in einem gegebenen Zinsfusse getilgt werden sollen, Angebote mit verschiedenen Cursen und Zinsfüssen gemacht, so handelt es sich darum, anzugeben: Welches das vortheilhafteste Anerbieten sei? Die Beantwortung dieser Frage fällt mit der Aufgabe zusammen, die Werthe der Anleihen bei verschiedenen Cursen und Zinsfüssen mit einander zu vergleichen.

Aus den bisherigen Mittheilungen leiten sich zur Beantwortung der vorstehenden Frage folgende Methoden ab:

a) Man bestimme zuerst die Nennwerthe, welche entstehen, wenn die fragliche Anleihe in eine gleichwerthige für jeden einzelnen Zinsfuss der verschiedenen Anerbieten verwandelt wird; ferner berechne man aus den angebotenen Cursen die Nennwerthe, welche erfordert werden, um die ausgebotene Anleihe zu verwirklichen; dann vergleiche man die zwei zusammengehörigen Nennwerthe eines und desselben Anerbietens. Die hieraus sich ergebenden Unterschiede werden über das vortheilhafteste Anerbieten entscheiden.

b) Man bestimme die Grösse der jährlichen Zahlungssummen, die erforderlich sind, um die Anleihe nach dem gegebenen Tilgungsplane zurückzuzahlen, und vergleiche diese Werthe unter einander. Der niederste Werth wird das vortheilhafteste Anerbieten bezeichnen. Hiebei wird genügen, nur eine Jahreszahlung aus den verschiedenen Anerbieten zu bestimmen, da alle übrigen bei demselben Tilgungsplane unter sich in dem gleichen Verhältnisse stehen.

c) Man bestimme die Curswerthe, welche sich für die ausgebotene Anleihe ergeben, wenn sie nach den vorliegenden Angeboten in eine gleichwerthige für die vorgeschlagenen Zinsfüsse verwandelt wird, und vergleiche sie mit den angebotenen Cursen. Aus den sich ergebenden Differenzen wird sich auf das vortheilhafteste Anerbieten schliessen lassen, denn der höhere Curs ist vortheilhafter, als der niedrigere.

Wir wenden uns nun zu Anwendungen und wählen hierbei die Tilgung der Anleihe durch gleiche Zahlungssummen, weil diese die Rechnung erleichtern.

## §. 54.

### Anwendung der in §. 53. angegebenen Methoden.

1) Ein Staat will eine Anleihe von 10000000 machen, die in gleich grossen jährlichen Summen innerhalb 50 Jahren getilgt werden soll und zu 5 Procent al pari ausgeboten wird. Folgende Angebote zur Uebernahme werden gemacht:

A übernimmt die Anleihe als eine 4,5procentige im Curse von 92,5 statt 100;

B übernimmt sie als eine 4procentige im Curse von 85 statt 100;

C übernimmt sie als eine 3,5procentige im Curse von 78 statt 100 und

D als eine 3procentige im Curse von 71 statt 100.

Welches ist das vortheilhafteste Anerbieten?

### Auflösung nach der ersten Methode für das Anerbieten von A.

Der Nennwerth der fraglichen Anleihe bestimmt sich, wenn sie in eine gleichwerthige 4,5procentige umgesetzt wird, nach No. 3) §. 49. bei jährlicher Tilgung:

$$2)\qquad K_1 = 10000000 . \frac{1-1{,}045^{-50}}{0{,}045} . \frac{0{,}05}{1-1{,}05^{-50}}$$

$$= 10000000 . \frac{19{,}7620078}{18{,}2559255} = 10824980,$$

$$\begin{aligned} \lg 10^7 . 19{,}7620078 &= 8{,}2958311 \\ \lg 18{,}255925 &= 1{,}2614039 \\ \text{N. } 7{,}0344272 &= 10824980. \end{aligned}$$

Bietet A 92,5 statt 100 bei 4,5 Procent, so braucht der Staat ein Kapital, dessen Nennwerth sich zu

$$3)\qquad K_2 = \frac{100 . 10000000}{92{,}5} = 10810810{,}8$$

berechnet. Aus der Vergleichung mit No. 2) ergibt sich hieraus ein Vortheil für den Staat von

$$4)\qquad V = 10824980 - 10810810 = 14170.$$

### Auflösung für das Anerbieten von B.

Wird die Anleihe in eine gleichwerthige 4procentige umgesetzt, so ist der Nennwerth:

$$5)\qquad K_1 = 10000000 . \frac{1-1{,}04^{-50}}{0{,}04} . \frac{0{,}05}{1-1{,}05^{-50}}$$

$$= 10000000 . \frac{21{,}4821846}{18{,}2559255} = 11767230,$$

$$\begin{aligned} \lg 10^7 . 21{,}4821846 &= 8{,}3320783 \\ \lg 18{,}2559255 &= 1{,}2614039 \\ \text{N. } 7{,}0706744 &= 11767230. \end{aligned}$$

Da A bei 4 Procent 85 statt 100 bietet, so braucht der Staat zur Deckung seines Bedürfnisses ein Kapital im Nennwerthe von

$$6)\qquad K_2 = \frac{100 . 10000000}{85} = 11764705{,}88 \ldots.$$

Aus der Vergleichung mit No. 5) ergibt sich ein Vortheil von

$$7)\qquad V = 11767230 - 11764706 = 2524.$$

### Auflösung für das Anerbieten von C.

Wird die Anleihe in eine gleichwerthige 3,5procentige verwandelt, so ergibt sich für dieselbe ein Nennwerth von:

$$8)\qquad K_1 = 10000000 . \frac{1-1{,}035^{-50}}{0{,}035} . \frac{0{,}05}{1-1{,}05^{-50}}$$

$$= 10000000 . \frac{23{,}4556179}{18{,}2559255} = 12848225,$$

$$\begin{aligned} \lg 10^7 . 23{,}4556179 &= 8{,}3702470 \\ \lg 18{,}2559255 &= 1{,}2614039 \\ \text{N. } 7{,}1088431 &= 12848225. \end{aligned}$$

Da C 78 statt 100 bei 3,5 Procent anbietet, so braucht der Staat zur Deckung seines Bedürfnisses:

$$9)\qquad K_2 = \frac{10000000 . 100}{78} = 12820512{,}82.$$

Es ergibt sich daher ein Vortheil von

10) $$V = 12848225 - 12820513 = 27712.$$

### Auflösung für das Anerbieten von D.

Wird die Anleihe in eine gleichwerthige 3procentige verwandelt, so ist ihr Nennwerth:

11) $$K_1 = 10000000 . \frac{1 - 1{,}03^{-50}}{0{,}03} . \frac{0{,}05}{1 - 1{,}05^{-50}}$$

$$= 10000000 . \frac{25{,}7297640}{18{,}2559255} = 14093920,$$

$$\begin{aligned} \lg 10^7 . 25{,}729764 &= 8{,}4104357 \\ \lg 18{,}2559255 &= 1{,}2614039 \\ \text{N. } 7{,}1490318 &= 14093920. \end{aligned}$$

Bei dem Anerbieten von 71 statt 100 bedarf der Staat zur Deckung seines Bedürfnisses ein Kapital, dessen Nennwerth

12) $$K_2 = \frac{100 . 10000000}{71} = 14084507{,}04$$

ist. Es ergibt sich daher ein Vortheil von

13) $$V = 14093920 - 14084507 = 9413.$$

Die gemachten Anerbieten ordnen sich daher in folgender Weise:

das Anerbieten von C gewährt einen Vortheil von 27713,
„ „ „ A „ „ „ „ 14170,
„ „ „ D „ „ „ „ 9413,
„ „ „ B „ „ „ „ 2524.

### Auflösung der Aufgabe nach der zweiten Methode.

Soll eine Anleihe von 10000000 jährlich durch gleich grosse Summen bei 5 Procent in 50 Jahren getilgt werden, so ist die jährlich zu zahlende Summe:

15) $$L = 10000000 . \frac{0{,}05}{1 - 1{,}05^{-50}} = 547767{,}4,$$

$$\begin{aligned} \lg 10000000 &= 7{,}0000000 \\ \lg 18{,}2559255 &= 1{,}2614039 \\ \text{N. } 5{,}7385961 &= 547767{,}4. \end{aligned}$$

**Anerbieten des A.** Bei einem Curse von 92,5 statt 100

bedarf der Staat nach No. 4) ein Kapital im Nennwerthe von 10810810,8.... und muss diese Summe zu 4,5 Procent verzinsen und tilgen. Die jährliche Zahlungssumme beträgt hierfür:

$$16)\quad L = 10810810{,}8 \cdot \frac{0{,}045}{1-1{,}045^{-50}} = \frac{10810810{,}8}{19{,}7620078} = 547050{,}25,$$

$$\begin{aligned} \lg 10810810{,}8 &= 7{,}0338583 \\ \lg 19{,}7620078 &= \underline{1{,}2958311} \\ \text{N. } 5{,}7380272 &= 547050{,}25. \end{aligned}$$

Anerbieten des B. Bei einem Anerbieten von 85 statt 100 für den Zinsfuss 4 bedarf der Staat zur Deckung seines Bedürfnisses nach No. 6) die Nominalsumme 11764705,88. Um diese Summe in 50 Jahren bei 4 Procent zu tilgen, ist die jährliche Summe nöthig:

$$17)\quad L = 11764705 \cdot \frac{0{,}04}{1-1{,}04^{-50}} = \frac{11764705{,}88}{21{,}4821846} = 547649{,}6,$$

$$\begin{aligned} \lg 11764705 \quad &= 7{,}0705811 \\ \lg 21{,}4821846 &= \underline{1{,}3320783} \\ \text{N. } 5{,}7385028 &= 547649{,}6. \end{aligned}$$

Anerbieten des C. Der Staat bekommt 78 statt 100 und bedarf daher nach No. 9) die Nominalsumme 12820512,82... Diese hat er in 50 Jahren bei 3,5 Procent zu tilgen. Die jährliche Zahlung beträgt hiefür:

$$18)\quad L = 12820512{,}8 \cdot \frac{0{,}035}{1-1{,}035^{-50}} = \frac{12820512{,}8}{23{,}4556179} = 546586,$$

$$\begin{aligned} \lg 12820512{,}8 &= 7{,}1079054 \\ \lg 23{,}4556179 &= \underline{1{,}3702469} \\ \text{N. } 5{,}7376585 &= 546586{,}0. \end{aligned}$$

Anerbieten des D. Statt 100 bekommt der Staat 71 und braucht daher zur Deckung seines Bedürfnisses die Nominalsumme 14084507,04 nach No. 12). Diese Summe hat er in 50 Jahren zu 3 Procent zu tilgen. Die jährliche Summe hiefür beträgt:

$$19)\quad L = 14084507{,}04 \cdot \frac{0{,}03}{1-1{,}03^{-50}} = \frac{14084507{,}04}{25{,}7297640} = 547401{,}5,$$

$$\begin{aligned} \lg 14084507{,}0 &= 7{,}1487417 \\ \lg 25{,}7297640 &= \underline{1{,}4104357} \\ \text{N. } 5{,}7383060 &= 547401{,}5. \end{aligned}$$

Nach dieser Auflösung ordnen sich die Anerbieten wie folgt. Die jährliche Ausgabe beträgt

| | |
|---|---|
| bei dem Anerbieten des C: | 546586 |
| „ „ „ „ A: | 547050,2 |
| „ „ „ „ D: | 547401,5 |
| „ „ „ „ B: | 547649,6 |
| bei vollem Werthe: | 547767,4. |

Auflösung der Aufgabe nach der dritten Methode des §. 53. für das Anerbieten des A. Wird die 5procentige Anleihe in eine gleichwerthige 4,5procentige verwandelt, so ist ihr Curs nach No. 8) §. 49.:

$$20)\quad C = 100 . \frac{1 - 1{,}05^{-50}}{0{,}05} . \frac{0{,}045}{1 - 1{,}045^{-50}} = \frac{100 . 18{,}2559255}{19{,}7620078}$$

$$= 92{,}379,$$

wie sich leicht aus den Werthen von No. 2) berechnet. A bietet 92,5. Hieraus ergibt sich ein Vortheil von

$$21)\qquad V = 92{,}5 - 92{,}379 = 0{,}121.$$

Zu demselben Resultate gelangt man durch Anwendung der Gleichung No. 4) §. 46.

Anerbieten des B. Der Curs der vorstehenden Anleihe, wenn sie in eine gleichwerthige 4procentige verwandelt wird, bestimmt sich zu:

$$22)\quad C = 100 . \frac{1 - 1{,}05^{-50}}{0{,}05} . \frac{0{,}04}{1 - 1{,}04^{-50}} = \frac{100 . 18{,}2559255}{21{,}4821846}$$

$$= 84{,}9817.$$

B bietet 85. Hieraus ergibt sich ein Vortheil:

$$23)\qquad V = 85 - 84{,}9817 = 0{,}0183.$$

Anerbieten des C. Der Curs für die Anleihe, wenn sie in eine 3,5procentige umgesetzt wird, bestimmt sich zu:

$$24)\quad C = 100 . \frac{1 - 1{,}05^{-50}}{0{,}05} . \frac{0{,}035}{1 - 1{,}035^{-50}} = \frac{100 . 18{,}2559255}{23{,}4556179}$$

$$= 77{,}8318.$$

C bietet 78. Der Vortheil ist daher:

$$25)\qquad V = 78 - 77{,}8318 = 0{,}1682.$$

**Anerbieten von D.** Der Curs für die Anleihe, wenn sie in eine 3procentige verwandelt wird, bestimmt sich zu:

$$26)\quad C = 100 \cdot \frac{1-1{,}05^{-50}}{0{,}05} \cdot \frac{0{,}03}{1-1{,}03^{-50}} = \frac{100 \,.\, 18{,}2559255}{25{,}7297640}$$

$$= 70{,}95261.$$

D bietet 71. Hieraus ergibt sich ein Vortheil von:

$$27)\quad V = 71 - 70{,}95261 = 0{,}04739.$$

Hiernach ordnen sich die Anerbieten in folgender Weise:

| | | |
|---|---|---|
| Anerbieten des | C: | 0,1682, |
| „ „ | A: | 0,121, |
| „ „ | D: | 0,0473, |
| „ „ | B: | 0,0183. |

Vergleicht man nun die auf die drei Methoden gefundenen Resultate, so führen sie sämmtlich zu derselben Aussage, dass C das vortheilhafteste Anerbieten mache. Die beiden ersten Methoden heben das Resultat stärker hervor, als die dritte. Sie empfehlen sich daher als die zweckmässigeren.

Da namentlich die Cursbestimmung der Staatspapiere eine praktische Bedeutung hat und der Zinsfuss 5 oder 4,5 bei ihnen an der Börse durchschnittlich als Basis dient, so soll noch folgender Fall hier betrachtet werden, wobei jedoch nur das Resultat der Rechnung angegeben, die Zwischenrechnung aber der Kürze wegen übergangen wird.

## §. 55.

### Fortsetzung.

1) **Eine Anleihe von 10000000 soll zu 4,5 Procent aufgenommen und in 50 Jahren durch gleiche Jahreszahlungen getilgt werden. Sie wird al pari ausgeboten. A bietet 92 statt 100 bei 4 Procent; B 84,5 statt 100 bei 3,5; C 77 statt 100 bei 3 Procent. Welches ist das vortheilhafteste Anerbieten?**

**Auflösung nach der ersten Methode für das Anerbieten von A.** Wird die Anleihe in eine gleichwerthige bei 4 Procent verwandelt, so bestimmt sich der Nennwerth zu:

2) $$K_1 = 10000000 . \frac{1-1{,}04^{-50}}{0{,}04} \cdot \frac{0{,}045}{1-1{,}045^{-50}}$$

$$= 10000000 . \frac{21{,}4821846}{19{,}7620078} = 10870440.$$

Der Staat bedarf zur Deckung seines Bedürfnisses die Nominalsumme:

3) $$K_2 = \frac{100 . 10000000}{92} = 10869565{,}2.$$

Hieraus ergibt sich ein Vortheil von

4) $$V = 10870440 - 10869565 = 875.$$

Anerbieten des B. Für die Umwandlung der Anleihe in eine gleichwerthige 3,5procentige ergibt sich ein Nennwerth von

5) $$K_1 = 10000000 . \frac{1-1{,}035^{-50}}{0{,}035} \cdot \frac{0{,}045}{1-1{,}045^{-50}}$$

$$= 10000000 . \frac{23{,}4556179}{19{,}7620078} = 11869050.$$

Der Staat bedarf bei dem Anerbieten des B die Nominalsumme von

6) $$K_2 = \frac{100 . 10000000}{84{,}5} = 11834319{,}5.$$

Es ergibt sich ein Vortheil von:

7) $$V = 11869050 - 11834320 = 34730.$$

Anerbieten des C. Der Nennwerth der Anleihe, wenn sie in eine gleichwerthige 3procentige umgewandelt wird, bestimmt sich zu:

8) $$K_1 = 10000000 . \frac{1-1{,}03^{-50}}{0{,}03} \cdot \frac{0{,}045}{1-1{,}045^{-50}}$$

$$= 10000000 . \frac{25{,}7297640}{19{,}7620078} = 13019810.$$

Der Staat bedarf bei dem Anerbieten des C die Nominalsumme von

9) $$K_2 = \frac{100 . 10000000}{77} = 12987012{,}98.$$

Der sich ergebende Vortheil ist:

10) $$V = 13019810 - 12987013 = 32797.$$

Es ordnen sich die Anerbieten in folgender Weise:

| | | |
|---|---|---|
| Anerbieten des B bei 3,5 Proc.: | | 34730, |
| „ „ C „ 3 | „ | 32797, |
| „ „ A „ 4 | „ | 875. |

**Auflösung nach der zweiten Methode durch Vergleichung der jährlichen Tilgungssummen.**

Zur Tilgung der Anleihe im vollen Werthe wird folgende jährliche Summe erfordert:

$$11)\quad L = 10000000 \cdot \frac{0{,}045}{1-1{,}045^{-50}} = \frac{10000000}{19{,}7620078} = 506021{,}35.$$

**Anerbieten des A.** Zur Tilgung der Anleihe nach dem Anerbieten des A bedarf der Staat jährlich folgender Summe:

$$12)\quad L = 10869565{,}2 \cdot \frac{0{,}04}{1-1{,}04^{-50}} = \frac{10869565{,}2}{21{,}4821846} = 505980{,}6.$$

**Anerbieten des B.** Hiefür bedarf der Staat folgender jährlichen Summe:

$$13)\quad L = 11834319{,}5 \cdot \frac{0{,}035}{1-1{,}035^{-50}} = \frac{11834319{,}5}{23{,}4556179} = 504540{,}9.$$

**Anerbieten des C.** Der Staat bedarf hiebei jährlich folgender Summe:

$$14)\quad L = 12987012.98 \cdot \frac{0{,}03}{1-1{,}03^{-50}} = \frac{12987012{,}9}{25{,}7297640} = 504746{,}8.$$

Hiernach ordnen sich die jährlichen Zahlungssummen in folgender Weise. Der Staat bedarf jährlich bei dem

| | | |
|---|---|---|
| Anerbieten des B bei 3,5 Procent: | | 504540,9, |
| „ „ C „ 3 | „ | 504746,8, |
| „ „ A „ 4 | „ | 505980,6, |
| im vollen Betrage bei 4,5 | „ | 506021,3. |

**Auflösung nach der dritten Methode durch Vergleichung der Curswerthe.**

**Anerbieten des A.** Der Curs bestimmt sich durch Umsetzung der Anleihe in eine gleichwerthige 4procentige zu

$$15)\quad C = 100 \cdot \frac{1-1{,}045^{-50}}{0{,}045} \cdot \frac{0{,}04}{1-1{,}04^{-50}} = \frac{100 \cdot 19{,}7620078}{21{,}4821846}$$

$$= 91{,}9923.$$

A bietet den Curs 92 an. Der Vortheil beträgt:

16) $$V = 92 - 91{,}9923 = 0{,}0077.$$

Anerbieten des B. Der Curs stellt sich bei der Umwandlung der Anleihe in eine 3,5procentige zu:

17) $$C = 100 . \frac{1 - 1{,}045^{-50}}{0{,}045} \cdot \frac{0{,}035}{1 - 1{,}035^{-50}} = \frac{100 . 19{,}7620078}{23{,}4556179}$$
$$= 84{,}29158.$$

Der Vortheil ist, da B den Curs 84,5 bietet:

18) $$V = 84{,}5 - 84{,}29158 = 0{,}20842.$$

Anerbieten des C. Der Curs stellt sich bei der Umwandlung der Anleihe in eine 3procentige zu:

19) $$C = 100 . \frac{1 - 1{,}045^{-50}}{0{,}045} \cdot \frac{0{,}03}{1 - 1{,}03^{-50}} = \frac{100 . 19{,}7620078}{25{,}7297640}$$
$$= 76{,}8060.$$

B bietet den Curs 77. Der Vortheil ist:

20) $$V = 77 - 76{,}8060 = 0{,}194.$$

Hiernach ordnen sich die gemachten Anerbieten in derselben Weise wie früher. B macht das vortheilhafteste Anerbieten.

Die Tilgung der Staatsanleihen umfasst in der Regel keinen längern Zeitraum als 50 Jahre. Nur bei Eisenbahn-Anleihen kommen Tilgungspläne von längerer Dauer (bis zu 90 und 100 Jahren) vor. Daher sind die in diesem und dem vorigen Paragraphen gefundenen Resultate geeignet, im Allgemeinen als Anhaltpunkte bei Beurtheilung des Werthes der Papiere, die in irgend einem niedern Zinsfuss ($q$) verzinst werden, und ihrer Curswerthe zu dienen, wenn hiebei der Zinsfuss 5 oder 4,5 als Basis der Verzinsung betrachtet wird. Mit Abnahme der Tilgungszeit hebt sich der Curs. Bei dem Schluss derselben geht er in den vollen Werth über. Nimmt man nun das Schlussjahr der Tilgungszeit (also eine Tilgungszeit von einem Jahre) in die Betrachtung auf, so hat man zur Bestimmung des Curswerthes eines $q$ Procente tragenden Schuldscheines von 100 in Beziehung auf den Zinsfuss $p$ für die Dauer eines Jahres folgende Formel:

21) $$C = 100 . \frac{1{,}0q}{1{,}0p}.$$

Benutzt man dieselbe und die in diesem und dem vorigen Paragraphen gefundenen Resultate, so erhält man folgende Zusammen-

stellung, worin die Curswerthe der in verschiedenen Zinsfüssen zu verzinsenden Papiere für die Tilgungsdauer von einem und von 50 Jahren und einer ewigen Rente auf den Zinsfuss 5 und 4,5 bezogen sind.

Wenn der Zinsfuss 5 als Basis der Verzinsung dient:

| Zinsfuss. | Curswerth für die Tilgungszeit von 1 Jahr (Schlussjahr der Tilgung). | Curswerth für eine Tilgungszeit von 50 Jahren. | Curswerth einer ewigen Rente. |
|---|---|---|---|
| 4,5 | 99,6238 | 92,379 | 90 |
| 4 | 99,0479 | 84,9817 | 80 |
| 3,5 | 98,5714 | 77,8318 | 70 |
| 3 | 98,0952 | 70,9526 | 60 |

Wenn der Zinsfuss 4,5 als Basis der Verzinsung dient:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 99,5215 | 91,9923 | 88,8888 |
| 3,5 | 99,1387 | 84,2915 | 77,7777 |
| 3 | 98,5645 | 76,8060 | 66,666 |

§. 56.

## Die grossherzoglich badische Anleihe vom Jahre 1842.

Da es hauptsächlich darauf ankommt, die Art und Weise kennen zu lernen, wie die Werthberechnung der Staatsanleihen durchzuführen ist, so wählen wir hiezu die grossherzoglich badische Anleihe vom Jahre 1842 im Betrage von 12 Millionen Gulden und die königlich preussische vom Jahre 1859 im Betrage von 30 Millionen Thaler zur nähern Betrachtung.

Die Grösse der Anleihen ist in der Regel gleichgültig, denn es handelt sich hauptsächlich um Feststellung des Tilgungsplans und des Curses und die sich daran schliessenden Consequenzen. Es werden daher solche Summen gewählt werden, welche die Rechnung erleichtern, wie z. B. 10000000, denn die Reduction auf den wirklichen Werth und Stand der Schuld ergibt sich hieraus leicht durch eine einfache Multiplikation. Wird nämlich die runde Zahl 10000000 statt 12000000 oder jeder andern gewählt, und wird der Tilgungsfonds, Stand der Schuld und Zahlungssumme hiernach festgestellt, so ergeben sich die bezüglichen Werthe für die Anleihe von 12000000 durch eine Multiplikation mit 1,2 ganz leicht.

Die Aufnahme und Tilgung der badischen Anleihe von 12 Millionen ist durch das Gesetz vom 10. September 1842 bestimmt. Die hierher gehörigen Bestimmungen sind folgende:

Art. 2. „Das Anlehen ist durch den Verkauf von 3,5- oder 4procentigen, auf den Inhaber lautenden und von Seiten der Gläubiger unaufkündbaren Partial-Obligationen zu machen. Die Zinse werden halbjährlich bezahlt und können nach Wahl der Creditoren bei allen grossherzoglichen Staatskassen oder in Frankfurt bei dem damit betraut werdenden Banquier erhoben werden.“

Art. 3. „Zur allmäligen Heimzahlung des Anlehens wird ein Tilgungsfonds festgesetzt, der gleich im ersten Jahre wenigstens ein halbes Procent des Kapitals betragen und bis zur vollständigen Heimzahlung jährlich mit sechs Procent seines Betrags wachsen muss.“

Die übrigen Artikel enthalten die Gewährleistung der Schuld durch die Landstände, Bestimmungen über Dotirung des Tilgungsfonds, und sichern dessen Zahlungsfähigkeit, so wie die Durchführung des mit den Landständen hierüber vereinbarten Gesetzes.

Die Bedingungen, worauf der Calcul ruht, sind hiernach: die Anleihe kann zu 4 oder 3,5 Procent begeben werden; die Zinse werden halbjährlich bezahlt; die Tilgung geschieht jährlich; der Tilgungsfonds beträgt am Ende des ersten Jahres $\frac{1}{2}$ und wächst jährlich um 6 Procent.

Setzt man nun der bequemern Rechnung wegen die Grösse der Anleihe zu 10 Millionen, so kommen die Sätze des §. 39. in Anwendung. Die Tilgungssumme des ersten Jahres ist daher:

1) $$A_1 = 10000000 . 0,005 = 50000,$$

die des $r$ten ist:

2) $$A_r = A_1 . 1,0w^{r-1} = 50000 . 1,06^{r-1}.$$

Die Grösse der am Ende des $r$ten oder Anfang des $(r+1)$ten Jahres gezahlten Schuld ist nach No. 3) §. 39.:

3) $$G_r = 50000 . \frac{1,06^r - 1}{0,06}.$$

Der Stand der Schuld am Ende des $r$ten oder Anfang des folgenden ist nach No. 6) §. 39.:

4) $$S_r = 10000000 - 50000 . \frac{1,06^r - 1}{0,06}.$$

Die Anleihe wird nach §. 39. No. 8) in

5) $$\frac{1{,}06^n - 1}{0{,}06} = \frac{10000000}{50000} = 200$$

44 Jahren getilgt sein, wie sich aus den Tafeln ergibt. Direct bestimmt sich die Tilgungszeit aus No. 9) §. 39. auf:

6) $$n = \frac{\lg(10000000 . 0{,}06 + 50000) - \lg 50000}{\lg 1{,}06}$$

$$= \frac{\lg 650000 - \lg 50000}{0{,}0253059} = \frac{5{,}8129134 - 4{,}6989700}{0{,}0253059}$$

$$= \frac{1{,}1139434}{0{,}0253059} = 44{,}01911$$

Jahre. Nach diesen Prämissen ergibt sich folgende Zusammenstellung für die Art, wie diese Anleihe getilgt wird:

7)

| Zahl der Jahre. | Tilgungs-summe. | Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden. | Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden. |
|---|---|---|---|
| 1 | 50000 | 50000 | 9950000 |
| 2 | 53000 | 103000 | 9897000 |
| 3 | 56180 | 159180 | 9840820 |
| 4 | 59550,8 | 218730,8 | 9781269,2 |
| 5 | 63123,848 | 281854,648 | 9718145,352 |
| 6 | 66911,279 | 348765,927 | 9651234,073 |
| 7 | 70925,956 | 419691,882 | 9580308,118 |
| 8 | 75181,513 | 494873,395 | 9505126,605 |
| 9 | 79692,404 | 574565,799 | 9425434,201 |
| 10 | 84473,948 | 659039,747 | 9340960,253 |
| 11 | 89542,385 | 748582,131 | 9251417,869 |
| 12 | 94914,928 | 843497,059 | 9156502,941 |
| 13 | 100609,824 | 944106,883 | 9055893,117 |
| 14 | 106646,413 | 1050753,296 | 8949246,704 |
| 15 | 113045,198 | 1163798,494 | 8836201,506 |
| 16 | 119827,909 | 1283626,403 | 8716373,597 |
| 17 | 127017,584 | 1410643,987 | 8589356,013 |
| 18 | 134638,639 | 1545282,626 | 8454717,374 |
| 19 | 142716,958 | 1687999,584 | 8312000,416 |
| 20 | 151279,975 | 1839279,560 | 8160720,440 |
| 21 | 160356,774 | 1999636,333 | 8000363,667 |
| 22 | 169978,180 | 2169614,513 | 7830385,487 |
| 23 | 180176,871 | 2349791,383 | 7650208,617 |
| 24 | 190987,483 | 2540778,866 | 7459221,134 |
| 25 | 202446,732 | 2743225,598 | 7256774,402 |
| 26 | 214593,536 | 2957819,134 | 7042180,866 |

| Zahl der Jahre. | Tilgungs-summe. | Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden. | Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden. |
|---|---|---|---|
| 27 | 227469,148 | 3185288,282 | 6814711,718 |
| 28 | 241117,297 | 3426405,579 | 6573594,421 |
| 29 | 255584,335 | 3681989,914 | 6318010,086 |
| 30 | 270919,395 | 3952909,309 | 6047090,691 |
| 31 | 287174,558 | 4240083,867 | 5759916,133 |
| 32 | 304405,032 | 4544488,902 | 5455511,098 |
| 33 | 322669,334 | 4867158,233 | 5132841,767 |
| 34 | 342029,494 | 5209187,727 | 4790812,273 |
| 35 | 362551,264 | 5571738,994 | 4428261,006 |
| 36 | 384304,339 | 5956043,330 | 4043956,670 |
| 37 | 407362,600 | 6363405,930 | 3636594,070 |
| 38 | 431804,356 | 6795210,285 | 3204789,715 |
| 39 | 457712,617 | 7252922,903 | 2747077,097 |
| 40 | 485175,374 | 7738098,277 | 2261901,723 |
| 41 | 514285,897 | 8252384,178 | 1747615,822 |
| 42 | 545143,051 | 8797527,228 | 1202472,772 |
| 43 | 577851,634 | 9375378,862 | 624621,138 |
| 44 | 612522,732 | 9987901,594 | 12098,406 |
| 45 | 12098,406 | 10000000 | |

Da nun die Anleihe als eine 4procentige begeben (die auch in eine 3,5procentige umgewandelt werden kann), halbjährlich verzinst und jährlich getilgt wird, so berechnen sich die Summen, welche in den verschiedenen Halbjahren zu zahlen sind, nach folgenden Formeln:

8) $L_{2r-1} = S_{r-1}.0{,}0p_1$ und $L_{2r} = S_{r-1}.0{,}0p_1 + T_r$.

Wir stellen sie, um Raum zu ersparen, in folgender Weise, getrennt von der Tabelle No. 7), zusammen:

9)

| Halbjahr. | Zahlungs-summe. | Halbjahr. | Zahlungs-summe. |
|---|---|---|---|
| 1 | 200000 | 13 | 193024,681 |
| 2 | 250000 | 14 | 263950,636 |
| 3 | 199000 | 15 | 191606,162 |
| 4 | 252000 | 16 | 266787,675 |
| 5 | 197940 | 17 | 190102,532 |
| 6 | 254120 | 18 | 269794,935 |
| 7 | 196816,4 | 19 | 188508,684 |
| 8 | 256367,2 | 20 | 272982,632 |
| 9 | 195625,384 | 21 | 186819,205 |
| 10 | 258749,132 | 22 | 276361,590 |
| 11 | 194362,907 | 23 | 185028,357 |
| 12 | 261274,186 | 24 | 279943,285 |

| Halbjahr. | Zahlungssumme. | Halbjahr. | Zahlungssumme. |
|---|---|---|---|
| 25 | 183130,059 | 58 | 387056,223 |
| 26 | 283739,882 | 59 | 126360,202 |
| 27 | 181117,862 | 60 | 397279,597 |
| 28 | 287764,275 | 61 | 120941,814 |
| 29 | 178984,934 | 62 | 408116,372 |
| 30 | 292030,132 | 63 | 115198,323 |
| 31 | 176724,030 | 64 | 419603,354 |
| 32 | 296551,939 | 65 | 109110,222 |
| 33 | 174327,472 | 66 | 431779,556 |
| 34 | 301345,056 | 67 | 102656,835 |
| 35 | 171787,120 | 68 | 444686,329 |
| 36 | 306425,759 | 69 | 95816,245 |
| 37 | 169094,347 | 70 | 458367,509 |
| 38 | 311811,305 | 71 | 88565,220 |
| 39 | 166240,008 | 72 | 472869,559 |
| 40 | 317519,983 | 73 | 80879,133 |
| 41 | 163214,409 | 74 | 488241,733 |
| 42 | 323571,182 | 75 | 72731,881 |
| 43 | 160007,273 | 76 | 504536,237 |
| 44 | 329985,453 | 77 | 64095,794 |
| 45 | 156607,710 | 78 | 521808,411 |
| 46 | 336784,581 | 79 | 54941,542 |
| 47 | 153004,172 | 80 | 540116,916 |
| 48 | 343991,655 | 81 | 45238,034 |
| 49 | 149184,423 | 82 | 557523,931 |
| 50 | 351631,155 | 83 | 34952,316 |
| 51 | 145135,488 | 84 | 580095,367 |
| 52 | 359729,024 | 85 | 24049,455 |
| 53 | 140843,617 | 86 | 601901,089 |
| 54 | 368312,765 | 87 | 12492,422 |
| 55 | 136294,234 | 88 | 625015,154 |
| 56 | 377411,531 | 89 | 241,968 |
| 57 | 131471,888 | 90 | 12340,374 |

Diese Anleibe wird durch steigende Summen zurückgezahlt. Die beiden Summen des ersten Jahres betragen 450000, die des 20sten 483759,991, die des 44sten 637507,576, die des 45sten Jahres die Restschuld mit 12098,406 sammt Zinsen.

Der Tilgungsplan kann, wie sich von selbst versteht, nicht in der Strenge, wie ihn der Calcul vorschreibt, eingehalten werden, denn die Schuldscheine werden gewöhnlich in runder Summe von wenigstens 100 ausgegeben und müssen daher auch in diesen Summen zurückgezahlt werden. Die Tilgungssummen der Tabelle No. 7) müssen hiernach modificirt, also zu einer runden Summe von 100 ergänzt oder vermindert werden. Dadurch werden auch die Zahlungssummen in No. 9) in etwas, aber nur unbedeutend geändert, so dass der Tilgungsplan im Wesentlichen keine

Abänderung erleidet. Das Gesetz vom 10. September 1842 wird dadurch nicht alterirt.

## §. 57.

## Umwandlung dieser Anleihe in eine gleichwerthige 3,5procentige und Bestimmung ihres Nennwerthes und Curses.

Da nach dem bezüglichen Gesetze diese Anleihe auch als eine 3,5procentige aufgenommen werden kann (sie wurde als solche begeben), so fragt es sich: wie stellt sich in diesem Falle ihr Nennwerth und Curs. Der Tilgungsplan, wie er in No. 7) und No. 9) §. 56. für diese Anleihe angegeben wurde, bleibt auch für die umgewandelte Anleihe in Kraft.

Bei der Umsetzung in eine 3,5procentige kommen die in §. 48. angegebenen Resultate zur Anwendung. Da aber $n$ keine ganze Zahl (No. 6) §. 56.) bedeutet, so hat man die Restschuld in Rechnung zu bringen. Die Verzinsung geschieht halbjährlich, die Tilgung jährlich. Man hat daher die Gleichung No. 7) §. 48. zu benutzen und $K = 10000000$, $A = 50000$, $w = 6$, $p_1 = 2$, $q_1 = 1{,}75$, $n = 44$ und $S_{44} = 12098{,}406$ zu schreiben. Hiernach entsteht:

$$1)\qquad K_1 = \left(10000000.0{,}02 + \frac{50000.0{,}02}{0{,}06}\right).\frac{1 - 1{,}0175^{-88}}{0{,}0175}$$

$$+ \left(50000 - \frac{50000.0{,}02.2{,}0175}{0{,}06}\right).\frac{\frac{1{,}06^{44}}{1{,}0175^{88}} - 1}{1{,}06 - 1{,}0175^{2}}$$

$$+ \frac{12098{,}406}{1{,}0175^{88}}.$$

Nun ist:

$$\lg 1{,}06^{44} = 1{,}1134581,$$
$$\lg 1{,}0175^{88} = 0{,}6630288$$
$$\mathrm{N}.\ 0{,}4504293 = 2{,}8211699,$$

also:

$$\frac{1{,}06^{44}}{1{,}0175^{88}} - 1 = 1{,}8211699.$$

Werden nun die in No. 1) angezeigten Werthe eingeführt und berechnet, so erhält man hieraus:

$$K_1 = \frac{650000}{3} . 44{,}7282444 + \frac{16375 . 1{,}8211699}{0{,}02469375} + \frac{12098{,}406}{4{,}6028707},$$

$$\begin{aligned}
\lg 16375 &= 4{,}2141813 \\
\lg 1{,}8211699 &= 0{,}2603504 \\
&\phantom{=}\ 4{,}4745317 \\
\lg 0{,}02469375 &= 0{,}3925870 - 2 \\
\text{N. } 6{,}0819447 &= 1207632{,}1, \\
\lg 12098{,}406 &= 4{,}0827282 \\
\lg 1{,}0175^{88} &= 0{,}6630287 \\
\text{N. } 3{,}4196995 &= 2628{,}448.
\end{aligned}$$

Hiernach ist der gesuchte Nennwerth der in eine 3,5procentige umgewandelten Anleihe:

$$2) \qquad K_1 = 9691119{,}623 + 1207632{,}1 + 2628{,}448 = 10901380{,}171.$$

Der Curs bestimmt sich zu:

$$3) \qquad C = \frac{100 . 1000000}{10901380{,}17} = 91{,}7315,$$

$$\begin{aligned}
\lg 100 . 10000000 &= 9{,}0000000 \\
\lg 10901380 &= 7{,}0374815 \\
\text{N. } 1{,}9625185 &= 91{,}7315.
\end{aligned}$$

Nach einer Bekanntmachung des grossherzoglich badischen Finanzministeriums vom 24. Oktober 1842 wurde die Eisenbahn-Anleihe von 12 Millionen Gulden an die Bankhäuser M. A. von Rothschild und Söhne, Johann Goll und Söhne zu Frankfurt a. M. und S. von Haber und Söhne zu Karlsruhe dem Vernehmen nach im Curse von 92 in $3\frac{1}{2}$procentigen Partial-Obligationen überlassen und hievon eine dem Bedürfnisse für die Budgetperiode entsprechende Summe von 6600000 Gulden aufgenommen, welche vom 1. Januar 1843 an verzinst wird.

Die Anleihe wurde hiernach zu günstigern Bedingungen begeben, denn der Nennwerth, welcher diesem Curse entspricht, ist:

$$4) \qquad K_1 = \frac{100 . 10000000}{92} = 10869565{,}217.$$

Der Vortheil, welcher sich bei dieser Begebung für den Staat ergibt, stellt sich auf:

$$5) \qquad V = 10901380{,}171 - 10869565{,}21 = 31814{,}96.$$

Dieser Gewinn ist jedoch bei einer Anleihe von 10 Millionen nicht sehr bedeutend, und es fragt sich, ob es nicht vortheilhafter gewesen wäre, hierauf zu verzichten und das Kapital im vollen Werthe zu 4 Procent aufzunehmen, wie das Gesetz vorausgesehen hat, weil immer noch die Möglichkeit vorhanden gewesen wäre, in späterer und zu günstiger Zeit den Zinsfuss von 4 auf 3,5 herabzusetzen, wie diess in ähnlichen Fällen schon früher geschah.

Diese Anleihe findet sich auch in meiner Theorie der Lotterie-Anleihen behandelt. Dort ist jedoch eine viel zusammengesetztere Formel zur Werthberechnung angegeben, wodurch die ohnehin schon mühevolle Arbeit noch mühevoller wird. Hieraus erklärt sich auch die kleine Differenz zwischen dem dort aufgefundenen Resultate und dem hier gegebenen, was wohl von der Rechnung mit Logarithmen herrührt, die in der hier gegebenen Formel theilweise umgangen ist.

Würde die Anleihe durch gleiche jährliche Summen verzinst und getilgt werden, so würde sich der Nennwerth und Curs nach §. 49. No. 3) und No. 8) auf folgende Weise bestimmen:

6) $$K_1 = 10000000 . \frac{0,04}{1-1,04^{-44}} . \frac{1-1,035^{-44}}{0,035}$$

$$= \frac{10000000 . 22,2827910}{20,5488413} = 10843820$$

$$\lg 10^7 . 22,28279 = 8,3479696$$
$$\lg 20,548841 = 1,3127873$$
$$\text{N. } \overline{7,0351823} = 10843820$$

7) $$C = 100 . \frac{1-1,04^{-44}}{0,04} . \frac{0,035}{1-1,035^{-44}} = \frac{100 . 20,5488413}{22,2827910}$$

$$= 92,21842,$$

$$\lg 100 . 20,5488413 = 3,3127873$$
$$\lg 22,2827910 = 1,3479696$$
$$\text{No. } \overline{1,9648177} = 92,21842.$$

In diesem Falle wäre für die Anleihe weniger geboten worden. Die Differenz zwischen beiden Cursen ist jedoch nicht sehr bedeutend, und der Curs bei gleichen Zahlungssummen stellt sich etwas höher, als in dem oben angegebenen Falle, wo die Tilgung durch steigende Summen bewirkt wird. Der Werth des Curses wird übrigens bei gleichen Zahlungssummen am leichtesten gefunden. Will man die bequemere Rechnung benutzen, so

kann diess geschehen. Man wird dann immer einen annähernden Werth erhalten und durch ein schickliches Ab- und Zugeben auf den richtigen Werth schliessen können, je nachdem die Tilgung rascher oder langsamer (wie bei der badischen Anleihe) erfolgt.

## §. 58.

### Die königlich preussische Anleihe vom Jahre 1859.

Diese Anleihe ist nach der Gesetzsammlung für die königlich preussischen Staaten No. 19) S. 277. durch folgendes Gesetz festgestellt:

„Auf Ihren Antrag vom 27. d. M. genehmige Ich, dass in Gemässheit des Gesetzes vom 21. Mai d. J. betreffend den ausserordentlichen Bedarf der Militär- und Marine-Verwaltung (Gesetz-Sammlung S. 242.) eine Staatsanleihe von dreissig Millionen Thaler aufgenommen werde. Die Anleihe ist in Schuldverschreibungen über

fünfzig Thaler,
einhundert „
zweihundert „
fünfhundert „
eintausend „

auszugeben, mit fünf Procent jährlich am 2. Januar und 1. Juli jedes Jahres zu verzinsen und vom 1. Januar 1863 an mit Einem Procent des Gesammtkapitals, so wie mit dem Betrage der durch die Amortisation ersparten und der präcludirten Zinsen zu tilgen.

Dem Staate bleibt das Recht vorbehalten, den Tilgungsfonds vom 1. Januar 1870 ab zu verstärken, wogegen derselbe niemals verringert werden darf. Ich ermächtige Sie hiernach, die weitern Anordnungen zur Ausführung der Anleihe zu treffen.

Dieser Mein Erlass ist durch die Gesetzsammlung zur öffentlichen Kenntniss zu bringen.

Berlin den 28. Mai 1859.

Im Namen Sr. Majestät des Königs
Wilhelm, Prinz von Preussen, Regent.

An den Finanzminister von Patow."

Zwei weitere Bekanntmachungen von demselben Tage ordnen die Heimzahlung, die Sicherstellung des Tilgungsfonds für diese mit den beiden Häusern des Landtags vereinbarten Gesetze u. s. w.

Hiernach beruht die Werthberechnung dieser Anleihe auf folgenden Bestimmungen: der Tilgungsfonds des ersten Jahres beträgt ein Procent der Anleihe, er steigt mit jedem Jahre um fünf Procent, da die Zinsen der gezahlten Tilgungssumme demselben zugeschlagen werden. Die Verzinsung geschieht halbjährlich, die Tilgung jährlich. Die zufälligen Erhöhungen, welche dem Tilgungsfonds jeweils etwa zufliessen, sind zum Voraus nicht zu bestimmen und können daher nicht in den Calcul aufgenommen werden.

Die Anleihe wurde bekanntlich im Curse 95 statt 100 zur öffentlichen Betheiligung ausgeboten.

Nach diesen Bemerkungen finden die in §. 48. aufgestellten Sätze auf diese Anleihe Anwendung.

Die Tilgungssumme des ersten Tilgungsjahres beträgt:

1) $$A_1 = 30000000 . 0{,}01 = 300000.$$

Die Tilgungssumme am Ende des $r$ten Jahres beträgt:

2) $$A_r = 300000 . 1{,}05^{r-1}.$$

Die Grösse der am Ende des $r$ten oder zu Anfang des $(r+1)$ten Jahres getilgten Schuld erhebt sich auf:

3) $$G_r = 300000 . \frac{1{,}05^r - 1}{0{,}05}.$$

Die Grösse der nach $r$ Jahren noch zu tilgenden Schuld ist:

4) $$S_r = 30000000 - 300000 . \frac{1{,}05^r - 1}{0{,}05}.$$

Die Tilgungszeit bestimmt sich aus 4), wenn $S_r = 0$ gesetzt wird. Hieraus erhält man:

5) $$\frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05} = \frac{30000000}{300000} = 100,$$

und aus den Tafeln eine Zeit von nahe 37 Jahren, oder:

6) $$n = \frac{\lg(100 . 0{,}05 + 1)}{\lg 1{,}05} = \frac{\lg 6}{\lg 1{,}05} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893} = 36{,}72377,$$

$$\begin{aligned} \lg 0{,}7781513 &= 0{,}8910641 - 1 \\ \lg 0{,}0211893 &= 0{,}3261167 - 2 \\ \text{N. } 1{,}5649474 &= 36{,}72377. \end{aligned}$$

In 37 Jahren wird also die Anleihe getilgt sein. Die Art, wie die Tilgung geschieht, ist aus der nachfolgenden Tafel ersichtlich.

7)

| Jahr. | Grösse der Tilgungssumme am Ende des Jahres oder Anfang des folgenden. | Grösse der getilgten Schuld am Ende des Jahres oder Anfange des folgenden. | Stand der Schuld am Ende des Jahres oder Anfange des folgenden. |
|---|---|---|---|
| 1862 | 300000 | 300000 | 29700000 |
| 1863 | 315000 | 615000 | 29385000 |
| 1864 | 330750 | 945750 | 29054250 |
| 1865 | 347287,5 | 1293037,5 | 28706962,5 |
| 1866 | 364651,875 | 1657689,375 | 28342310,625 |
| 1867 | 382884,4689 | 2040573,8439 | 27959426,1561 |
| 1868 | 402028,6920 | 2442602,5359 | 27557397,4641 |
| 1869 | 422130,1269 | 2864732,6628 | 27135267,3372 |
| 1870 | 443236,6332 | 3307969,2960 | 26692030,7040 |
| 1871 | 465398,4648 | 3773367,7608 | 26226632,2392 |
| 1872 | 488668,3878 | 4262036,1486 | 25737963,8514 |
| 1873 | 513101,8074 | 4775137,9560 | 25224862,0440 |
| 1874 | 538756,8978 | 5313894,8538 | 24686105,1462 |
| 1875 | 565694,7429 | 5879589,5967 | 24120410,4033 |
| 1876 | 593979,4797 | 6473569,0764 | 23526430,9236 |
| 1877 | 623678,4540 | 7097247,5304 | 22902752,4696 |
| 1878 | 654862.3764 | 7752109,9068 | 22247890,0932 |
| 1879 | 687605,4954 | 8439715,4022 | 21560284,5978 |
| 1880 | 721985,7702 | 9161701,1724 | 20838298.8276 |
| 1881 | 758085,0585 | 9919786,2309 | 20080213,7691 |
| 1882 | 795989,3115 | 10715775,5424 | 19284224,4576 |
| 1883 | 835788,7770 | 11551564,3194 | 18448435,6806 |
| 1884 | 877578,2160 | 12429142,5354 | 17570857,4646 |
| 1885 | 921457,1268 | 13350599.6622 | 16649400.3378 |
| 1886 | 967529,9832 | 14318129,6454 | 15681870,3546 |
| 1887 | 1015906,4823 | 15334036,1277 | 14665963,8723 |
| 1888 | 1066701,8064 | 16400737,9341 | 13599262,0659 |
| 1889 | 1120036,8966 | 17520774,8307 | 12479225,1693 |
| 1890 | 1176038,7417 | 18696813.5724 | 11303186,4276 |
| 1891 | 1234840,6785 | 19931654.2509 | 10068345,7491 |
| 1892 | 1296582,7125 | 21228236,9634 | 8771763,0366 |
| 1893 | 1361411,8482 | 22589648,8116 | 7410351,1884 |
| 1894 | 1429482,4407 | 24019131,2523 | 5980868.7477 |
| 1895 | 1500956,5626 | 25520087,8149 | 4479912,1851 |
| 1896 | 1576004,3907 | 27096092,2056 | 2903907,7944 |
| 1897 | 1654804,6104 | 28750896,8157 | 1249103,1843 |
| 1898 | 1249103,1843 | 30000000 | |

Die Zahlungen sind halbjährlich zu leisten. Sie berechnen sich für die Tabelle No. 7) aus den Formeln:

$$8)\qquad L_{2r-1} = S_{r-1}.0{,}0p_1 \quad \text{und} \quad L_{2r} = S_{r-1}.0{,}0p_1 + A_r.$$

Die erste Tilgung fällt nach dem Gesetze auf den 1. Januar 1863 oder auf das Ende des Jahres 1862.

Wir stellen, um Raum zu ersparen, die jeweils fälligen Summen in folgender Tabelle zusammen:

9)

| Jahr. | Halbjahr. | Zahlungssumme. | Jahr. | Halbjahr. | Zahlungssumme. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1862 | 1 | 750000 | 1881 | 1 | 520957,4707 |
| | 2 | 1050000 | | 2 | 1279042,5293 |
| 1863 | 1 | 742500 | 1882 | 1 | 502005,3442 |
| | 2 | 1057500 | | 2 | 1297994,6558 |
| 1864 | 1 | 734625 | 1883 | 1 | 482105,6115 |
| | 2 | 1065375 | | 2 | 1317894,3885 |
| 1865 | 1 | 726356,25 | 1884 | 1 | 461210,8920 |
| | 2 | 1073643,75 | | 2 | 1338789,1080 |
| 1866 | 1 | 717674,0625 | 1885 | 1 | 439271,4366 |
| | 2 | 1082325,9375 | | 2 | 1360728,5634 |
| 1867 | 1 | 708557,7656 | 1886 | 1 | 416235,0084 |
| | 2 | 1091442,2344 | | 2 | 1383764,9916 |
| 1868 | 1 | 698985,6539 | 1887 | 1 | 392046,7589 |
| | 2 | 1101014,3461 | | 2 | 1407953,2411 |
| 1869 | 1 | 688934,9366 | 1888 | 1 | 366649,0968 |
| | 2 | 1111065,0634 | | 2 | 1433350,9032 |
| 1870 | 1 | 678381,6834 | 1889 | 1 | 339981,5516 |
| | 2 | 1121618,3166 | | 2 | 1460018,4484 |
| 1871 | 1 | 667300,7676 | 1890 | 1 | 311980,6292 |
| | 2 | 1132699,2324 | | 2 | 1488019,3708 |
| 1872 | 1 | 655665,8061 | 1891 | 1 | 282579,6607 |
| | 2 | 1144334,1939 | | 2 | 1517420,3393 |
| 1873 | 1 | 643449,0963 | 1892 | 1 | 251708,6438 |
| | 2 | 1156550,9037 | | 2 | 1548291,3562 |
| 1874 | 1 | 630621,5511 | 1893 | 1 | 219294,0759 |
| | 2 | 1169378,4489 | | 2 | 1580705,9241 |
| 1875 | 1 | 617152,6286 | 1894 | 1 | 185258,7797 |
| | 2 | 1182847,3714 | | 2 | 1614741,2203 |
| 1876 | 1 | 603010,2601 | 1895 | 1 | 149521,7187 |
| | 2 | 1196989,7399 | | 2 | 1650478,2813 |
| 1877 | 1 | 588160,7730 | 1896 | 1 | 111997,8046 |
| | 2 | 1211839,2270 | | 2 | 1688002,1954 |
| 1878 | 1 | 572568,8118 | 1897 | 1 | 72597,6948 |
| | 2 | 1227431,1882 | | 2 | 1727402,3052 |
| 1879 | 1 | 556197,2523 | 1898 | 1 | 31227,5796 |
| | 2 | 1243802,7477 | | 2 | 1280330,7693 |
| 1880 | 1 | 539007,1149 | | | |
| | 2 | 1260992,8851 | | | |

Aus der Tabelle No. 9) zeigt sich, dass die Anleihe in gleich grossen, jährlichen Summen zurückgezahlt wird, wie diess nach dem früher Gesagten sein muss, und wie sich aus der Vereinigung der Zahlungssummen zweier zusammengehörigen Halbjahre ergibt. Die Zahlungssummen der ungeraden Halbjahre fallen, die der geraden steigen.

Der Tilgungsplan wird jedoch bei der Durchführung kleine Modifikationen erleiden, da die Kapitaltilgungen in runden Summen von wenigstens 50 Thaler zu geschehen haben. Diese kleinen Abweichungen können durch Zu- und Abgeben leicht ausgeglichen werden, weswegen der Tilgungsplan im Wesentlichen nicht alterirt wird.

## §. 59.

### Methode, den Zinsfuss zu bestimmen, wenn Anleihen zu einem niederen Curse als 100 begeben werden.

Häufig werden die Anleihen, um zur Betheiligung anzuregen, nicht in vollem Werthe, sondern zu einem niedern Curse ausgeboten und begeben.

Ist diess, wie bei der königlich preussischen Anleihe vom Jahre 1859 der Fall, so bekommt der Staat eine geringere Summe in die Casse, als er bei vollem Werthe erhalten hätte, muss aber doch nach dem festgestellten Tilgungsplane die nämlichen Summen jährlich zahlen, als wenn er den vollen Betrag der Anleihe erhalten hätte. Die Folge ist, dass der Staat das erhaltene Kapital in einem höheren Zinsfusse, als in dem festgesetzten, verzinsen muss.

Es entsteht daher die Frage: Wie gross ist der Zinsfuss, in welchem der Staat eine Anleihe verzinsen muss, wenn er die Schuldscheine in dem niedern Curse $C$ statt 100 ausgibt?

Hiezu dienen folgende Methoden:

Erste Methode. Sie ergibt sich aus den in §. 46. u. ff. aufgestellten Gleichungen. Man hat zu dem Ende zuerst den für die Anleihe gültigen Plan bei dem festgestellten Zinsfuss ($p$) aufzustellen und dann die sämmtlichen Zahlungssummen in dem fraglichen Zinsfuss ($q$), der vorerst noch unbekannt ist und welcher nach dem Gesagten ein höherer sein wird, zu rabattiren.

Nennt man nun den Curs, zu welchem die Anleihe $K$ begeben wurde, $C$, so bekommt der Staat statt des vollen Werthes nur die Summe:

$$1) \qquad R = \frac{C.K}{100}$$

in die Casse, und man hat daher diesen Werth statt $K_1$ in die bezügliche Gleichung einzusetzen.

Da die preussische Anleihe durch halbjährliche Verzinsung und jährliche Tilgung zurückgezahlt wird, so kommen bei ihr die in §. 48. aufgestellten Gleichungen, wie sich zeigt, zur Anwendung. Man hat daher den Werth aus No. 1) in No. 8) §. 48. einzuführen. Hiedurch entsteht:

$$2) \qquad R = (K.0{,}0p_1 + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}).\frac{1-1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1}$$

$$+(A - \frac{A.0{,}0p_1.2{,}0q_1}{0{,}0w}).\frac{1-\frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}}{1{,}0q_1^2 - 1{,}0w} + \frac{S_n}{1{,}0q_1^{2n}}.$$

Hierin bedeutet $S_n$ die Restschuld des letzten Jahres, da $n$ keine ganze Zahl bedeutet, und die vorliegende Aufgabe ist darauf zurückgebracht, aus dieser Gleichung den Werth von $q_1$ zu bestimmen.

Diess führt, wie man sieht, auf die Auflösung einer Gleichung höherer Ordnung, die um so mühevoller wird, je grösser $n$ ist, was gewöhnlich stattfindet, da die Tilgungen solcher Anleihen eine lange Dauer haben. Es bleibt daher, wenn man auf diesem Wege zum Ziele gelangen will, nichts übrig, als für $q_1$ taugliche Werthe in No. 2) zu substituiren und so lange mit der Substitution fortzufahren, bis der Werth gefunden ist, welcher der Gleichung genügt. Nach einigen Versuchen, deren Durchführung aber immer mühevoll und weitläufig ist, wird diess wohl gelingen, wenn es genügen wird, den Zinsfuss auf einige Hundertel oder Tausendtel zu bestimmen.

Immer ist diese Auflösung eine weit ausgreifende Arbeit. Daher wird es gerathen sein, diese Auflösungsweise zu verlassen und eine andere zu suchen, die wir im Folgenden geben.

Zweite Methode. Nimmt ein Staat die Schuld $K$ zu dem Curse $C$ auf, so bekommt er nach No. 1) statt der vollen Summe $K$ nur die Summe $R = \frac{K.C}{100}$ in die Casse, muss aber das volle Kapital $K$ dem Tilgungsplane gemäss verzinsen und tilgen. Diess geschieht nun dadurch, dass er die geringere Summe $R$, die er erhalten hat, in einem höhern Zinsfuss verzinst.

Nennt man nun den höhern Zinsfuss $p$, dessen Auffindung Aufgabe ist, und den ursprünglich festgestellten Zinsfuss, worin

das Kapital verzinst werden soll, $q$ (was der Harmonie wegen geschieht, um die bisher aufgefundenen Gleichungen nicht umändern zu müssen), so hat man für die erhaltene Summe $R$ nach den im dritten Kapitel aufgestellten Gesetzen den bezüglichen Tilgungsplan im Zinsfuss $p$ festzustellen. Sämmtliche so entstehenden Zahlungssummen sind ihrem Inhalte nach dem vollen Werthe der aufgenommenen Anleihe gleich. Ihre Reduction auf die Gegenwart oder Rabattirung in dem ursprünglichen Zinsfuss (hier $q$ genannt) muss daher auch dem Werthe der Anleihe ($K$) gleichkommen. Bei dieser Darstellungsweise müssen auch die bezüglichen Tilgungssummen in dem Verhältniss des niedern Curses festgestellt werden, was leicht ausführbar ist, da man $R$ kennt, und wozu die Proportion

$$K : R = A : A_1$$

dient, woraus sich im Allgemeinen für jede Tilgungssumme folgende Bestimmung ergibt:

$$3) \qquad A_1 = \frac{R.A}{R} = \frac{K.C}{100.K} . A = \frac{CA}{100}.$$

Nach diesen Bemerkungen geht die Gleichung No. 2) in folgende über, da $K$ an die Stelle von $R$ und umgekehrt $R$ an die Stelle von $K$, $A_1$ an die Stelle von $A$ tritt:

$$4) \qquad K = \left(R.0{,}0p_1 + \frac{A_1.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right). \frac{1-1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1}$$

$$+\left(A_1 - \frac{A_1.0{,}0p_1.2{,}0q_1}{0{,}0w}\right). \frac{\left(1-\frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}\right)}{1{,}0q_1^{2n}-1{,}0w} + \frac{S_n}{1{,}0q_1^{2n}}.$$

Der Werth von $S_n$, der sich aus der Gleichung

$$S_n = R - A_1 . \frac{1{,}0w^n - 1}{0{,}0w}$$

berechnet, muss berücksichtigt werden, wenn $n$ keine ganze Zahl bedeutet.

Aus dieser Gleichung kann nun der Werth des höhern Zinsfusses ($p_1$), um dessen Bestimmung es sich handelt, ganz einfach ermittelt werden. Man erhält sofort, wenn man sie auflöst und die erforderlichen Reductionen macht:

$$5) \qquad 0{,}0p_1$$

$$= \frac{K - \frac{A_1}{1{,}0q_1^2 - 1{,}0w}.\left(1-\frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}\right) - \frac{S}{1{,}0q_1^{2n}}}{\left(R+\frac{A_1}{0{,}0w}\right).\frac{1-1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1} - \frac{A.2{,}0q_1}{0{,}0w(1{,}0q_1^2-1{,}0w)}.\left(1-\frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}\right)}.$$

Diese Gleichung gilt für jährliche Tilgung und halbjährliche Verzinsung und für solche Tilgungspläne, worin die Tilgungssummen um $w$ Procent wachsen. Man erkennt jedoch leicht, dass sich diese Methode auf alle in § 46. u. ff. aufgestellten und aufzustellenden Tilgungspläne anwenden lässt, wenn man den Grössen $K$, $R$, $A_1$, $q$ und $p$ die Werthe beilegt, welche ihnen nach dem Gesagten beigelegt werden müssen.

Ist die Tilgungssumme des ersten Jahres, wie diess häufig vorkommt, und auch in den beiden Anleihen, der badischen und preussischen, der Fall ist, durch einen Procentsatz des ganzen Kapitals gegeben, und nennt man diesen Procentsatz $v$, so ist in No 2):

$$6)\qquad A = K.0{,}0v,$$

dagegen in No. 4) und No. 5):

$$7)\qquad A_1 = R.0{,}0v = \frac{K.C}{100}.0{,}0v$$

zu setzen. Führt man diese Werthe ein, so vereinfachen sich die gegebenen Bestimmungen. $K$ fällt nämlich für den Fall, als $n$ eine ganze Zahl bedeutet, aus der Gleichung und bleibt nur in einem Gliede stehen, wenn $n$ keine ganze Zahl bedeutet und noch eine Restschuld zu berücksichtigen ist. Führt man nun den Werth für $R$ und $A_1$ aus No. 1) und No. 7) in No. 5) ein, so entsteht:

$$8)\qquad 0{,}0p_1 = \frac{1 - \frac{C.0{,}0v}{100(1{,}0q_1{}^2 - 1{,}0w)}.\left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right) - \frac{S_n}{K.1{,}0q_1{}^{2n}}}{\left(\frac{C}{100} + \frac{C.0{,}0v}{100.1{,}0w}\right).\frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1} - \frac{C.0{,}0v.2{,}0q_1}{100.0{,}0w(1{,}0q_1{}^2 - 1{,}0w)}.\left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right)},$$

oder in bequemerer Form:

$$9)\qquad 0{,}0p_1 = \frac{100 - \frac{C.0{,}0v}{1{,}0q_1{}^2 - 1{,}0w}.\left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right) - \frac{100.S_n}{K.1{,}0q_1{}^{2n}}}{C\left[\left(1 + \frac{0{,}0v}{0{,}0w}\right).\frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1} - \frac{0{,}0v.2{,}0q_1}{0{,}0w(1{,}0q_1{}^2 - 1{,}0w)}.\left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right)\right]}.$$

Dritte Methode. Soll eine Anleihe $K$, die zu dem Curse $C$ statt 100 begeben wird, im vollen Betrage effectuirt werden, so ist hierzu die höhere Summe:

$$10)\qquad K_1 = \frac{K.100}{C}$$

erforderlich, um die Summe $K$ in die Casse zu bekommen, und der Staat muss Schuldscheine im Betrage von $K_1$ ausstellen, um die Summe $K$ zu erhalten. Diese grössere Summe muss nach dem Plane verzinst und getilgt werden. Daher ist der gegenwärtige Werth der aufgenommenen Schuld $K_1$. Die Folge hievon ist, dass die wirklich erhaltene Summe $K$ in einem höhern Zinsfuss ($p$) verzinst werden muss. Entwirft man nun nach den Gesetzen des dritten Kapitels hiefür den erforderlichen Tilgungsplan und reducirt die hiedurch erhaltenen und im höhern Zinsfuss zu zahlenden Summen in dem ursprünglichen Zinsfuss ($q$), so wird der hiedurch entstehende Werth dem Nennwerthe $K_1$ der contrahirten Schuld gleichkommen müssen. Hiernach hat man $K_1$ statt $R$ in der Gleichung No. 2) zu setzen und alles Uebrige zu belassen. Man erhält:

11) $$K_1 = \left(K.0{,}0p_1 + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right).\frac{1-1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1} + \left(A - \frac{A.0{,}0p_1.2{,}0q_1}{0{,}0w}\right).\frac{1-\dfrac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}}{1{,}0q_1^2 - 1{,}0w} + \frac{S_n}{1{,}0q_1^{2n}}.$$

Der Werth der Restschuld ist in diesem Falle:

12) $$S_n = K - A.\frac{1{,}0w^n - 1}{0{,}0w}.$$

Man kann auch, wenn $n$ keine ganze Zahl ist, für $n$ die nächst höhere ganze Zahl nehmen. Dann geht No. 11) über in:

13) $$K_1 = \left(K.0{,}0p_1 + \frac{A.0{,}0p_1}{0{,}0w}\right).\frac{1-1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1} + \left(A - \frac{A.0{,}0p_1.2{,}0q_1}{0{,}0w}\right).\frac{1-\dfrac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}}{1{,}0q_1^2 - 1{,}0w} - \frac{S_n}{1{,}0q_1^{2n}}.$$

Der Werth von $S_n$ bestimmt sich dann durch

14) $$S_n = A.\frac{1{,}0w^n - 1}{0{,}0w} - K.$$

Aus No. 11) bestimmt sich dann der Werth des Zinsfusses auf folgende Weise:

15) $$0{,}0p_1 = \frac{K_1 - \dfrac{A}{1{,}0q_1^2 - 1{,}0w}\left(1 - \dfrac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}\right) - \dfrac{S_n}{1{,}0q_1^{2n}}}{\left(K + \dfrac{A}{0{,}0w}\right).\dfrac{1-1{,}0q_1^{-2n}}{0{,}0q_1} - \dfrac{A.2{,}0q_1}{0{,}0w(1{,}0q_1^2 - 1{,}0w)}.\left(1 - \dfrac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{2n}}\right)}.$$

Aus No. 13) auf folgende:

16)

$$0{,}0p_1 = \frac{K_1 - \frac{A}{1{,}0q_1^{\,2} - 1{,}0w}\left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{\,2n}}\right) + \frac{S_n}{1{,}0q_1^{\,2n}}}{\left(K + \frac{A}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1^{\,-2n}}{0{,}0q_1} - \frac{A \,.\, 2{,}0q_1}{0{,}0w(1{,}0q_1^{\,2} - 1{,}0w)} \cdot \left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{\,2n}}\right)}.$$

Stellt man nun auch hierin $A$ durch einen Procentsatz dar und setzt $A = K.0{,}0v$ und $K_1 = \frac{K.100}{C}$, so vereinfachen sich diese Darstellungen, und man erhält, wenn $K$ ausgestossen wird, hiefür:

17)

$$0{,}0p_1 = \frac{\frac{100}{C} - \frac{0{,}0v}{1{,}0q_1^{\,2} - 1{,}0w}\left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{\,2n}}\right) - \frac{S_n}{K.1{,}0q_1^{\,2n}}}{\left(1 + \frac{0{,}0v}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1^{\,-2n}}{0{,}0q_1} - \frac{0{,}0v \,.\, 2{,}0q_1}{0{,}0w(1{,}0q_1^{\,2} - 1{,}0w)} \cdot \left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{\,2n}}\right)},$$

18)

$$0{,}0p_1 = \frac{\frac{100}{C} - \frac{0{,}0v}{1{,}0q_1^{\,2} - 1{,}0w}\left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{\,2n}}\right) + \frac{S_n}{K.1{,}0q_1^{\,2n}}}{\left(1 + \frac{0{,}0v}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1^{\,-2n}}{0{,}0q_1} - \frac{0{,}0v \,.\, 2{,}0q_1}{0{,}0w(1{,}0q_1^{\,2} - 1{,}0w)} \cdot \left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1^{\,2n}}\right)}.$$

Die Gleichung No. 9) stimmt, wie man sieht, mit No. 17) überein, denn man kann jene aus letzterer ableiten, wenn man den Zähler und Nenner mit $C$ dividirt, und umgekehrt.

Die beiden Gleichungen geben den Werth des fraglichen Zinsfusses nur annähernd, aber in grosser Genauigkeit. Er bestimmt sich um so genauer, je grösser $n$ ist, was gewöhnlich eintritt, da die Tilgungszeiten der Anleihen einen grössern Zeitraum umfassen.

Auf dieselbe Weise können nun die Zinsfüsse für andere Tilgungspläne bestimmt werden.

Geschieht die Tilgung und Verzinsung jährlich, so kommt die Gleichung No. 4) §. 48. zur Anwendung. Man erhält dann:

19)

$$0{,}0p = \frac{K_1 - \frac{A}{1{,}0q - 1{,}0w} \cdot \left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q^n}\right) - \frac{S_n}{1{,}0q^n}}{\left(K + \frac{A}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q^{-n}}{0{,}0w} - \frac{A}{0{,}0w(1{,}0q - 1{,}0w)} \cdot \left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q^n}\right)}.$$

Hierin ist $K_1 = \frac{K.100}{C}$, oder wenn $A$ durch einen Procentsatz bestimmt ist:

20)

$$0{,}0p = \frac{\frac{100}{C} - \frac{0{,}0v}{1{,}0q - 1{,}0w} \cdot \left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q^n}\right) - \frac{S_n}{K.1{,}0q^n}}{\left(1 + \frac{0{,}0v}{0{,}0w}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q^{-n}}{0{,}0q} - \frac{0{,}0v}{0{,}0w\,(1{,}0q - 1{,}0q} \cdot \left(1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q^n}\right)}.$$

Dieselbe Gleichung leitet sich aus No. 11) §. 48. für halbjährliche Verzinsung und Tilgung ab, wenn man $q_1$ statt $q$, $p_1$ statt $p$ und $2n$ statt $n$ schreibt.

Geschieht die Tilgung durch jährliche gleiche Abtragssummen, so kommen die Gleichungen des §. 47. zur Anwendung und man erhält für jährliche Verzinsung und Tilgung folgende Bestimmung aus No. 3) §. 47.:

$$21) \qquad 0{,}0p = \frac{K_1 - A . \frac{1 - 1{,}0q^{-n}}{0{,}0q} - \frac{S_n}{1{,}0q^n}}{\left(K - \frac{A}{0{,}0q}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q^{-n}}{0{,}0q} + \frac{nA}{0{,}0q \,.\, 1{,}0q^n}}.$$

Schreibt man hierin $p_1$ statt $p$, $q_1$ statt $q$, $2n$ statt $n$ und den entsprechenden Werth für $A$, so gilt diese Gleichung auch für halbjährliche Tilgung und Verzinsung. Für jährliche Tilgung und halbjährliche Verzinsung ergibt sich aus No. 8) §. 47. folgende Bestimmung:

$$22) \quad 0{,}0p_1 = \frac{K_1 - A . \frac{1 - 1{,}0q_1^{-2n}}{1{,}0q_1^2 - 1} - \frac{S_n}{1{,}0q_1^{2n}}}{\left(K.2{,}0q_1 - \frac{A}{0{,}0q_1}\right) \cdot \frac{1 - 1{,}0q_1^{-2n}}{1{,}0q_1^2 - 1} + \frac{nA}{0{,}0q_1 \,.\, 1{,}0q_1^{2n}}}.$$

## §. 60.

### Anwendung der aufgefundenen Methode auf die preussische Anleihe.

Wir machen nun eine Anwendung der §. 59. aufgestellten Sätze zur Berechnung des Zinsfusses der preussischen Anleihe von 1859.

Da die Anleihe halbjährlich zu 5 Procent verzinst, jährlich getilgt wird, die Tilgungssumme des ersten Jahres 1 Procent be-

trägt und jährlich um 5 Procent wächst, die Tilgungszeit 36 Jahre beträgt, so hat man am bequemsten die Gleichung No. 17) §. 59. zu benutzen und $C = 95$, $q = 5$, $w = 5$, $v = 1$, $K = 30000000$, $S_{36} = 1249103{,}1843$ zu setzen. Hiernach entsteht:

1)

$$0{,}0p_1 = \frac{\frac{100}{95} - \frac{0{,}01}{1{,}025^2 - 1{,}05}\left(1 - \frac{1{,}05^{36}}{1{,}025^{72}}\right) - \frac{1249103{,}18}{30000000\,.\,1{,}025^{72}}}{\left(1 + \frac{0{,}01}{0{,}05}\right)\frac{1 - 1{,}025^{-72}}{0{,}025} - \frac{0{,}01\,.\,2{,}025}{0{,}05\,(1{,}025^2 - 1{,}05)}\left(1 - \frac{1{,}05^{36}}{1{,}025^{72}}\right)}.$$

Werden die angezeigten Multiplikationen und Divisionen ausgeführt, so entsteht:

$$0{,}0p_1 = \frac{1{,}05263157894 - 16\left(1 - \frac{1{,}05^{36}}{1{,}025^{72}}\right) - \frac{0{,}0416367728}{1{,}025^{72}}}{1{,}2\,.\,33{,}2400780 - 648\,.\left(1 - \frac{1{,}05^{36}}{1{,}025^{72}}\right)}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \lg 1{,}05^{36} &= 0{,}7628148 \\ \lg 1{,}025^{72} &= 0{,}7721183 \\ \text{N.}\ \overline{0{,}9906965} &- 1 = 0{,}97880558, \end{aligned}$$

$$1 - \frac{1{,}05^{36}}{1{,}025^{72}} = 1 - 0{,}97880558 = 0{,}02119442,$$

$$\begin{aligned} \lg 0{,}041636772 &= 0{,}6194770 \\ \lg 1{,}025^{72} &= 0{,}7721183 \\ \text{N.}\ \overline{0{,}8473587} &- 3 = 0{,}007036532. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieser Werthe entsteht:

$$0{,}0p_1 = \frac{1{,}05263157894 - 16\,.\,0{,}02119442 - 0{,}007036532}{39{,}888093632 - 648\,.\,0{,}02119442}$$

$$= \frac{1{,}05263157894 - 0{,}33911072 - 0{,}007036532}{39{,}888093632 - 13{,}73398416},$$

2) $$0{,}0p_1 = \frac{0{,}70648432}{26{,}15410947} = 0{,}02701236,$$

$$\begin{aligned} \lg 0{,}7064843 &= 0{,}8491024 - 1 \\ \lg 26{,}154109 &= 1{,}4175399 \\ \text{N.}\ \overline{0{,}4315625} &- 2 = 0{,}02701236. \end{aligned}$$

Der Zinsfuss bestimmt sich daher zu:

3) $$p = 5{,}402472.$$

Würde man die Gleichung No. 9) §. 59. der Rechnung zu Grunde legen, so entstünde das gleiche Resultat, wenn $S_n$ richtig bestimmt wird. Der so gefundene Werth ist um ein Unbedeutendes zu gross, was, wie oben bemerkt, in der Näherungsmethode liegt. Mit wachsendem $n$ nähert sich derselbe dem Werthe der ewigen Rente. Der Grenzwerth hiefür ist bei dem Curse von 95:

$$p = \frac{100.5}{95} = 5{,}263\ \ldots.$$

Man kann auch zur Bestimmung von $p$ die Gleichung No. 18) §. 59. wählen. Dann hat man ausser den oben angegebenen Werthen $n = 37$ zu setzen und den Werth für $S_n$ zu ermitteln. Es ist dann:

4) $$S_{37} = 300000 . \frac{1{,}05^{37} - 1}{0{,}05} - 30000000$$

$$= 300000 . 101{,}6281389 - 30000000 = 488441{,}66.$$

und hieraus:

5)

$$0{,}0p_1 = \frac{\frac{100}{95} - \frac{0{,}01}{1{,}025^2 - 1{,}05}\left(1 - \frac{1{,}05^{37}}{1{,}025^{74}}\right) + \frac{488441{,}66}{30000000 . 1{,}025^{74}}}{\left(1 + \frac{0{,}01}{0{,}05}\right)\frac{1 - 1{,}025^{-74}}{0{,}025} - \frac{0{,}01 . 2{,}025}{0{,}05(1{,}025^2 - 1{,}05)}\left(1 - \frac{1{,}05^{37}}{1{,}025^{74}}\right)},$$

$$\lg 1{,}05^{37} = 0{,}7840041$$
$$\lg 1{,}025^{74} = 0{,}7935660$$
$$\text{N. } \overline{0{,}9904381} - 1 = 0{,}97822328,$$

$$1 - \frac{1{,}05^{37}}{1{,}025^{74}} = 1 - 0{,}97822328 = 0{,}02177672,$$

also durch Einführung und Benutzung der schon angegebenen Werthe:

$$0{,}0p_1 = \frac{1{,}0526315789 - 16 . 0{,}02177672 + \frac{0{,}016281389}{1{,}025^{74}}}{1{,}2 . 33{,}5658089 - 648 . 0{,}02177672},$$

$$\lg 0{,}016281389 = 0{,}2116914 - 2$$
$$\lg 1{,}025^{74} = 0{,}7935660$$
$$\text{N. } \overline{0{,}4181254} - 3 = 0{,}002618939,$$

$$6)\qquad 0{,}0p_1 = \frac{1{,}0526315789 - 0{,}34842752 + 0{,}002618939}{40{,}27897073 - 14{,}11131456}$$

$$= \frac{0{,}70682299}{26{,}16765617} = 0{,}02701132,$$

$$\lg 0{,}70682299 = 0{,}8493106 - 1$$
$$\lg 26{,}167656 \;\; = 1{,}4177648$$
$$\text{N. } 0{,}4315458 - 2 = 0{,}02701132.$$

Hiernach bestimmt sich der Zinsfuss zu:

$$7)\qquad p = 5{,}402264,$$

um ein Unbedeutendes kleiner als in No. 3), da $n$ grösser ist.

Will man nun die Richtigkeit des gefundenen Werthes prüfen, so dient hiezu am besten die in No. 2) §. 59. zu der ersten Methode angegebene Formel. Sie lässt sich zu dem Ende in eine bequemere Form bringen, wenn man, wie dort angegeben, $R = \frac{K.C}{100}$ und $A = K.0{,}0v$ setzt. Dadurch fällt $K$ aus allen Gliedern bis auf eines weg und man erhält folgende Gleichung:

$$8)\qquad \frac{C}{100} = 0{,}0p_1\left(1 + \frac{0{,}0v}{0{,}0w}\right)\cdot\frac{1 - 1{,}0q_1{}^{-2n}}{0{,}0q_1}$$

$$+ 0{,}0v\left(1 - \frac{2{,}0q_1 . 0{,}0p_1}{0{,}0w}\right)\cdot\frac{1 - \frac{1{,}0w^n}{1{,}0q_1{}^{2n}}}{1{,}0q_1{}^2 - 1{,}0w} + \frac{S_n}{K.1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

In dieser Gleichung hat man nun im Sinne der dort angegebenen Methode $p=5$, $v=1$, $q=5{,}4$, $n=36$ und $S_{36}=1249103{,}1843$, $K = 30000000$ zu schreiben. Hiernach entsteht, wenn man $C$ belässt:

$$9)\qquad \frac{C}{100} = 0{,}025 . 1{,}2\,\frac{1 - 1{,}027^{-72}}{0{,}027}$$

$$+ 0{,}01\left(1 - \frac{2.027 . 0{,}025}{0{,}05}\right)\cdot\frac{1 - \frac{1{,}05^{36}}{1{,}027^{72}}}{1{,}027^2 - 1{,}05} + \frac{1249103{,}1843}{30000000 . 1{,}027^{72}}.$$

Zur Berechnung bedarf man folgender Werthe:

$$\lg 1{,}05^{36} \;\; = 0{,}7628148$$
$$\lg 1{,}027^{72} = 0{,}8330719$$
$$\text{N. } 0{,}9297429 - 1 = 0{,}85063425,$$

$$\lg 1{,}027^{-72} = 0{,}1669281 - 1 = \lg 0{,}14686829$$

$$1-\frac{1{,}05^{36}}{1{,}027^{72}}=1-0{,}85063425=0{,}14936575,$$

$$1-1{,}027^{-72}=1-0{,}14686829=0{,}85313171,$$

$$1{,}027^{2}-1{,}05=0{,}004729.$$

Werden nun diese Werthe eingeführt und die begleitenden Factoren auf die einfachste Form zurückgebracht, so geht No. 9) über in:

$$\frac{C}{100}=\frac{10}{9}.0{,}85313171-\frac{135}{4729}.0{,}14936575+\frac{0{,}041636772}{1{,}027^{72}},$$

$$\begin{aligned} \lg 0{,}041636772 &= 0{,}6194770-2 \\ \lg 1{,}027^{72} &= \underline{0{,}8330719} \\ \text{N. } & 0{,}7864051-3=0{,}0061151213. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus durch Ausführung der angezeigten Multiplikationen und Divisionen:

10) $$\frac{C}{100}=0{,}94792412-0{,}004263983+0{,}0061151213$$

$$=0{,}94977526.$$

Da nun die preussische Anleihe zu 95 begeben wurde und $C=95$ ist, so differirt das gefundene Resultat um 0,00022473.... von demjenigen, das hätte gefunden werden sollen. Bringt man nun die gefundene Zahl durch Multiplikation mit 30000000 auf diese Anleihe zurück und vergleicht sie mit der Summe

$$R=\frac{95}{100}.30000000=28500000,$$

welche der Staat in Casse bekam, so beträgt dieser Unterschied:

$$D=28500000-27493257{,}8=6742{,}2,$$

also eine so kleine Summe, die bei einer Anleihe von 30000000 kaum in Betrachtung kommt.

Hiernach stellt sich der Zinsfuss, in welchem diese Anleihe vom Staate verzinst wird, nahe auf 5,4 statt auf 5. Dieser Zinsfuss bedingt einen Curs von

11) $$C=\frac{100.5{,}4}{5}=108$$

für Jemand, der eine Geldanlage zu 5 Procent machen will. Die Schuldscheine dieser Anleihe werden gegenwärtig an der Börse zu

104 bis 105 ausgeboten, diess ist bei einem Staate von so musterhafter Finanzverwaltung, wie Preussen, ein billiger Preis.

## §. 61.

### Fortsetzung.

Für Jemand, der sich an dieser Anleihe durch Ankauf von Schuldscheinen betheiligt, stellt sich die Sache anders, und man kann füglich zwischen objectivem Zinsfuss, der im vorigen Paragraphen ermittelt wurde, und für den Staat als Schuldner gilt, und subjectivem unterscheiden, der im folgenden erörtert werden soll. Kauft nämlich Jemand einen Schuldschein, so verzinst sich derselbe um so höher, je niederer der Curs steht. Tritt hiezu der günstige Fall, dass der gekaufte Schuldschein schon im ersten Tilgungsjahre zurückgezahlt wird, so steigert sich der Vortheil durch den Mehrerlös aus der voll zurückgezahlten Summe. Die Heimzahlung kann jedes Jahr erfolgen. Daher ist der Zinsfuss veränderlich und liegt zwischen zwei Grenzen, einem Maximum, wenn der Schuldschein im ersten Tilgungsjahr, und einem Minimum, wenn er im letzten (37sten) zurückgezahlt wird.

Die Grenzen zwischen dem grössten und kleinsten Werthe des Zinsfusses bestimmen sich auf folgende Weise:

Kauft Jemand die Summe $K$ zu dem Curse $C$, so zahlt er $\frac{K.C}{100}$. Wird nun die Summe $K$ im ersten Jahre bei dem Zinsfuss $p$ heimgezahlt, so bekommt er im ersten Halbjahre die halbjährigen Zinsen im Betrage von $K.0{,}0p_1$ und im zweiten Halbjahre denselben Zinsbetrag sammt dem Kapital $K$. Nennt man nun den Zinsfuss, worin sich diese Summen verzinsen, $x$, und rabattirt die beiden Zahlungen mit $1{,}0x_1$, so muss der so rabattirte Werth der Ankaufssumme gleich sein. Man erhält daher folgende Gleichung:

$$1)\qquad \frac{K.C}{100} = \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0x_1} + \frac{K.0{,}0p_1 + K}{1{,}0x_1{}^2}$$

oder:

$$C = \frac{p_1}{1{,}0x_1} + \frac{100 + p_1}{1{,}0x_1{}^2},$$

und hieraus:

$$2)\qquad 1{,}0x_1 = \frac{p_1}{2C} + \frac{1}{2C}\sqrt{4C(100 + p_1) + p_1{}^2}.$$

Wendet man diese Gleichung auf die preussische Anleihe an, so hat man $p=5$, $C=95$, zu welchem Curse die Anleihe ausgegeben wurde, zu setzen, und man erhält:

3)

$$1{,}0x_1=\frac{2{,}5}{190}+\frac{1}{190}\sqrt{4\,.\,95\,.\,102{,}5+(2{,}5)^2}=\frac{2{,}5}{190}+\frac{1}{190}\sqrt{38956{,}25}$$

$$=\frac{2{,}5+197{,}3734}{190}=1{,}051965.$$

Hiernach ist das Maximum des Zinsfusses, in welchem sich diese Anleihe für den Theilnehmer im günstigen Falle verzinst:

4) $$x=10{,}393.$$

Für den Fall, als der gekaufte Schuldschein $K$ im letzten Jahre $n$ zurückgezahlt wird, findet die zweite oder dritte Methode des §. 59. zur Ermittelung des Zinsfusses ihre Anwendung. Wir wählen hiezu die dritte. Nennt man dann den höhern Zinsfuss, in welchem sich das Kapital verzinst, $p$, den Zinsfuss, worin es vom Staate verzinst wird, $q$, so hat man die Summen (Zinse und Kapital), welche der Käufer während der Tilgungszeit $n$ empfängt, in den Zinsfuss $q$ umzusetzen. Der hiedurch gewonnene Werth ist dann nach dem in §. 59. Gesagten der Summe $K_1=\frac{K.100}{C}$ gleichzusetzen. Hieraus ergibt sich die Gleichung:

5) $$\frac{K.100}{C}=\frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1}+\frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^2}+\ldots\frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0q_1{}^{2n}}+\frac{K}{1{,}0q_1{}^{2n}}$$

oder:

$$\frac{100}{C}=0{,}0p_1\,.\,\frac{1-1{,}0q_1{}^{2n}}{0{,}0q_1}+\frac{1}{1{,}0q_1{}^{2n}}.$$

und hieraus:

6) $$0{,}0p_1=\left(\frac{100}{C}-\frac{1}{1{,}0q_1{}^{2n}}\right)\cdot\frac{0{,}0q_1}{1-1{,}0q_1{}^{-2n}}$$

Setzt man nun hierin $C=95$, $q_1=2{,}5$, $n=37$, so erhält man für das Minimum des Zinsfusses annähernd:

7) $$0{,}0p_1=\left(\frac{100}{95}-\frac{1}{1{,}025^{74}}\right)\cdot\frac{0{,}025}{1-1{,}025^{-74}}$$

$$=\frac{1{,}0526315789\ldots.-0{,}1608548}{33{,}5658089}$$

$$=\frac{0{,}8917768}{33{,}5658089}=0{,}02656801.$$

Hiernach stellt sich die niederste Grenze des Zinsfusses, worin sich diese Anleihe für einen Theilnehmer verzinst, auf:

$$8) \qquad p = 5{,}3136 \ldots .$$

Die Grenzen liegen also zwischen 10,395 und 5,313.... Die Richtigkeit des in No. 8) gefundenen Werthes bestätigt sich, wenn man ihn nach der ersten Methode prüft. Eine Methode, wodurch der Zinsfuss $p$ aus den Gleichungen

$$S = K.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} \text{ und } R = K.\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

näherungsweise sehr leicht gefunden werden kann, habe ich in meiner Anleitung S. 301 u. ff. gegeben, worauf ich verweise.

## §. 62.

### Aufgabe.

Folgender, der Wirklichkeit entnommene Fall soll hier noch eine Stelle finden.

Bei Begebung der grossherzoglich badischen Lotterie-Anleihe vom Jahre 1845 im Betrage von 14 Millionen Gulden fand eine wirkliche Concurrenz einiger Bankhäuser statt, die dem Staate zu einem bedeutenden Vortheile gereichte. Eine Gesellschaft mehrerer Bankhäuser erbot sich, $110\frac{5}{8}$ für jeden Schuldschein von 100 zu zahlen. Die Anleihe wurde dieser Gesellschaft zugewiesen. Der Staat bekam

$$14000000 . 1{,}10625 = 14875000$$

statt 14 Millionen und hatte einen Gewinn von 1487500 Gulden. Die Anleihe wurde zu 3,5 Procent bei einer Tilgungszeit von 40 Jahren abgeschlossen. Die Tilgung und Verzinsung geschieht halbjährlich. Diese Bemerkungen geben Veranlassung zu folgender Frage, wobei wir der bequemeren Rechnung wegen für die Anleihe die Summe 10 statt 14 Millionen und ein Aufgeld von 10 statt 10,625 Procent wählen.

1) Eine Anleihe von 10000000 ist unter der Bedingung abgeschlossen, dass sie zu 3,5 Procent verzinst in 40 Jahren durch gleiche halbjährlich zu bezahlende Summen verzinst und getilgt werde. Ein Darleiher übernimmt die Anleihe zum Curse 110 statt 100.

a) Es fragt sich: Wie gross ist der Zinsfuss, wenn

die Schuld durch die erhaltene Summe in 40 Jahren getilgt werden soll.

b) Das erhaltene Aufgeld, das der Staat zu 4 Procent verwenden kann, soll sammt den daraus fällig werdenden Zinsen zur Tilgung der Anleihe verwendet werden. Es fragt sich: reicht dasselbe zur Tilgung und Verzinsung aus oder muss der Staat halbjährlich ausser den hieraus zu verwendenden Mitteln noch eine Summe zulegen, und welche?

c) In wie viel Jahren wird die Anleihe getilgt sein, wenn die Zinse des Aufgeldes zur Tilgung derselben verwendet werden?

Auflösung zu a). Nennt man die Summe, welche halbjährlich zur Tilgung und Verzinsung einer Anleihe von 10 Millionen bei 3,5 Procent in 40 Jahren erfordert wird, $L$, so hat man zu ihrer Bestimmung:

$$1) \qquad 10000000 = \frac{L}{1,0175} + \frac{L}{1,0175^2} + \frac{L}{1,0175^3} + \ldots \frac{L}{1,0175^{80}}$$

$$= L.\frac{1-1,0175^{-80}}{0,0175} = L.42,8799347,$$

und hieraus:

$$2) \qquad L = \frac{10000000}{42,8799347} = 233209,3.$$

Um den Zinsfuss zu finden, hat man die halbjährliche Summe durch 80 Halbjahre zu rabattiren. Nennt man den jährlichen Zinsfuss $x$, so wird die hieraus sich ergebende Summe dem Kapital sammt Aufgeld gleichzusetzen sein. Das Aufgeld beträgt:

$$10000000.0,1 = 1000000.$$

Hiernach ist:

$$3) \qquad 11000000 = \frac{233209,3}{1,0x_1} + \frac{233209,3}{1,0x_1{}^2} + \ldots \frac{233209,3}{1,0x_1{}^{80}}$$

$$= 233209,3.\frac{1-1,0x_1{}^{-80}}{0,0x_1},$$

also:

$$4) \qquad \frac{1-1,0x_1{}^{-80}}{0,0x_1} = \frac{11000000}{233209,3} = 47,16792.$$

Wendet man nun die in meiner Anleitung S. 301. gegebene Methode an und sucht in der entsprechenden Tafel in der 80sten Horizontalreihe die Zahl 47,16792 auf, so fällt dieselbe zwischen 46,407323 und 50,386657, also näher an erstere als letztere. Der fragliche Zinsfuss $x_1$ liegt also näher bei 1,5 als bei 1,25. Interpolirt man, so ergibt sich derselbe zu $1{,}5 - 0{,}0477\ldots = 1{,}45$ ganz nahe und der Staat hätte hiernach das Kapital in dem Zinsfuss 2,9 zu verzinsen.

Untersucht man nun den gefundenen Werth nach der ersten Methode des §. 59., also mit Rücksicht auf No. 3) dieses Paragraphen, nach der Gleichung:

$$5)\qquad K_1 = 233209{,}3 . \frac{1 - 1{,}0145^{-80}}{0{,}0145},$$

so hat man:

$$\lg 1{,}0145^{-80} = 0{,}4998360 - 1 = \lg 0{,}3161084,$$

$$K_1 = 233209{,}3 . \frac{1 - 0{,}3161084}{0{,}0145} = \frac{233209{,}3 . 0{,}6838916}{0{,}0145},$$

$$\begin{aligned} \lg 233209{,}3 &= 5{,}3677459 \\ \lg 0{,}6838916 &= \underline{0{,}8349873 - 1} \\ &\phantom{=}\ 5{,}2027332 \\ \lg 0{,}0145 &= \underline{0{,}1613680 - 2} \\ &\mathrm{N.}\ 7{,}0413652 = 10999500, \end{aligned}$$

$$6)\qquad K_1 = 10999500.$$

Der so für $K_1$ gefundene Werth ist daher von demjenigen, der nach No. 3) hätte gefunden werden sollen, nur um $11000000 - 10999500 = 500$ von dem richtigen verschieden. Der gefundene Zinsfuss 2,9 ist daher ganz nahe genau und um ein ganz Unbedeutendes zu gross.

Auflösung zu b). Nach No. 2) wird zur Tilgung der Anleihe halbjährlich die Summe 233209,3 erfordert. Man findet die Tilgungssumme des ersten Halbjahres, wenn man den halbjährlichen Zinsbetrag der Schuld $10000000 . 0{,}0175 = 175000$ hievon abzieht, und erhält daher:

$$A_1 = 233209{,}3 - 175000 = 58209{,}3.$$

Soll nun das Aufgeld von 1000000, das zu 4 Procent verwendet werden kann, zur Schuldentilgung während 80 Halbjahren verwendet werden, so ergibt sich die Summe $L$, welche halbjährlich hiefür disponibel gemacht werden kann, aus folgender Gleichung:

$$1000000 = \frac{L}{1,02} + \frac{L}{1,02^2} + \frac{L}{1,02^3} + \cdots \frac{L}{1,02^{80}} = L.\frac{1-1,02^{-80}}{0,02},$$

und hieraus:

7) $$L = \frac{1000000.0,02}{1-1,02^{-80}} = \frac{1000000}{39,7445136} = 25160,7.$$

Hiernach muss der Staat ausser den Zinsen die halbjährliche Summe

8) $$S = 58209,3 - 25160,7 = 23048,6$$

zuschiessen, denn er kann 25160,7 aus dem Aufgeld halbjährlich schöpfen. Aus eigenen Mitteln hat dann der Staat halbjährlich nur die Summe 208048,6 zur Verzinsung und Tilgung zu verwenden, um in 40 Jahren die ganze Schuld zu tilgen.

Dass diese Werthe richtig sind, ergibt sich aus folgender einfachen Prüfung:

$$25160,7.\frac{1-1,0175^{-80}}{0,0175} + 208048,6.\frac{1-1,0175^{-80}}{0,0175}$$

$$= 25160,7.42,8799347 + 208048,6.42,8799347$$

$$= 1078889,3 + 8921110,6 = 9999999,9.$$

Auflösung zu c). Da das Aufgeld zu 4 Procent benutzt werden kann, so beträgt die Tilgungssumme eines jeden Halbjahres 1000000.0,02 = 20000. Sie wächst in diesem Falle nach dem früher Gesagten halbjährlich um 2 Procent. Die Anleihe wird daher getilgt sein, wenn die halbjährlich verwendbaren Summen der Schuldsumme gleichkommen. Diess führt zu der Gleichung:

9) $$10000000 = 20000.\frac{1,02^n - 1}{0,02}.$$

Hieraus bestimmt sich die Zahl der Halbjahre ($n$) durch

10) $$n = \frac{\lg 11}{\lg 1,02} = \frac{1,0413927}{0,0086002} = 121,089.$$

Die ganze Anleihe wird also allein durch die Zinsen des Aufgeldes in 61,5 Jahren getilgt sein, wobei der Staat in dieser Zeit nur die Zinse der Anleihe halbjährlich im Betrage von 175000 zu zahlen hat.

## §. 63.

### Allgemeine Bemerkungen über Staatsanleihen und die vortheilhafteste Art ihrer Tilgung.

Der Zweck der Aufnahme einer Staatsanleihe ist die Befrie-

digung irgend eines eintretenden Bedürfnisses, das nicht aus den laufenden Einnahmen gedeckt werden kann. Diese Bedürfnisse können verschiedener Natur sein und in mancherlei Verhältnissen ihren Grund haben, wodurch sich wohl auch die Art, sie zu tilgen, bedingen wird. Hieher gehören Ausgaben von vorübergehender Natur, wie der einmalige Ausfall in den Jahreseinnahmen und ein dadurch entstehendes Deficit, oder Ausgaben für bleibende Einrichtungen, wie die Anlage der Eisenbahnen, Verkehrswege, Culturverbesserungen, Herstellung von Gebäuden, Einrichtung neuer Industrie-Anstalten u. s. w.

Es kann nun nicht die Absicht sein, hier auf eine Erörterung dieser Bedürfnisse einzugehen, da unsere Aufmerksamkeit nur darauf gerichtet ist, die vortheilhafteste Einrichtung der Tilgungspläne anzudeuten.

Nach den in diesem und in dem vorhergehenden Kapitel angestellten Untersuchungen treten hauptsächlich drei Tilgungspläne hervor, die Berücksichtigung verdienen:

a) Tilgungspläne, bei welchen die Zahlungssummen abnehmen,
b) solche, bei welchen die Zahlungssummen zunehmen, und
c) solche, bei welchen dieselben gleich gross sind.

Es ist ersichtlich, dass im ersten Falle die Gegenwart und die ihr zunächst liegende Zeit mehr als die spätere Zukunft belastet und die Steuerkraft der Staatsangehörigen in ungleichem Maasse in Anspruch genommen wird. Dasselbe gilt umgekehrt im zweiten Falle, in welchem die Gegenwart und die ihr zunächst folgende Zeit auf Kosten der späteren Generation erleichtert wird. Beiden Ungleichheiten begegnet die dritte Tilgungsart, indem die frühern und spätern Generationen gleichförmig belastet werden.

Die erste Tilgungsart ist die ungewöhnliche, und es ist mir nicht bekannt, dass ein derartiger Tilgungsplan von den Finanzverwaltungen gewählt wurde. Dennoch möchte es Fälle geben, worin diese Tilgungsart gerechtfertigt wäre, namentlich dann, wenn ein vorübergehender Ausfall in den Einnahmen durch eine Anleihe gedeckt werden soll. Man kann wohl verlangen, dass wenn der Fall eintritt, dass die Einnahmen zur Deckung der laufenden Verwaltungskosten nicht hinreichen, die Gegenwart gehalten sei, ihre Bedürfnisse aus ihren Mitteln durch Einhebung vorübergehender höherer Steuerbeträge zu bestreiten. Ist diess aber nicht möglich oder wird dieser Weg nicht betreten, so ist es billig, dass die Jetztzeit in diesem Falle stärker belastet werde, als die Zukunft, und sich nicht auf Kosten der spätern Genera-

tion erleichtere. Jedenfalls dürften Tilgungspläne mit wachsenden Summen hier nicht gewählt werden. Ein Gleiches gilt bei solchen Einrichtungen oder Verbesserungen, welche hauptsächlich im Interesse der Gegenwart begründet sind.

Häufiger wird die zweite Art gewählt, wornach die Anleihen durch steigende Zahlungssummen getilgt werden. Diess ist der Fall bei der grossherzoglich badischen Eisenbahn-Anleihe vom Jahre 1845 (§. 56.) und auch bei der Lotterie-Anleihe vom Jahre 1840, worüber das Nähere in meiner „Theorie der Lotterie-Anlehen" nachzusehen ist. Diese Tilgungsart mag zum Theil in der Neigung einer Finanzverwaltung liegen, die Befriedigung der dem Staate obliegenden Schuldigkeiten der spätern Generation zu überantworten. Doch ist abgesehen von dieser Möglichkeit, nicht zu verkennen, dass diese Tilgungsweise bei vielen Fällen in der Sache begründet ist. Hieher gehören alle Anleihen, die für Eisenbahnen oder solche Verbesserungen und Einrichtungen gemacht werden, deren Vortheile und Erträgnisse sich erst vollständig in der Zukunft entwickeln, also auch dieser zu gut kommen. Es ist daher gerechtfertigt, dass die spätere Generation eine dem grössern Vortheil entsprechende grössere Belastung übernehme. Ferner ist nicht zu übersehen, dass mit Verbesserung der Verkehrswege sich die Industrie und der Verkehr und dadurch die Steuerkraft hebt, und daher der Zukunft eine grössere Belastung angemuthet werden kann.

Weniger als der zweite ist, so viel mir bekannt, der dritte Weg betreten. Hierher gehört die preussische Anleihe vom Jahre 1859 (§. 58.), die durch gleiche Zahlungssummen getilgt wird. Sie dürfte sich, obwohl wenig benutzt, als sehr vortheilhaft erweisen.

Betrachtet man nämlich den Staat im Allgemeinen, als nicht einem bestimmten Zeitraum angehörig und in seinem Bestehen nicht an einzelne Jahre geknüpft und eingeschlossen, sondern als von einem höhern Standpunkte aus die zeitlichen Bedürfnisse beobachtend und ihre Befriedigung überwachend, die Wünsche und Hoffnungen der Zukunft über den Interessen der Gegenwart nicht vergessend, und umgekehrt, ausgleichend nach allen Beziehungen, beständig in zeit- und sachgemässer Entwickelung begriffen, als einer und derselbe in allen Verhältnissen und Zeiten, so dürfte eine gleichförmige Belastung seinem Wesen und der Förderung seiner Interessen am sachgemässesten entsprechen, und jedenfalls derjenigen vorzuziehen sein, welche eine Zeitperiode vor der andern erleichtert, wenn nicht entscheidende Gründe eine Ausnahme bedingen. Treten diese aber maassgebend ein,

so wird nach dem Gesagten im einzelnen Falle immer die richtige Ausgleichung gefunden werden können. Wird in einem solchen Falle ein Tilgungsplan etwa mit steigenden Zahlungssummen für einen grössern Zeitraum gewählt, so dürfte dahin zu wirken sein, dass sich dieselben nicht schliesslich zu einer solchen Höhe erheben, dass die Durchführung illusorisch gemacht und selbst wieder eine neue Anleihe erfordert wird, um dem Staate die Einhaltung seiner Verpflichtungen zu ermöglichen. Hiedurch würde die Tilgung der Anleihe nicht erwirkt, sondern auf einem spätern Zeitraum hinausgeschoben.

Diese Bemerkungen finden z. B. ihre Bestätigung bei der Tilgung der badischen Lotterie-Anleihe vom Jahre 1840 im Betrage von 5 Millionen Gulden, die einen Zeitraum von 25 Jahren umfasst.

Diese Anleihe ist auf den sehr günstigen Zinsfuss 3,5 basirt, wird aber nach einem so ungünstigen Plane getilgt, dass die anfängliche Schuld von 5000000 nach 16 Jahren sich auf die Höhe von 5503176 Gulden steigert, anstatt zu sinken, und die eigentliche Kapital-Abtragung in die letzten 8 Jahre des Tilgungsplans zurückgedrängt wird. Diess hat zur Folge, dass die letzten acht Zahlungssummen zusammen 5971675 (nahe 6 Million Gulden) und die drei letzten je eine Million in runder Zahl betragen, während eine Reihe von Zahlungen in den früheren Jahren nicht einmal die Zinse der Schuld absorbirt.

Auf das Unvortheilhafte solcher Tilgungspläne habe ich schon in meiner „Theorie der Lotterie-Anlehen“ pag. 43. u. ff. aufmerksam gemacht und verweise deswegen dorthin.

Ist nun ein Tilgungsplan auch auf ganz ungünstige Weise entworfen und festgestellt, so kann allerdings, wie ich schon in meiner Anleitung gezeigt habe, und wie auch aus den in diesem, dem ersten und dritten Kapitel aufgestellten Sätzen hervorgeht, nachgewiesen werden, dass die nach ihm fälligen Zahlungssummen (Zinse und Tilgungssummen) immer auf den Werth der aufgenommenen Schuld zurückführen, wenn sie in demselben Zinsfuss rabattirt werden, worin die Anleihe verzinst wird. Objectiv ergibt sich also hieraus kein Nachtheil für den Schuldner. Dennoch kann eine Schuld nach verschiedenen Tilgungsplänen zurückgezahlt werden, und es wird sich zeigen, dass in dem einen oder andern Falle eine grössere oder kleinere Gesammtsumme in dem nämlichen Zeitraum gezahlt werden muss, wenn man sämmtliche Zahlungssummen unter einander vergleicht, während die Rabattirung in dem einen oder dem andern Falle immer auf die gleiche Summe führt. Im zweiten und dritten Kapitel wurde schon in den bezüglichen Fällen hierauf hingewiesen.

Es ist nun klar, dass jeder Privatmann, der eine Schuld zu tilgen hat, denjenigen Tilgungsplan vor dem andern wählen wird, welcher von ihm im Laufe der Zeit die geringeren Zahlungssummen fordert. Eine sorgfältige und sparsame Finanzverwaltung wird wohl dasselbe thun. Es dürfte sich daher der Mühe lohnen, den nähern Nachweis über die vortheilhafteste Einrichtung der Tilgungspläne zu geben.

## §. 64.

### Fortsetzung.

Zur Lieferung dieses Nachweises nehmen wir die Elemente aus dem dritten Kapitel und vergleichen die verschiedenen Tilgungspläne nach dem in §. 63. gegebenen Schema unter einander.

#### a. Tilgungspläne bei gleichen Abtragssummen.

Geschieht die Tilgung und Verzinsung jährlich und soll die Gesammtsumme, welche im Laufe der Tilgungszeit zu zahlen ist, bestimmt werden, so hat man die in No. 1) §. 32. angegebenen Werthe zusammen zu zählen. Hiernach erhält man:

1) $$S_1 = nA + nK.0{,}0p - \frac{n(n-1)}{1.2}A.0{,}0p$$

$$= nA + n\left(K - (n-1)\frac{A}{2}\right).0{,}0p.$$

Geschieht die Tilgung jährlich und die Verzinsung halbjährlich, so ergibt sich die Gesammtsumme für die fälligen Werthe aus der Gleichung No. 8) §. 32. und man erhält:

$$S_2 = nA + 2nK.0{,}0p_1 - 2\frac{n(n-1)}{1.2}A.0{,}0p_1.$$

Da nun $2.0{,}0p_1 = 2.0{,}0\frac{p}{2} = 0{,}0p$ ist, so entsteht:

2) $$S_2 = nA + nK.0{,}0p - \frac{n(n-1)}{1.2}A.0{,}0p.$$

Nach No. 1) und No. 2) ist $S_1 = S_2$. Diess führt zu dem Satze:

3) **Wird eine Anleihe durch gleiche Abtragssummen getilgt, und geschieht die Tilgung jährlich, die Verzinsung aber jährlich oder halbjährlich, so ist die**

**Summe sämmtlicher nach den beiden Tilgungsplänen fälligen Zahlungsleistungen gleich gross.**

Geschieht die Verzinsung und Tilgung halbjährlich und so, dass die halbjährliche Tilgungssumme die Hälfte der jährlichen $A_1 = \frac{1}{2}A$ ist, so kommt die Gleichung No. 12) §. 32. in Anwendung und die Summe sämmtlicher nach dem Tilgungsplane fällig werdenden Zahlungen ist:

$$4)\qquad S_3 = 2nA_1 + 2nK.0{,}0p_1 - \frac{2n(2n-1)}{1.2}A_1.0{,}0p_1.$$

Nun ist $2A_1 = A$, $2.0{,}0p_1 = 0{,}0p$, $(2n-1).A_1 = 2(n-\frac{1}{2})A_1 = (n-\frac{1}{2})A$, und hieraus durch Einführung:

$$5)\qquad S_3 = nA + nK.0{,}0p - n(n-\tfrac{1}{2})\frac{A}{2}.0{,}0p$$

$$= nA + n(K-(n-\tfrac{1}{2})\frac{A}{2}).0{,}0p.$$

Vergleicht man nun $S_1$ oder $S_2$ mit $S_3$ und bemerkt, dass

$$(K-(n-1)\frac{A}{2})0{,}0p > (K-(n-\tfrac{1}{2})\frac{A}{2})0{,}0p$$

oder

$$(K-\frac{nA}{2}+\frac{A}{2})0{,}0p > (K-\frac{nA}{2}+\frac{A}{4})\,0{,}0p,$$

so folgt hieraus:

6) **Wird eine Anleihe durch gleiche Abtragssummen getilgt und geschieht die Verzinsung und Tilgung halbjährlich und so, dass die halbjährliche Tilgungssumme die Hälfte der jährlichen Tilgungssumme ($A_1 = \frac{1}{2}A$) beträgt, so ist die Summe sämmtlicher nach dem Tilgungsplane fälliger Zahlungsleistungen kleiner, als wenn die Tilgung jährlich und die Verzinsung jährlich oder halbjährlich in der gleichen Zeit geschieht.**

Derselbe Satz gilt, wenn die Abtrags- oder Tilgungssummen um gleich viel zu- oder abnehmen.

Schon in §. 33. und §. 36. u. s. w. wurde im besondern Fall auf diesen Satz hingedeutet. Hier findet er sich bewiesen.

b. **Tilgungspläne, bei welchen die Abtrags- oder Tilgungssummen in einer geometrischen Progression wachsen.**

Geschieht die Tilgung und Verzinsung jährlich, so ergibt sich für die Summe aller nach dem Tilgungsplane erforderlichen Zahlungsleistungen aus No. 5) §. 39. durch folgende Gleichung:

$$7)\quad S_1 = A.\frac{1{,}0w^n-1}{0{,}0w} + nK.0{,}0p - \frac{A.0{,}0p}{0{,}0w}.\frac{1{,}0w^n-1}{0{,}0w} + \frac{nA.0{,}0p}{0{,}0w}$$

$$= nK.0{,}0p + A.\frac{1{,}0w^n-1}{0{,}0w}.\left(1-\frac{0{,}0p}{0{,}0w}\right) + nA.\frac{0{,}0p}{0{,}0w},$$

wenn $A.0{,}0p$, um die Reihen zu vervollständigen, zu- und abgezählt wird. Ist $n$ keine ganze Zahl, so muss noch die Restschuld $S_n$ zugezählt werden.

Geschieht die Tilgung jährlich und die Verzinsung halbjährlich, so entsteht aus No. 16) §. 39. für die Gesammtsumme aller nach dem Tilgungsplan fälliger Zahlungsleistungen:

8)

$$S_2 = 2nK.0{,}0p_1 + A.\frac{1{,}0w^n-1}{0{,}0w} - \frac{2A.0{,}0p_1}{0{,}0w}.\frac{1{,}0w^n-1}{0{,}0w} + \frac{2nA.0{,}0p_1}{0{,}0w}$$

$$= nK.0{,}0p + A.\frac{1{,}0w^n-1}{0{,}0w}.\left(1-\frac{0{,}0p}{0{,}0w}\right) + \frac{nA.0{,}0p}{0{,}0w}.$$

Auch hier ist erforderlichen Falls die Restschuld $S_n$ zu berücksichtigen. Aus No. 7) und No. 8) folgt, dass $S_1 = S_2$ ist. Der in No. 3) aufgestellte Satz gilt auch hier.

Geschieht aber die Tilgung und Verzinsung halbjährlich, so kommt No. 21) §. 39. in Anwendung. Setzt man nun, um eine Vergleichung mit No. 7) und No. 8) zu gewinnen, den Procentsatz, um welchen die Theilungssumme halbjährlich wächst, $w_1 = \frac{1}{2}w$, und die halbjährliche Tilgungssumme, die vorerst in Frage steht, $A_1$, so ist die Gesammtsumme aller Zahlungsleistungen:

$$S_3 = 2nK.0{,}0p_1 + A_1.\frac{1{,}0w_1^{2n}-1}{0{,}0w_1} - A_1.\frac{0{,}0p_1}{0{,}0w_1}.\frac{1{,}0w_1^{2n}-1}{0{,}0w_1} + \frac{2nA_1.0{,}0p_1}{0{,}0w_1},$$

wenn $\frac{A_1.0{,}0p_1}{0{,}0w_1}$ zur Vervollständigung der Reihen zu- und abgezählt wird. Da nun $2.0{,}0p_1 = 0{,}0p$, $\frac{0{,}0p_1}{0{,}0w_1} = \frac{0{,}0p}{0{,}0w}$ ist, so geht diese Gleichung in folgende über:

9) $S_3 = nK.0{,}0p + A_1 . \frac{1{,}0w_1^{2n}-1}{0{,}0w_1} . \left(1 - \frac{0{,}0p}{0{,}0w}\right) + 2nA_1 . \frac{0{,}0p}{0{,}0w}$,

wobei noch erforderlichen Falls $S_{2n}$ zugezählt werden muss.

Vergleicht man nun No. 9) mit No. 7) oder No. 8), so ist zu bemerken, dass es sich in beiden Fällen um Tilgung einer und derselben Anleihe $K$ in dem gleichen Zeitraum $n$ handelt, und dass die Anleihe getilgt sein wird, wenn die sämmtlichen Tilgungssummen der Anleihe gleich gekommen sind. Hiernach hat man für No. 7) und No. 8):

$$K = A . \frac{1{,}0w^n - 1}{0{,}0w},$$

und für No. 9):

$$K = A_1 . \frac{1{,}0w_1^{2n} - 1}{0{,}0w_1},$$

und hieraus:

10) $$A . \frac{1{,}0w^n - 1}{0{,}0w} = A_1 . \frac{1{,}0w_1^{2n} - 1}{0{,}0w_1}.$$

Wendet man den Inhalt dieser Gleichung auf die Beurtheilung des Werthes von $S_1$ und $S_2$ in Beziehung auf $S_3$ an, so zeigt sich in No. 7), No. 8) und No. 9) dass die beiden ersten Glieder einander gleich sind und dass daher, wenn $S_3$ von $S_1$ oder $S_2$ verschieden ist, der Grund des Unterschiedes in dem dritten Gliede $\frac{nA.0{,}0p}{0{,}0w}$ und $\frac{2nA_1.0{,}0p}{0{,}0w}$ liegen müsse. Um diess zu bestimmen, dient die Gleichung No. 10). Aus ihr erhält man, wenn die rechte Seite mit 2 multiplicirt und dividirt wird:

$$A . \frac{1{,}0w^n - 1}{0{,}0w} = \frac{2A_1 . 1{,}0w_1^{2n} - 1}{2 . 0{,}0w_1} = 2A_1 . \frac{1{,}0w_1^{2n} - 1}{0{,}0w},$$

und hieraus:

11) $$\frac{A}{2A_1} = \frac{1{,}0w_1^{2n} - 1}{1{,}0w^n - 1}.$$

Da nun, wie früher gezeigt wurde, $1{,}0w_1^{2n} - 1 > 1{,}0w^n - 1$, wenn $w_1 = \frac{1}{2}w$, so ist auch $A > 2A_1$ oder $\frac{A}{2} > A_1$; folglich auch $\frac{nA.0{,}0p}{0{,}0w} > 2nA_1 . \frac{0{,}0p}{0{,}0w}$.

Hieraus folgt, dass auch in dem vorliegenden Falle $S_1 > S_3$ ist. Es gilt daher auch der in No. 6) aufgestellte Satz jedoch unter der Voraussetzung:

12) dass die Tilgungssumme des ersten Halbjahres kleiner als die Hälfte von der des ersten Jahres in No. 7) oder No. 8) ist, $A_1 < \frac{A}{2}$.

Die frühere Voraussetzung, dass $A_1 = \frac{A}{2}$, ist nicht zulässig, wie sich leicht zeigt. Setzt man nämlich $A_1 = \frac{1}{2}A$ in No. 9), so geht diese Gleichung nach den gehörigen Veränderungen in folgende über:

13) $$S_4 = nK.0{,}0p + A.\frac{1{,}0w_1^{2n}-1}{0{,}0w}.\left(1-\frac{0{,}0p}{0{,}0w}\right)+\frac{nA.0{,}0p}{0{,}0w},$$

da $2.0{,}0w_1 = 0{,}0w$ ist. Es wird daher, da $1{,}0w_1^{2n}-1 > 1{,}0w^n-1$ ist, $S_4 > S_3$ sein. Dieses Resultat steht im Widerspruch mit No. 10), weil offenbar

$$A.\frac{1{,}0w^n-1}{0{,}0w} < \frac{A}{2}.\frac{1{,}0w_1^{2n}-1}{0{,}0w_1} = A.\frac{1{,}0w_1^{2n}-1}{0{,}0w}$$

ist, also nicht, wie No. 10) verlangt, gleich gross sein kann.

Wird dennoch $A_1 = \frac{1}{2}A$ in No. 21) §. 39. oder in No. 9) dieses Paragraphen gesetzt, so ist die nothwendige Folge, dass $2n < n$ sein muss, um der Gleichung No. 10) zu genügen, und wenn der Tilgungsplan No. 21) §. 39. in Kraft bleiben soll. Ist aber $2n < n$, dann wird auch der Satz No. 6) wieder in Kraft treten.

### c. Tilgungspläne, bei welchen die Zahlungssummen (Zinse und Tilgungssummen) gleich gross sind.

Die zu gewinnenden Resultate ergeben sich in diesem Falle sehr leicht, wenn man beachtet, dass sofort nach No. 14) §. 39. der Zinsfuss und der Procentsatz, um welchen die Tilgungssummen steigen, einander gleich sein müssen. Setzt man daher $p=w$, so hat man bei jährlicher Tilgung und Verzinsung aus No. 7):

14) $$S_1 = nK.0{,}0p + nA = n(K.0{,}0p + A);$$

bei jährlicher Tilgung und halbjährlicher Verzinsung aus No. 8):

15) $$S_2 = 2nK.0{,}0p_1 + \frac{2nA.0{,}0p_1}{0{,}0p} = n(K.0{,}0p + A);$$

bei halbjährlicher Tilgung und Verzinsung aus No. 9):

16) $$S_3 = 2nK.0.0p_1 + 2nA_1 = n(K.0{,}0p + 2A_1),$$

und es ist $S_1 = S_2$; $S_3 < S_1 = S_2$, da $A_1 < \frac{1}{2}A$ ist. Diese Sätze

rechtfertigen sich auch einfach dadurch, dass $K.0{,}0p + A$ in den beiden ersten Gleichungen die jährliche und $K.0{,}0p_1 + A_1$ in No. 16) die halbjährliche Zahlungsleistung ausdrückt und $A_1 < \frac{1}{2}A_1$ sein muss.

Hieraus entnimmt man folgenden allgemeinen Satz:

17) Die halbjährliche Tilgung und Verzinsung einer Anleihe ist unter den genannten Bestimmungen vortheilhafter, als die jährliche Tilgung bei halbjährlicher oder jährlicher Verzinsung, denn die aus ihr hervorgehenden Gesammtzahlungen belasten den Schuldner in geringerem Maasse, als die jährliche Tilgung mit jährlicher oder halbjährlicher Verzinsung.

Der hier nachgewiesene Vortheil geht, wie man sieht, einzig aus der Einrichtung des Tilgungsplans hervor und empfiehlt sich von selbst allen sorgfältigen Finanzverwaltungen. In den meisten mir bekannten Tilgungsplänen ist diese Einrichtung nicht zur Ausführung gebracht, ob sie gleich im Interesse des Staates liegt und sich leicht in der Wirklichkeit ausführen lässt, ohne die Interessen der Staatsgläubiger im Mindesten zu verletzen.

## §. 65.

### Anwendung.

Das Gesagte soll an besondern Fällen nachgewiesen werden. Wir wählen hiezu die schon behandelte badische und preussische Anleihe.

Wird die badische Anleihe im Betrage von 10 Millionen Gulden bei 4 Procent in einem Zeitraume von 44 Jahren durch gleiche Abtragssummen getilgt, so ergibt sich die Gesammtsumme, welche bei jährlicher Tilgung und jährlicher oder halbjährlicher Verzinsung auf die Heimzahlung verwendet werden muss, nach No. 1) und No. 2) §. 64., wenn

$$K = 10000000, \quad p = 4, \quad n = 44, \quad A = \frac{10000000}{44} = 227272{,}72$$

gesetzt wird. Es entsteht:

1)

$$S_1 = 44.227272{,}72 + 44.10000000.0{,}04 + \frac{44.43}{1.2}.227272{,}72.0{,}04$$
$$= 10000000 + 17600000 - 4600000$$
$$= 23000000,$$

bei halbjährlicher Tilgung und Verzinsung nach No. 4) §. 64., da
$A_1 = \frac{10000000}{88} = 113636{,}36\ldots$ ist:

2)

$$S_3 = 88.113636{,}36 + 88.10000000.0{,}02 - \frac{88.87}{1.2}.113636{,}36.0{,}02$$
$$= 10000000 + 17600000 - 8700000$$
$$= 18900000.$$

Nach dem vom Staate aufgestellten Tilgungsplane ist zu zahlen bei jährlicher Tilgung und halbjährlicher Verzinsung nach No. 8) §. 64.:

3)

$$S_1 = 44.10000000.0{,}04 + 50000 \frac{1{,}06^{44}-1}{0{,}06}.\left(1-\frac{0{,}04}{0{,}06}\right) + 44.50000.\frac{0{,}04}{0{,}06} + S_{44}$$
$$= 17600000 + 50000.199{,}7580319.\tfrac{1}{3} + \frac{4400000}{3} + 12098{,}406$$
$$= 17600000 + 3329300{,}5315 + 1466666{,}66\ldots + 12098{,}406$$
$$= 22408065{,}604.$$

Würde diese Anleihe unter den nämlichen Bedingungen durch halbjährliche Tilgung und Verzinsung zurückgezahlt, so wäre die Tilgungssumme des ersten Halbjahres für $w_1 = 3$:

$$A_1 = \frac{10000000.0{,}03}{1{,}03^{88}-1} = \frac{10000000}{415{,}9853932} = 24039{,}3,$$

$$\begin{aligned} \lg 10000000 &= 7{,}0000000 \\ \lg 415{,}985393 &= 2{,}6190781 \\ \text{N. } 4{,}3809219 &= 24039{,}30. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieses Werthes in No. 9) §. 64. entsteht:

4)

$$S_3 = 44.10000000.0{,}04 + 24039{,}3.\frac{1{,}03^{88}-1}{0{,}03}.\tfrac{1}{3} + 88.24039{,}3.\tfrac{2}{3}$$
$$= 17600000 + 3333333{,}33 + 1410305{,}6$$
$$= 22343638{,}9.$$

Würde die Anleihe durch gleich grosse Summen in 44 Jahren zurückgezahlt werden, so hat man, um die Gesammtsumme der Zahlungen bei jährlicher Tilgung und jährlicher oder halbjährlicher Verzinsung zu erhalten, zuerst die Tilgungssumme des ersten Jahres $A$ bei 4 Procent zu bestimmen. Es ist:

$$A = \frac{10000000.0,04}{1,04^{44}-1} = \frac{10000000}{115,4128769} = 86645,46,$$

$$\begin{aligned} \lg 10000000 &= 7,0000000 \\ \lg 115,41287 &= 2,0622542 \\ \text{N. } 4,9377458 &= 86645,6. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieses Werthes in No. 14) oder No. 15) §. 64. entsteht:

$$5) \quad S_1 = 44(10000000.0,04 + 86645,46) = 44.486645,46$$
$$= 21412400,24.$$

Geschähe unter dieser Voraussetzung Tilgung und Verzinsung halbjährlich, so hat man die Tilgungssumme des ersten Halbjahres $A_1$ zu bestimmen. Sie ist:

$$A_1 = \frac{10000000.0,02}{1,02^{88}-1} = \frac{10000000}{235,6177011} = 42441,63,$$

$$\begin{aligned} \lg 10000000 &= 7,0000000 \\ \lg 235,61770 &= 2,3722080 \\ \text{N. } 4,6277920 &= 42441,63. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieses Werthes in No. 16) §. 64. entsteht:

$$6) \quad S_3 = 44(10000000.0,04 + 84883,26) = 44.484883,26$$
$$= 21334863,44.$$

Aus der Vergleichung der gefundenen Resultate ergibt sich, dass in den verschiedenen Tilgungsplänen die Werthe der $S_3$ (halbjährliche Tilgung und Verzinsung) einen Vortheil gegen die der $S_1$ (jährliche Tilgung und jährliche oder halbjährliche Verzinsung) zeigen. Bei der Heimzahlung durch gleichheitliche Tilgungssummen No. 1) und No. 2) tritt diess am stärksten hervor, wobei jedoch zu bemerken ist, dass in diesem Falle die Gegenwart und die ihr zunächst liegende Zeit stärker und zu Gunsten der spätern Zeit belastet werden würde.

Die in No. 3)—No. 6) gefundenen Werthe ordnen sich in der Reihenfolge, wie sie hier zusammengestellt sind. Der vom Staate

festgestellte Tilgungsplan erfordert, nach No. 3) im Ganzen die Summe von 22408065,6, während eine einfache Umänderung in einen Tilgungsplan mit halbjährlicher Verzinsung und Tilgung nach No. 6) nur eine Summe von 21334863,44 erfordert, also im Ganzen die nicht unbeträchtliche Erleichterung von 1063202,16 gewährt haben würde. Vergleicht man nun mit diesen Resultaten den in §. 56. No. 7) und No. 8) gegebenen Tilgungsplan, so schliesst sich hieran der weitere Vortheil, dass die Jahresleistungen nicht die bedeutende Höhe erreichen, wie diess dort der Fall ist, wo sie sich schliesslich bis über 600000 erheben. Allerdings stehen die Zahlungssummen der ersten Jahre etwas höher. Dieser Unterschied beträgt aber höchstens etwas über 30000, der sich übrigens durch die steigenden Summen in No. 8) §. 56. bald ausgleicht.

Wendet man nun diese Sätze auf die preussische Anleihe vom Jahre 1859 an, so ist die Summe, welche in 36 Jahren bei jährlicher Tilgung und halbjährlicher Verzinsung erfordert wird, nach No. 15) §. 64., wenn $n=36$, $p=5$, $A=300000$ gesetzt wird:

7) $$S_1 = 36(30000000 \,.\, 0{,}05 + 300000) + S_{36}$$
$$= 64800000 + 1249103{,}1843 = 66049103{,}184.$$

Geschähe die Tilgung und Verzinsung halbjährlich, so kommt No. 16) §. 64. zur Anwendung und man hat zuerst $A_1$ zu bestimmen. Es ist:

$$A_1 = \frac{30000000 \,.\, 0{,}025}{1{,}025^{72} - 1} = \frac{30000000}{196{,}6891225} = 152524{,}9.$$

$$\begin{aligned} \lg 30000000 &= 7{,}4771213 \\ \lg 196{,}689122 &= 2{,}2937803 \\ \text{N. } 5{,}1833410 &= 152524{,}9, \end{aligned}$$

und durch Einführung entsteht:

8) $$S_3 = 72(30000000 \,.\, 0{,}025 + 152524{,}9) = 72 \,.\, 902524{,}9$$
$$= 64981792{,}8.$$

Der Werth von $A_1 = 152524{,}9$ ist in No. 8) grösser als $\frac{1}{2}A = 150000$. Diess rührt von dem Zutritt der Restschuld $S_{36} = 1249103{,}18$ her.

Würde man $A_1 = \frac{1}{2}A = 150000$, die Hälfte der jährlichen Tilgungssumme wählen, so würde sich der Tilgungsplan nach dem in §. 64. Gesagten etwas modificiren. Dann ist zuerst die Tilgungszeit zu bestimmen. Sie ergibt sich aus:

$$\frac{1{,}025^{2n} - 1}{0{,}025} = \frac{30000000}{150000} = 200,$$

und beträgt nach den Tafeln 73 Halbjahre oder 36,5 Jahre, während der vom Staate angenommene Tilgungsplan 36,723 Jahre nach No. 6) §. 58. umfasst.

Berechnet man hiernach die zur Heimzahlung der Anleihe erforderliche Gesammtsumme, so hat man die Restschuld für das 36ste Jahr zu bestimmen. Sie beträgt:

$$S_{72} = 30000000 - 150000 . \frac{1,025^{72} - 1}{0,05}$$

$$= 30000000 - 150000 . 196,6891225$$

$$= 496631,625.$$

Die Gesammtsumme beträgt daher nach No. 16) §. 64.:

9) $$S_4 = 36(30000000 . 0,05 + 2 . 150000) + S_{72}$$
$$= 64800000 + 496631,625 = 65296631,625.$$

Aus der Vergleichung dieses Werthes mit $S_1$ in No. 7) ergibt sich eine Verminderung von nur 752471,559 Thlr., die jedoch noch immer nicht unbedeutend ist.

Die beiden hier betrachteten Anleihen sind nicht von beträchtlicher Grösse. Es ist aber klar, dass bei Anleihen von 100 und mehreren Hundert Millionen sich dieser Vortheil bedeutend steigert. Jeder Staat kann sich diesen Vortheil aneignen, denn es ist nur eine Umänderung in der Tilgungsweise und der Einführung halbjährlicher statt jährlicher Tilgung nöthig, und diess kann zu jeder Zeit geschehen.

# VI.

# Allgemeine Theorie der Krümmungslinien.

Von

dem Herausgeber.

## §. 1.

In der Abhandlung Thl. XXVIII. Nr. VIII. habe ich die Theorie der Krümmung der Flächen so weit entwickelt, als dieselbe die Krümmung der ebenen Flächenschnitte betrifft. Den Hauptzweck jener Abhandlung habe ich mit den Worten bezeichnet: „dass die betreffenden Formeln und Gleichungen sämmtlich in einer solchen Weise entwickelt werden sollten, dass sie ohne irgend welche Coordinaten-Transformation eine unmittelbare Anwendung auf alle besonderen Arten der Flächen gestatten“, wobei ich zugleich die allgemeinen Formeln sämmtlich so dargestellt habe, dass sie unmittelbar aus der in der Form

$$f(x, y, z) = 0$$

gegebenen Gleichung der Fläche bloss durch partielle Differentiation der Function

$$u = f(x, y, z)$$

abgeleitet werden, wogegen man früher meistens die Gleichung der Fläche unter der Form

$$z = f(x, y) \text{ oder } z - f(x, y) = 0$$

zu Grunde gelegt, und die Formeln von den partiellen Differentialquotienten von $z$ nach $x$ und $y$ abhängig gemacht hat. Dass aber die Gleichungen der Flächen ursprünglich unter der letzteren Form nur sehr selten, sondern bei Weitem am Häufigsten unter der ersteren Form gegeben sind, und dass also hier eine Lücke in der allgemeinen Theorie der Flächen auszufüllen war, unterliegt wohl keinem Zweifel. In der vorliegenden Abhandlung

will ich nun zur Vervollständigung der früheren die in so vielen Beziehungen wichtige allgemeine Theorie der Krümmungslinien der Flächen nach ganz ähnlichen Gesichtspunkten behandeln, was ich in meiner ersten Abhandlung nur unterliess, um derselben eine nicht zu grosse Ausdehnung zu geben. Eine solche Behandlung der allgemeinen Theorie der Krümmungslinien scheint mir für die höhere Geometrie Bedürfniss, da die Form der Gleichung der Fläche:

$$z = f(x, y),$$

die man namentlich bei dieser Theorie immer nur zu Grunde gelegt hat, doch jedenfalls keineswegs im Allgemeinen die primitive Form ist und manche Unbequemlichkeit hat, wenn man auch bei der Anwendung auf besondere Arten der Flächen allerdings häufig wieder auf die letztere Form wird zurückkehren müssen, wo sich aber die erforderlichen Formeln immer ganz unmittelbar und mit der grössten Leichtigkeit aus den ganz allgemeinen Formeln, die ich im Folgenden entwickeln werde, ableiten lassen werden. Auch werde ich die immer lästigen Coordinaten-Transformationen, wie etwa die häufig in Anwendung gebrachte Annahme der Berührungsebene der krummen Fläche in einem gewissen Punkte derselben als eine der Coordinatenebenen im Folgenden ganz vermeiden, um mich, was mein Hauptzweck ist, immer ganz im Allgemeinen zu halten. Dass sich diese Abhandlung unmittelbar an meine oben erwähnte frühere Abhandlung anschliessen und die in derselben gewonnenen Resultate als bekannt voraussetzen wird, brauche ich nach dem Bisherigen wohl nicht erst besonders zu bemerken. Bevor ich jedoch zur Theorie der Krümmungslinien selbst übergehe, schicke ich einige Betrachtungen über einen anderen, mit derselben unmittelbar zusammenhängenden Gegenstand, — nämlich über die sogenannten conjugirten Berührenden, — voraus, und werde auch in dieser Abhandlung Alles auf ganz strenge Gränzenbetrachtungen zurückführen.

In letzterer Beziehung erlaube ich mir, bevor ich zu meinem eigentlichen Gegenstande übergehe, noch eine schon in dem Eingange zu der Abhandlung über die Theorie der Berührung und Krümmung der Curven in Thl. XXX. Nr. XL. gemachte Bemerkung hier zu wiederholen und von Neuem auf dieselbe hinzuweisen. Für mich wenigstens hat nämlich bei allen diesen ganz allgemeinen geometrischen Untersuchungen über Curven und Flächen Das bei Weitem das meiste Interesse, dass, wie in dem Gebiete der Zahlen, auch im Raume unter gewissen Bedingungen oder Voraussetzungen ihrer Lage nach ganz bestimmte räumliche Objecte existiren, welche als die Gränzen anderer ihrer Lage nach ver-

änderlicher räumlicher Objecte zu betrachten und aufzufassen sind, denen diese letzteren unter den in Rede stehenden Voraussetzungen oder Bedingungen sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, mit denen dieselben immer genauer und genauer, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit zusammenfallend gemacht werden können. Nach meiner vollvollkommensten Ueberzeugung ist diese Auffassungsweise aller dieser Dinge die allein richtige und wahre, auf sie muss als die allein sichere Grundlage immer zurückgegangen werden, wobei man sich auch in der schönsten Uebereinstimmung mit allen ähnlichen Untersuchungen auf dem Gebiete der Zahlen befindet. Auch gewährt diese Auffassungsweise allein wirkliche Ueberzeugung und wahre — aber auch vollkommene — innere Befriedigung. Daher kann ich auch alle anderen Behandlungsarten dieser Gegenstände, etwa durch das sogenannte Unendlichkleine, wozu man in neuerer Zeit wieder öfters gegriffen hat, — mögen dieselben auch die Betrachtung hin und wieder abkürzen, — nicht billigen und denselben meinen Beifall nicht schenken, weil sich bei mir immer mehr und mehr die Ueberzeugung befestigt, dass auch bei allen diesen Betrachtungen im Gebiete des Raumes, eben so wie im Gebiete der Zahl, die Gränze das wesentliche und eigentliche Element ist, auf welches es allein ankommt.

## §. 2.

Die veränderlichen oder laufenden Coordinaten werde ich auch in dieser Abhandlung, wie in Thl. XXX. Nr. XL., wieder stets mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnen. Sind nun

$$A(\mathfrak{x}-a)+B(\mathfrak{y}-b)+C(\mathfrak{z}-c)=0,$$
$$A'(\mathfrak{x}-a')+B'(\mathfrak{y}-b')+C'(\mathfrak{z}-c')=0$$

die allgemeinen Gleichungen zweier Ebenen und

$$\frac{\mathfrak{x}-f}{X}=\frac{\mathfrak{y}-g}{Y}=\frac{\mathfrak{z}-h}{Z}$$

die Gleichungen ihrer Durchschnittslinie, so müssen, da $(fgh)$ einen beliebigen Punkt dieser Durchschnittslinie, welche in beiden gegebenen Ebenen zugleich liegt, repräsentirt, dessen Coordinaten den beiden Gleichungen

$$A(f-a)+B(g-b)+C(h-c)=0,$$
$$A'(f-a')+B'(g-b')+C'(h-c')=0$$

genügen; alle diese beiden Gleichungen erfüllenden Werthe von $f, g, h$ können aber auch für die in Rede stehenden Coordinaten gesetzt werden. Setzen wir nun ferner:

$$\frac{\mathfrak{x}-f}{X}=\frac{\mathfrak{y}-g}{Y}=\frac{\mathfrak{z}-h}{Z}=G,$$

so ist:

$$\mathfrak{x}=f+GX,\quad \mathfrak{y}=g+GY,\quad \mathfrak{z}=h+GZ;$$

also:

$$A(f-a+GX)+B(g-b+GY)+C(h-c+GZ)=0,$$

$$A'(f-a'+GX)+B'(g-b'+GY)+C'(h-c'+GZ)=0;$$

folglich, weil

$$A(f-a)+B(g-b)+C(h-c)=0,$$

$$A'(f-a')+B'(g-b')+C'(h-c')=0$$

ist:

$$AX+BY+CZ=0,$$

$$A'X+B'Y+C'Z=0.$$

Bezeichnet nun $\mathfrak{G}$ einen gewissen Factor, so ist:

$$X=\mathfrak{G}(BC'-CB'),$$
$$Y=\mathfrak{G}(CA'-AC'),$$
$$Z=\mathfrak{G}(AB'-BA');$$

und nach dem Obigen sind also die Gleichungen der Durchschnittslinie unserer beiden Ebenen:

$$\frac{\mathfrak{x}-f}{BC'-CB'}=\frac{\mathfrak{y}-g}{CA'-AC'}=\frac{\mathfrak{z}-h}{AB'-BA'},$$

wo $f, g, h$ natürlich immer den beiden obigen Gleichungen genügen müssen. Da diese Form der Gleichungen der Durchschnittslinie zweier Ebenen, von der ich im Folgenden Anwendung machen werde, nicht ganz gewöhnlich ist, so habe ich, grösserer Deutlichkeit wegen, dieselbe hier besonders entwickelt.

§. 3.

Wir denken uns nun eine beliebige, durch die Gleichung

1) . . . . . . . . . $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})=0$

charakterisirte Fläche, und bezeichnen einen beliebigen, aber bestimmten Punkt auf derselben, durch $(xyz)$, wo also

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x, y, z) = 0$$

ist. Nun denke man sich auf der Fläche eine beliebige Curve gezogen, welche durch die Gleichungen

$$3) \quad \ldots\ldots \quad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0, \quad F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

charakterisirt sein mag; nimmt man dann noch an, dass diese Curve durch den Punkt $(xyz)$ gelegt sein soll, so muss auch

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(x, y, z) = 0$$

sein. Wenn wir die Functionen $f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$, jede für sich, überhaupt als Functionen dreier von einander unabhängiger veränderlicher Grössen $x, y, z$ betrachten und als solche behandeln, so soll

$$5) \quad \ldots\ldots \quad u = f(x, y, z), \quad U = F(x, y, z)$$

gesetzt werden.

Die Gleichung der Berührungsebene der Fläche in dem Punkte $(xyz)$ ist bekanntlich:

$$6) \quad \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x} - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y} - y) + \frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z} - z) = 0 \text{ *)}.$$

Ein zweiter Punkt der Fläche sei $(x_1 y_1 z_1)$, so dass also

$$7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x_1, y_1, z_1) = 0$$

ist, und, insofern $f(x_1, y_1, z_1)$ als eine Function dreier von einander unabhängiger veränderlicher Grössen $x_1, y_1, z_1$ betrachtet und behandelt werden soll, in ähnlicher Weise wie oben

$$8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u_1 = f(x_1, y_1, z_1)$$

gesetzt werden soll. Dann ist die Gleichung der Berührungsebene der Fläche in dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ wie oben:

$$9) \quad \ldots \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\mathfrak{x} - x_1) + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}(\mathfrak{y} - y_1) + \frac{\partial u_1}{\partial z_1}(\mathfrak{z} - z_1) = 0.$$

Soll aber, wie wir jetzt annehmen wollen, der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ zugleich in der auf der Fläche gezogenen Curve liegen, so muss auch

$$10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(x_1, y_1, z_1) = 0$$

---

*) M. s. Thl. XXX. Nr. XL. S. 425. Nr. 61).

sein, wo wir, wenn $F(x_1, y_1, z_1)$ als eine Function dreier von einander unabhängiger veränderlicher Grössen $x_1$, $y_1$, $z_1$ betrachtet und behandelt wird, setzen:

$$11) \ldots\ldots\ldots \quad U_1 = F(x_1, y_1, z_1).$$

Bekanntlich ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x}(x_1 - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(y_1 - y) + \frac{\partial u}{\partial z}(z_1 - z) + \mathfrak{r},$$

$$U_1 - U = \frac{\partial U}{\partial x}(x_1 - x) + \frac{\partial U}{\partial y}(y_1 - y) + \frac{\partial U}{\partial z}(z_1 - z) + \mathfrak{R};$$

wo die Reste $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{R}$ in Bezug auf die Grössen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ von der zweiten Ordnung sind. Insofern nun nach dem Obigen

$$u = 0,\ u_1 = 0;\quad U = 0,\ U_1 = 0;$$

also auch

$$u_1 - u = 0,\quad U_1 - U = 0$$

gesetzt werden muss, ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{y_1 - y}{x_1 - x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{z_1 - z}{x_1 - x} + \frac{\mathfrak{r}}{x_1 - x} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{y_1 - y}{x_1 - x} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{z_1 - z}{x_1 - x} + \frac{\mathfrak{R}}{x_1 - x} = 0;$$

also, indem man den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ sich auf der, auf unserer Fläche gezogenen Curve dem Punkte $(xyz)$ immer mehr und mehr nähern lässt, da, weil die Reste $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{R}$ in Bezug auf $x_1 - x$ von der zweiten Ordnung sind,

$$\operatorname{Lim}\frac{\mathfrak{r}}{x_1 - x} = 0,\quad \operatorname{Lim}\frac{\mathfrak{R}}{x_1 - x} = 0$$

ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{Lim}\frac{y_1 - y}{x_1 - x} + \frac{\partial u}{\partial z}\operatorname{Lim}\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\operatorname{Lim}\frac{y_1 - y}{x_1 - x} + \frac{\partial U}{\partial z}\operatorname{Lim}\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = 0;$$

woraus

$$\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}}$$

folgt.

Wenn die Grössen X, Y, Z so bestimmt werden, dass sie den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(X-x_1)+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}(Y-y_1)+\frac{\partial u}{\partial z_1}(Z-z_1)=0$$

genügen, so sind nach dem vorhergehenden Paragraphen die Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden Berührungsebenen:

$$\frac{\mathfrak{x}-X}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}=\frac{\mathfrak{y}-Y}{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}=\frac{\mathfrak{z}-Z}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(z_1-z)+R_x,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(z_1-z)+R_y,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z_1-z)+R_z;$$

wo die Reste $R_x$, $R_y$, $R_z$ in Bezug auf die Grössen $x_1-x$, $y_1-y$, $z_1-z$ von der zweiten Ordnung sind. Also ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}= &\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)(x_1-x)\\ &+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(y_1-y)\\ &+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)(z_1-z)\\ &+\frac{\partial u}{\partial y}R_z-\frac{\partial u}{\partial z}R_y,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)(x_1-x)$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)(y_1-y)$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)(z_1-z)$$
$$+\frac{\partial u}{\partial z}R_x-\frac{\partial u}{\partial x}R_z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_1-x)$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)(y_1-y)$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)(z_1-z)$$
$$+\frac{\partial u}{\partial x}R_y-\frac{\partial u}{\partial y}R_x;$$

und weil nun, wovon der Grund unmittelbar aus dem oben Bemerkten erhellet, wenn man den Punkt $(x_1y_1z_1)$ sich auf der auf unserer Fläche gezogenen Curve dem Punkte $(xyz)$ immer mehr und mehr nähern lässt:

$$\operatorname{Lim}\frac{R_x}{x_1-x}=0,\quad \operatorname{Lim}\frac{R_y}{x_1-x}=0,\quad \operatorname{Lim}\frac{R_z}{x_1-x}=0$$

ist, so ist:

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}{x-x_1}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x}$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}{x_1-x}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{x_1-x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x};$$

folglich, wenn man die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von

$$\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ und } \operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x}$$

einführt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}{x_1-x}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}{x_1-x}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\operatorname{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{x_1-x}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right).$$

Für X, Y, Z können nach dem Obigen **alle** Werthe gesetzt werden, welche den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(X-x_1)+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}(Y-y_1)+\frac{\partial u_1}{\partial z_1}(Z-z_1)=0$$

genügen. Für

$$X=x,\quad Y=y,\quad Z=z$$

werden diese beiden Gleichungen, insofern sie, was noch fraglich bleibt, für die Werthe $x$, $y$, $z$ von X, Y, Z wirklich erfüllt sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(z-z)=0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1-x)+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}(y_1-y)+\frac{\partial u_1}{\partial z_1}(z_1-z)=0;$$

und die erste ist also zunächst offenbar erfüllt. Was die zweite betrifft, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial x}+R_x',\quad \frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\frac{\partial u}{\partial y}+R_y',\quad \frac{\partial u_1}{\partial z_1}=\frac{\partial u}{\partial z}+R_z';$$

wo die Reste $R_x'$, $R_y'$, $R_z'$ in Bezug auf die Grössen $x_1-x$, $y_1-y$, $z_1-z$ von der ersten Ordnung sind; also ist:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1-x)+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}(y_1-y)+\frac{\partial u_1}{\partial z_1}(z_1-z)\\ &=\frac{\partial u}{\partial x}(x_1-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(y_1-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(z_1-z)\\ &+R_x'(x_1-x)+R_y'(y_1-y)+R_z'(z_1-z),\end{aligned}$$

und die Grösse

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1-x)+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}(y_1-y)+\frac{\partial u_1}{\partial z_1}(z_1-z)$$

nähert sich folglich der Null als Gränze, wenn der Punkt $(x_1y_1z_1)$ dem Punkte $(xyz)$ sich nähert. Hieraus sieht man, dass man, **bei dem Uebergange zur Gränze**, in der That

$$X=x,\quad Y=y,\quad Z=z$$

setzen kann.

Weil man nun die obigen Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden oben betrachteten Berührungsebenen offenbar auch unter der folgenden Form darstellen kann:

$$\frac{\mathfrak{x}-X}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}{x_1-x}}$$

$$=\frac{\mathfrak{y}-Y}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}{x_1-x}}$$

$$=\frac{\mathfrak{z}-Z}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{x_1-x}};$$

so erhält man nach allem Bisherigen als Gränzgleichungen dieser Gleichungen, unter der Voraussetzung, dass in der auf der gegebenen Fläche durch den Punkt $(xyz)$ gezogenen Curve der Punkt $(x_1y_1z_1)$ sich dem Punkte $(xyz)$ immer mehr und mehr nähert, offenbar die folgenden Gleichungen:

12)

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\mathfrak{y}-y}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\mathfrak{z}-z}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\end{array}\right\}}.$$

Betrachtet man $x, y, z$ sämmtlich als von einer einzigen veränderlichen Grösse, die wir, wie schon in Thl. XXX. Nr. XL., auch jetzt wieder etwa durch $\varphi$ bezeichnen wollen, abhängig, was wegen der beiden Gleichungen

$$f(x,y,z)=0,\quad F(x,y,z)=0$$

verstattet ist, so ist bekanntlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0;$$

und folglich, wenn $G'$ einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=G'\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=G'\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=G'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right);$$

also können die Gleichungen 12) auch unter der folgenden einfacheren Form dargestellt werden, wo man sich für $\varphi$ immer auch eine der drei Grössen $x, y, z$ selbst gesetzt denken kann:

13) . . .
$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\mathfrak{y}-y}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\mathfrak{z}-z}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{array}\right\}}$$

oder auch kürzer, mit Weglassung des Symbols $\varphi$, wenn man sich nur stets erinnert, dass in den Differentialen $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ die Grössen $x$, $y$, $z$ sämmtlich als Functionen einer gewissen veränderlichen Grösse, die auch eine dieser Grössen selbst sein kann, betrachtet werden müssen, unter der Form:

14)

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\partial x\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\partial y\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\partial z\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\mathfrak{y}-y}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\partial x\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\partial y\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\partial z\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\mathfrak{z}-z}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\partial x\\+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\partial y\\+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\partial z\end{array}\right\}}.$$

Die durch die Gleichungen 12) oder 13) oder 14) charakterisirte Gerade nennt man die der durch die Gleichungen

$$f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0,\quad F(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

charakterisirten Curve conjugirte Berührende der Fläche in dem Punkte $(xyz)$.

## §. 4.

Wir wollen jetzt der Kürze wegen:

15)

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} = \; & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi},\\
\mathrm{B} = \; & \left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi},\\
\mathrm{C} = \; & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}
\end{aligned}$$

setzen, so dass also die Gleichungen der conjugirten Berührenden die folgenden sind:

16) . . . . . $$\frac{\mathfrak{x}-x}{\mathrm{A}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\mathrm{B}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\mathrm{C}}.$$

Dann überzeugt man sich zuvörderst mittelst der Gleichungen 15) auf der Stelle von der Richtigkeit der folgenden Gleichung oder Relation:

17) . . . . . $$\mathrm{A}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{B}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{C}\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen 15) leicht der Ausdruck:

18) $$\begin{aligned}
\mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\mathrm{B}\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\mathrm{C}\frac{\partial z}{\partial\varphi} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 &+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}&\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}&\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}&\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}.
\end{aligned}$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$19) \quad \ldots\ldots \quad \Theta^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

so erhält man nach einigen, keiner Schwierigkeit unterliegenden Reductionen aus 15) die Formeln:

20)

$$A\frac{\partial u}{\partial y} - B\frac{\partial u}{\partial x} = \Theta\left(\Theta\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right),$$

$$B\frac{\partial u}{\partial z} - C\frac{\partial u}{\partial y} = \Theta\left(\Theta\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right),$$

$$C\frac{\partial u}{\partial x} - A\frac{\partial u}{\partial z} = \Theta\left(\Theta\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right);$$

und hieraus also:

$$21) \quad \ldots \quad \left(A\frac{\partial u}{\partial y} - B\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(B\frac{\partial u}{\partial z} - C\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(C\frac{\partial u}{\partial x} - A\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$= \Theta^2\left\{\begin{array}{l} \left(\Theta\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)^2 \\ + \left(\Theta\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)^2 \\ + \left(\Theta\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi} - \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)^2 \end{array}\right\},$$

oder nach gehöriger Entwickelung der Quadrate auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens:

$$22) \quad \left(A\frac{\partial u}{\partial y} - B\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(B\frac{\partial u}{\partial z} - C\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(C\frac{\partial u}{\partial x} - A\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$= \Theta^4\left\{\left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)^2\right\}.$$

Nach einem am Schluss dieses Paragraphen in der Anmer-

kung bewiesenen allgemeinen arithmetischen Satze ist nun wegen der Gleichungen 17) und 22):

23)

$$A^2+B^2+C^2=\Theta^2\left\{\left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)^2\right\}.$$

Die Gleichungen der Berührenden unserer auf der Fläche gezogenen Curve in dem Punkte $(xyz)$ sind bekanntlich *):

$$24) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial z}{\partial\varphi}}.$$

Bezeichnen wir nun die von dieser Berührenden unserer Curve in dem Punkte $(xyz)$ mit der conjugirten Berührenden eingeschlossenen Winkel im Allgemeinen durch $\omega$; so ist, wenn $G''$ und $G'''$ gewisse Factoren bezeichnen, mit Rücksicht auf die Gleichungen 16) und 24), nach bekannten Formeln:

$$\cos\omega=G''\frac{\partial x}{\partial\varphi}.G'''A+G''\frac{\partial y}{\partial\varphi}.G'''B+G''\frac{\partial z}{\partial\varphi}.G'''C,$$

also:

$$\cos\omega=G''G'''(A\frac{\partial x}{\partial\varphi}+B\frac{\partial y}{\partial\varphi}+C\frac{\partial z}{\partial\varphi}).$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$G''^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}=1,\quad G'''^2(A^2+B^2+C^2)=1;$$

also:

$$G''G'''=\pm\frac{1}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}(A^2+B^2+C^2)}},$$

und folglich:

25)

$$\cos\omega=\pm\frac{A\frac{\partial x}{\partial\varphi}+B\frac{\partial y}{\partial\varphi}+C\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}(A^2+B^2+C^2)}},$$

wo man für

*) M. s. Thl. XXX. Nr. XL. S. 367. Nr. 3).

$$A\frac{\partial x}{\partial\varphi}+B\frac{\partial y}{\partial\varphi}+C\frac{\partial z}{\partial\varphi} \quad \text{und} \quad A^2+B^2+C^2$$

die Ausdrücke 18) und 23) zu setzen hat.

Nach einer bekannten allgemeinen Formel findet man aus der Gleichung 25) ferner sogleich den Ausdruck:

26)

$$\sin\omega=\sqrt{\frac{(A\frac{\partial y}{\partial\varphi}-B\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2+(B\frac{\partial z}{\partial\varphi}-C\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2+(C\frac{\partial x}{\partial\varphi}-A\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2}{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}(A^2+B^2+C^2)}},$$

wo, wie man nach einigen Transformationen und Reductionen findet:

27)

$$A\frac{\partial y}{\partial\varphi}-B\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}\right),$$

$$B\frac{\partial z}{\partial\varphi}-C\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}\right),$$

$$C\frac{\partial x}{\partial\varphi}-A\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}\right)$$

ist. Also ist:

$$28)\ \ldots\ (A\frac{\partial u}{\partial\varphi}-B\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2+(B\frac{\partial z}{\partial\varphi}-C\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2+(C\frac{\partial x}{\partial\varphi}-A\frac{\partial z}{\partial\varphi})^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}\right)^2\right\}$$

$$-2\Theta\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}\right)$$

$$+\Theta^2\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\varphi}\right)^2.$$

### Anmerkung.

Wenn $Ax+By+Cz$ eine beliebige lineare Function der drei veränderlichen Grössen $x$, $y$, $z$ ist, so ist, wie man sogleich übersieht:

$$(Ax+By+Cz)^2$$
$$=(A^2+B^2+C^2)(x^2+y^2+z^2)-(A^2y^2-2ABxy+B^2x^2)$$
$$-(B^2z^2-2BCyz+C^2y^2)$$
$$-(C^2x^2-2CAzx+A^2z^2),$$

also:

$$(Ax+By+Cz)^2$$
$$=(A^2+B^2+C^2)(x^2+y^2+z^2)-(Ay-Bx)^2-(Bz-Cy)^2-(Cx-Az)^2.$$

Findet nun aber zwischen den drei Grössen $x, y, z$ die Gleichung

$$Ax+By+Cz=0$$

Statt, so ist immer:

$$(A^2+B^2+C^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$=(Ay-Bx)^2+(Bz-Cy)^2+(Cx-Az)^2,$$

also:

$$A^2+B^2+C^2=\frac{(Ay-Bx)^2+(Bz-Cy)^2+(Cx-Az)^2}{x^2+y^2+z^2}$$

und

$$x^2+y^2+z^2=\frac{(Ay-Bx)^2+(Bz-Cy)^2+(Cx-Az)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

## §. 5.

Auf der durch die Gleichung

29) . . . . . . . . $f(x, y, z)=0$

charakterisirten Fläche, wo natürlich $f(x, y, z)$ eine gegebene Function von $x, y, z$ ist, die wir, wenn wir sie als eine Function der drei von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z$ betrachten und als eine solche behandeln, wie früher durch $u$ bezeichnen, also unter dieser Voraussetzung

30) . . . . . . . . $u=f(x, y, z)$

setzen, wollen wir uns eine Curve gezogen denken, und uns nun die Frage vorlegen, wie eine solche Curve beschaffen sein muss, wenn die durch jede zwei einander benachbarte, d. h. unendlich nahe liegende Punkte derselben gezogenen Normalen der Fläche sich schneiden sollen, wobei wir es übrigens vorläufig noch ganz

unentschieden lassen, ob ein solches continuirliches Schneiden der Normalen einer Fläche, die durch eine stetige Folge von Punkten der Fläche gelegt sind, im ganz strengen geometrischen Sinne überhaupt möglich ist oder nicht.

Bezeichnen wir zwei Punkte unserer Curve im Allgemeinen durch $(xyz)$ und $(x_1y_1z_1)$, so sind, wenn wir auf ähnliche Weise wie oben

$$31) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u_1 = f(x_1, y_1, z_1)$$

setzen, die Gleichungen der beiden Normalen der Fläche in diesen Punkten bekanntlich *):

$$32) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \dfrac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \dfrac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial u}{\partial z}}, \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{x}-x_1}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} = \dfrac{\mathfrak{y}-y_1}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}} = \dfrac{\mathfrak{z}-z_1}{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}. \end{array} \right.$$

Sollen nun diese Normalen sich schneiden, so muss es einen beiden gemeinschaftlichen Punkt $(XYZ)$ geben, für welchen man also die Gleichungen

$$\frac{X-x}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial u}{\partial z}} = G,$$

$$\frac{X-x_1}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} = \frac{Y-y_1}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}} = \frac{Z-z_1}{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}} = G_1$$

hat. Also ist:

$$X = x + G\frac{\partial u}{\partial x} = x_1 + G_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$Y = y + G\frac{\partial u}{\partial y} = y_1 + G_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1},$$

$$Z = z + G\frac{\partial u}{\partial z} = z_1 + G_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1};$$

folglich:

$$x_1 - x = G\frac{\partial u}{\partial x} - G_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad y_1 - y = G\frac{\partial u}{\partial y} - G_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1},$$

$$z_1 - z = G\frac{\partial u}{\partial z} - G_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}.$$

---

*) M. s. Thl. XXX. Nr. XL. S. 426. Nr. 62).

$$(Ax + By + Cz)^2$$

$$= (A^2 + B^2 + C^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (A^2y^2 - 2ABxy + B$$

$$- (B^2z^2 - 2BCyz +$$

$$- (C^2x^2 - 2CAzx$$

also:

$$(Ax + By + Cz)^2$$

$$= (A^2 + B^2 + C^2)(x^2+y^2+z^2) - (Ay - Bx)^2 - (B$$

Findet nun aber zwischen den drei Grössen

$$Ax + By + Cz = 0$$

Statt, so ist immer:

$$(A^2 + B^2 + C^2)(x^2$$

$$= (Ay - Bx)^2 + (Bz - C$$

also:

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{(Ay - Bx)^2}{}$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(Ay - B}{}$$

Auf der durch di

29) . . . . . $= 0$

charakterisirten F

Function von $x$,

der drei von ei

betrachten un

bezeichnen,

Frage vorlegen können, ob es für diese

30) . . gleichung giebt, welcher dieselbe sich nähert,

setzen, w ... der Null, d. h. wenn man sich den Punkt

die Frag ... uf der Fläche gedachten Curve immer mehr und

wenn d ... ukte $(xyz)$ nähern lässt. Diese Frage wollen wir

nahe l ... ntworten suchen.

sich ... dem Taylor'schen Lehrsatze ist bekanntlich:

$$y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta\varphi + \mathfrak{R}_y, \quad z_1 = z + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \Delta\varphi + \mathfrak{R}_z;$$

in Bezug auf $\Delta\varphi$ von der zweiten Ord-

$$\ldots \frac{\partial y}{\ldots} + \frac{\mathfrak{R}_y}{\Delta\varphi}, \quad \frac{z_1 - z}{\Delta\varphi} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\mathfrak{R}_z}{\Delta\varphi};$$

...este $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$ in Bezug ...lso

$$\ldots \mathfrak{R}_z \ldots = 0$$

$$\ldots \frac{\partial z}{\ldots\varphi}$$

...n Lehrsatze:

$$\ldots \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}(z_1 - z) + R_x,$$

$$\ldots (y_1 - y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(z_1 - z) + R_y,$$

$$\ldots) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(y_1 - y) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z_1 - z) + R_z;$$

..., $R_y$, $R_z$ in Bezug auf $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, ...ezug auf $\Delta\varphi$, von der zweiten Ordnung sind, und ...beachten hat, dass $x_1$, $y_1$, $z_1$ aus $x$, $y$, $z$ hervorgehen, ...n sich diese Grössen respective um $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ ...ern lässt. Folglich ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = & \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_1 - x) \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)(y_1 - y) \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)(z_1 - z) \\
& + \frac{\partial u}{\partial x} R_y - \frac{\partial u}{\partial y} R_x,
\end{aligned}$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1},\quad \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1},\quad \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

und addiren sie dann zu einander, so erhalten wir die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)(x_1-x)\\ +&\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)(y_1-y)\\ +&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)(z_1-z)\end{aligned}\right\}=0,$$

welche die Bedingungsgleichung ist, die erfüllt sein muss, wenn die beiden Normalen sich schneiden sollen.

Weil der Punkt $(xyz)$ als einer bestimmten Curve auf der Fläche angehörend betrachtet wird, so ist es verstattet, sich $x$, $y$, $z$ als Functionen einer und derselben beliebigen Veränderlichen $\varphi$ zu denken, und anzunehmen, dass, wenn $\varphi$ die Veränderung $\varDelta\varphi$ erleidet oder in $\varphi+\varDelta\varphi$ übergeht, die Coordinaten $x$, $y$, $z$ in $x_1$, $y_1$, $z_1$ übergehen; dann werden wir unter diesen Voraussetzungen die obige Bedingungsgleichung des Schneidens der beiden Normalen der Fläche in den Punkten $(xyz)$ und $(x_1y_1z_1)$ derselben auch unter der Form:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{x_1-x}{\varDelta\varphi}\\ +&\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{y_1-y}{\varDelta\varphi}\\ +&\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{z_1-z}{\varDelta\varphi}\end{aligned}\right\}=0$$

darstellen, und uns die Frage vorlegen können, ob es für diese Gleichung eine Gränzgleichung giebt, welcher dieselbe sich nähert, wenn man $\varDelta\varphi$ sich der Null, d. h. wenn man sich den Punkt $(x_1y_1z_1)$ in der auf der Fläche gedachten Curve immer mehr und mehr dem Punkte $(xyz)$ nähern lässt. Diese Frage wollen wir jetzt zu beantworten suchen.

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist bekanntlich:

$$x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \mathfrak{R}_x,\quad y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \mathfrak{R}_y,\quad z_1 = z + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \mathfrak{R}_z;$$

wo die Reste $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$ in Bezug auf $\Delta\varphi$ von der zweiten Ordnung sind; also ist:

$$\frac{x_1 - x}{\Delta\varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\mathfrak{R}_x}{\Delta\varphi},\quad \frac{y_1 - y}{\Delta\varphi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\mathfrak{R}_y}{\Delta\varphi},\quad \frac{z_1 - z}{\Delta\varphi} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\mathfrak{R}_z}{\Delta\varphi};$$

und folglich, weil, wie gesagt, die Reste $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$ in Bezug auf $\Delta\varphi$ von der zweiten Ordnung sind, also

$$\operatorname{Lim}\frac{\mathfrak{R}_x}{\Delta\varphi} = 0,\quad \operatorname{Lim}\frac{\mathfrak{R}_y}{\Delta\varphi} = 0,\quad \operatorname{Lim}\frac{\mathfrak{R}_z}{\Delta\varphi} = 0$$

ist:

$$\operatorname{Lim}\frac{x_1 - x}{\Delta\varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi},\quad \operatorname{Lim}\frac{y_1 - y}{\Delta\varphi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi},\quad \operatorname{Lim}\frac{z_1 - z}{\Delta\varphi} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Ferner ist bekanntlich nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1 - x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(y_1 - y) + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}(z_1 - z) + R_x,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_1 - x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_1 - y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(z_1 - z) + R_y,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}(x_1 - x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(y_1 - y) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z_1 - z) + R_z;$$

wo die Reste $R_x$, $R_y$, $R_z$ in Bezug auf $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, also auch in Bezug auf $\Delta\varphi$, von der zweiten Ordnung sind, und man nur zu beachten hat, dass $x_1$, $y_1$, $z_1$ aus $x$, $y$, $z$ hervorgehen, wenn man sich diese Grössen respective um $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ verändern lässt. Folglich ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_1 - x)\\ &+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)(y_1 - y)\\ &+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)(z_1 - z)\\ &+\frac{\partial u}{\partial x}R_y - \frac{\partial u}{\partial y}R_x,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)(x_1-x)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(y_1-y)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)(z_1-z)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}R_z-\frac{\partial u}{\partial z}R_y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)(x_1-x)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)(y_1-y)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)(z_1-z)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}R_x-\frac{\partial u}{\partial x}\,.\,R_z;$$

also:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\Delta\varphi}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\cdot\frac{x_1-x}{\Delta\varphi}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\cdot\frac{y_1-y}{\Delta\varphi}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\cdot\frac{z_1-z}{\Delta\varphi}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{R_y}{\Delta\varphi}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{R_x}{\Delta\varphi},$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}{\Delta\varphi}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\cdot\frac{x_1-x}{\Delta\varphi}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{y_1-y}{\Delta\varphi}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\cdot\frac{z_1-z}{\Delta\varphi}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{R_z}{\Delta\varphi}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{R_y}{\Delta\varphi},$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}{\varDelta\varphi}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\cdot\frac{x_1-x}{\varDelta\varphi}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\cdot\frac{y_1-y}{\varDelta\varphi}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\cdot\frac{z_1-z}{\varDelta\varphi}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{R_x}{\varDelta\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{R_z}{\varDelta\varphi}.$$

Weil nun, da $R_x$, $R_y$, $R_z$ in Bezug auf $\varDelta\varphi$ von der zweiten Ordnung sind,

$$\text{Lim}\frac{R_x}{\varDelta\varphi}=0,\quad \text{Lim}\frac{R_y}{\varDelta\varphi}=0,\quad \text{Lim}\frac{R_z}{\varDelta\varphi}=0$$

ist, so ist nach dem Obigen:

$$\text{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\varDelta\varphi}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

$$\text{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}{\varDelta\varphi}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

$$\text{Lim}\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}{\varDelta\varphi}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}.$$

Nimmt man alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich, dass, wenn $\varDelta\varphi$ sich der Null nähert, d. h. wenn in der auf der Fläche gedachten Curve der Punkt $(x_1y_1z_1)$ dem Punkte $(xyz)$ immer näher und näher rückt, die Grösse:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{x_1-x}{\varDelta\varphi}+\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{y_1-y}{\varDelta\varphi}$$

$$+\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\varDelta\varphi}\cdot\frac{z_1-z}{\varDelta\varphi}$$

sich der Grösse

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{array}\right\}\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{array}\right\}\frac{\partial y}{\partial\varphi}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{array}\right\}\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

oder der Grösse

$$\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2\\+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\\+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\\-\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\-\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\-\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\end{array}$$

als ihrer Gränze nähert.

Setzt man nun:

33)

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}
\end{array}\right\}=0,$$

so wird diese Gleichung, in Verbindung mit der Gleichung

34) . . . . . . . . $f(x, y, z)=0$

oder mit der daraus abgeleiteten Gleichung

35) . . . . $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,$

eine stetige Folge auf der durch die Gleichung

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})=0$$

im Allgemeinen charakterisirten Fläche liegender Punkte $(xyz)$ bestimmen, welche so beschaffen sind, dass die, je zwei successive auf einander folgenden Punkten entsprechenden Normalen der Fläche mit der möglichst grössten Genauigkeit sich schneiden, und es wird also durch die beiden Gleichungen 33), 34) oder 33), 35) eine auf der in Rede stehenden Fläche liegende Curve bestimmt, welche die Eigenschaft hat, dass die in je zwei successive auf einander folgenden Punkten dieser Curve errichteten Normalen der Fläche mit der möglichst grössten Genauigkeit sich schneiden. Man sieht hieraus zugleich, dass von einem Schneiden der stetig oder continuirlich auf einander folgenden Normalen der Fläche im strengen geometrischen Sinne nicht die Rede sein kann, wie dies schon Moigno sehr richtig gegen Monge bemerkt hat *).

---

*) M. s. Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral par Moigno. Tome I. pag 384. No. 199., wo Moigno sehr

Curven von der in Rede stehenden Beschaffenheit, die also im Allgemeinen immer durch die Gleichungen 33), 34) oder 33), 35) charakterisirt werden, wo

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

die Gleichung der Fläche ist, auf welcher diese Curven liegen, hat man Krümmungslinien genannt, aus einem Grunde, welcher sogleich näher erläutert werden wird.

§. 6.

Aus den beiden Gleichungen 33), 35) kann man eine der drei Grössen

---

richtig sagt: „En partant de cette double propriété, on serait tenté de définir avec Monge les lignes de courbure des lignes qui renferment la suite des points d'une surface pour lesquels les normales infiniment voisines se rencontrent successivement; mais cette définition est réellement défectueuse, parce que de fait deux normales ne se rencontrent pas, quelque voisines qu'on les suppose. Ce qui est vrai, c'est que le rapprochement des normales correspondantes à deux points très voisins pris sur une ligne de curbure, est plus intime que dans toute autre direction; comparée au petit arc qui sépare ces deux normales sur la surface, et que nous supposéront être un infiniment petit du premier ordre, leur plus courte distance serait un infiniment petit du second ordre, tandis qu'elle est en général du premier ordre ou de même ordre que l'arc." Uebrigens bemerken wir, dass Moigno seine Entwickelung der Theorie der Krümmungslinien gar nicht auf diese eigentliche oder primitive Definition derselben gründet, sondern auf eine Eigenschaft dieser Curven, welche wir weiter unten in §. 8. beweisen werden, und die er pag. 380. No. 198. seines Werkes auf folgende Art ausspricht: „On appelle ligne de courbure d'une surface courbe toute ligne qui, étant tracée sur cette surface, est tangente en ce point à une section normale de plus grande ou de moindre courbure." Auf die in Rede stehende primitive Definition ist, wie wir glauben, von uns zuerst in völlig strenger und überzeugender Weise in der vorliegenden Abhandlung die Theorie der Krümmungslinien gegründet und in neuer, ganz allgemeiner Weise entwickelt worden. Die anderen Schriftsteller, welche von dieser Definition ausgehen, bedürfen aus dem angegebenen Grunde, so weit unsere Kenntniss reicht, sämmtlich mehrfacher Berichtigungen, namentlich Brandes in seinem Lehrbuche der höheren Geometrie. Thl. II. S. 210. und S. 211., der übrigens, wie ziemlich überall, so auch hier, seinem Vorbilde Monge blindlings folgt. Solche Fehler haben ihren Ursprung hauptsächlich in dem Gebrauche des sogenannten Unendlich-Kleinen und alles dessen, was damit zusammenhängt, vorzüglich in dem Unterlassen ganz strenger Gränzenbetrachtungen, die allein zu völliger Ueberzeugung bei dergleichen Dingen zu führen geeignet sind.

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

eliminiren. Wählen wir dazu die dritte, so liefert uns zuvörderst die Gleichung 35) die folgenden Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right\}^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right\}:$$

welche, in die Gleichung 33), nachdem man dieselbe mit $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ multiplicirt hat, eingeführt, zu der folgenden Gleichung führen:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\\
&-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\
&+\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\\
&\times\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\\
&+\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\\
&\times\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right\}\\
&=0.
\end{aligned}$$

Ordnet man diese Gleichung gehörig nach den Potenzen und Producten von $\frac{\partial x}{\partial\varphi}$ und $\frac{\partial y}{\partial\varphi}$, so findet man als Factoren von

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2$$

die Grössen:

$$\begin{aligned}
\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\\
-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}$$

und

$$-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z};$$

oder die Grössen:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$
$$+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)$$

und

$$-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right).$$

Setzen wir aber wie früher in 19):

$$\Theta^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

so ist:

$$\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},$$
$$\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},$$
$$\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

und die beiden Factoren von $\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2$ und $\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2$ sind also:

$$\Theta\left\{\Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)\right\}$$

und

$$-\Theta\left\{\Theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)\right\}.$$

Ferner ist der Factor von $\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}$, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}
&-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\\
&+\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\\
&+\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},
\end{aligned}$$

oder, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned}
&-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\\
&+\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\\
&+\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
&-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\\
&+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right),
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
&-\Theta^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)+\Theta^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\\
&+\Theta\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)-\Theta\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Folglich haben wir zwischen $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ die Gleichung:

36)

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\Theta-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2\\
&-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\Theta-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\\
&-\left\{\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)\right]\\
-&\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\Theta+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\right]\end{aligned}\right\}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\\
&=0.
\end{aligned}$$

Man kann diese Gleichung auf verschiedene andere Arten ausdrücken, worüber wir jedoch nur Folgendes bemerken wollen.

Es ist:

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\\+\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{array}\right\}\Theta$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right\}$$
$$=0$$

oder:

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\\+\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{array}\right\}\Theta$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial z}\\-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial\Theta}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\end{array}\right\}=0,$$

also, weil

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial\Theta}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}$$

ist:

37)

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\\+\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{array}\right\}\Theta$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}=0.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2};$$

also nach dem Obigen:

$$38)\quad \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\\ -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{array}\right\}\frac{\partial u}{\partial z}\Theta$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}=0,$$

oder:

$$39)\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right]\frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right]\frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{array}\right\}\frac{\partial u}{\partial z}\Theta$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}=0.$$

oder:

$$40)\quad \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}}{\Theta}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right]\frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right]\frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{array}\right\}}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial l.\Theta^2}{\partial \varphi}=\frac{\partial l.\Theta^2}{\partial .\Theta^2}\cdot\frac{\partial .\Theta^2}{\partial \varphi}=\frac{1}{\Theta^2}\cdot 2\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}=2\frac{\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}}{\Theta}.$$

also:

$$41)\quad \frac{\partial l.\Theta^2}{\partial \varphi}=2\frac{\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right]\frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right]\frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{array}\right\}}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}$$

oder:

$$42)\quad \partial l.\Theta^2 = 2\,\frac{\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right]\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ -\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\right]\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{array}\right\}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\partial\varphi,$$

also:

$$43)\quad l.\Theta^2 = 2\int\frac{\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right]\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ -\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\right]\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{array}\right\}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\partial\varphi.$$

Setzt man $x$ für $\varphi$, so ist:

$$44)\quad l.\Theta^2 = 2\int\frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}\\ +\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}:\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]\dfrac{\partial y}{\partial x}\end{array}\right\}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\partial x.$$

## §. 7.

Wenn die Gleichung der Fläche unter der Form

$$45)\quad .\ .\ .\quad z=f(x,y)\quad\text{oder}\quad z-f(x,y)=0$$

gegeben ist, so ist $u=z-f(x,y)$ zu setzen, und es ist folglich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=0.$$

Weil nun hiernach und nach 19):

$$\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

$$\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

ist, so erhält man aus der Gleichung 36), nachdem man dieselbe mit $\Theta$ multiplicirt hat, die folgende Gleichung:

$$\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Theta^2-\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2$$
$$-\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Theta^2-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2$$
$$-\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Theta^2+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right]\\-\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Theta^2+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\right]\end{array}\right\}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}=0;$$

also, weil nach dem Obigen und nach 19)

$$\Theta^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

ist:

$$46)\ldots\left.\begin{array}{l}\left\{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2\\-\left\{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\\-\left\{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{array}\right\}=0,$$

und, wenn man $x$ für $\varphi$ setzt:

$$47)\ldots\left.\begin{array}{l}\left\{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\\+\left\{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\}\frac{\partial y}{\partial x}\\-\left\{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\}\end{array}\right\}=0\ ^{*}).$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

also nach 40), indem man $x$ für $\varphi$ setzt:

---

*) Diese Gleichung stimmt ganz mit der von Brandes a. a. O. S. 211. gegebenen Gleichung überein; die oben gegen denselben gemachte Bemerkung betrifft seine Methode, nicht das Resultat.

48) $$\frac{\partial\Theta}{\Theta\partial x}=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}},$$

also

49) $$\frac{\partial\Theta}{\Theta}=\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\partial y\right)\partial x-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial y\right)\partial y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y}.$$

So ist aber

$$\partial\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial y,\quad \partial\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\partial y;$$

also

50) . . . $$\frac{\partial\Theta}{\Theta}=\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y},$$

und folglich:

51) . . . . . $$\partial l.\Theta^2=2\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y},$$

oder:

52) . . . $$\partial l.\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}=2\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y}.$$

Nun ist, wie man leicht findet:

$$\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\partial y\right)\partial x-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial y\right)\partial y-\frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 y$$

$$=\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y-\frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 y,$$

und folglich:

$$\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y=\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 y,$$

also nach 51):

$$\partial l.\Theta^2=2\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y\right)}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y}+\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y}$$

oder:

$$\partial l.\Theta^2=2\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\partial x,$$

folglich:

$$53)\quad\ldots\ldots\quad \partial l.\Theta^2=\partial l\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$=\partial l.\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\partial x,$$

oder:

$$54)\quad\ldots\quad \partial l.\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\partial x,$$

oder auch:

$$55)\quad\ldots\quad \partial l.\left\{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\right\}^2=\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\partial x.$$

## §. 8.

Wir wollen uns jetzt mit der Auflösung der Gleichung 36) beschäftigen, und setzen zu dem Ende:

$$56)\quad\ldots\ldots\ldots\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=G_y\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

wo natürlich nur von einer Bestimmung der Grösse $G_y$ die Rede sein kann. Der Kürze wegen wollen wir noch

57)

$$A=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\Theta-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right),$$

$$B=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)$$

$$-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\Theta+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)\right\},$$

$$C=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\Theta-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)$$

$$48) \ldots \frac{\frac{\partial\Theta}{\partial x}}{\Theta}=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}},$$

oder:

$$49)\quad \frac{\partial\Theta}{\Theta}=\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\partial y\right)\partial x-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial y\right)\partial y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y}.$$

Es ist aber:

$$\partial\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial y,\quad \partial\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\partial y;$$

also:

$$50) \ldots\ldots \frac{\partial\Theta}{\Theta}=\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y},$$

und folglich:

$$51) \ldots\ldots \partial l.\Theta^2=2\,\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y},$$

oder:

$$52) \ldots\ldots \partial l\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}=2\,\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y}.$$

Nun ist, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}&\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y\right)\\ &=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\partial y\right)\partial x-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial y\right)\partial y-\frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 y\\ &=\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y-\frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 y,\end{aligned}$$

und folglich:

$$\partial\frac{\partial z}{\partial y}.\partial x-\partial\frac{\partial z}{\partial x}.\partial y=\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 y,$$

also nach 51):

$$\partial l.\Theta^2=2\,\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y\right)}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y}+\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 y}{\frac{\partial z}{\partial y}\partial x-\frac{\partial z}{\partial x}\partial y}$$

oder:

$$\partial l.\Theta^2 = 2\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\partial x,$$

folglich:

$$53)\quad \ldots\ldots\quad \partial l.\Theta^2 = \partial l\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$=\partial l.\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\partial x,$$

oder:

$$54)\quad \ldots\quad \partial l.\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\partial x,$$

oder auch:

$$55)\quad \ldots\quad \partial l.\left\{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\right\}^2=\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}}\partial x.$$

## §. 8.

Wir wollen uns jetzt mit der Auflösung der Gleichung 36) beschäftigen, und setzen zu dem Ende:

$$56)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=G_y\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

wo natürlich nur von einer Bestimmung der Grösse $G_y$ die Rede sein kann. Der Kürze wegen wollen wir noch

57)

$$A=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\Theta-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right),$$

$$B=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)$$

$$-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\Theta+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)\right\},$$

$$C=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\Theta-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)$$

setzen, wodurch die Gleichung 36) folgende Gestalt erhält, indem man zugleich die Gleichung 56) benutzt:

$$AG_y^2 + BG_y = C.$$

Löst man diese Gleichung auf, so erhält man:

$$58) \quad \ldots\ldots \quad G_y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2+4AC}}{2A}.$$

Weil nun bekanntlich $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$ ist, so ist, wenn wir

$$59) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = G_z \frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

setzen:

$$60) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} G_y + \frac{\partial u}{\partial z} G_z = 0, \quad \text{und folglich:} \quad 61) \quad \frac{\partial u}{\partial z} G_z = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} G_y.$$

Die beiden Werthe, welche $G_y$ und $G_z$ haben kann, wollen wir jetzt von einander unterscheiden, und demzufolge

$$62) \begin{cases} G_y' = \dfrac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A} = -\dfrac{B}{2A} + \dfrac{\sqrt{B^2+4AC}}{2A}, \\ G_y'' = \dfrac{-B-\sqrt{B^2+4AC}}{2A} = -\dfrac{B}{2A} - \dfrac{\sqrt{B^2+4AC}}{2A}; \end{cases}$$

so wie entsprechend:

$$63) \quad \ldots \frac{\partial u}{\partial z} G_z' = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} G_y', \quad \frac{\partial u}{\partial z} G_z'' = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} G_y''$$

setzen; dann erhalten wir leicht die Formeln:

$$64) \quad \ldots \quad G_y' + G_y'' = -\frac{B}{A}, \quad G_y' G_y'' = -\frac{C}{A}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial z}(G_z' + G_z'') = -2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}(G_y' + G_y''),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 G_z' G_z'' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(G_y' + G_y'') + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 G_y' G_y'';$$

also nach 64):

$$65) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z}(G_z' + G_z'') = -2\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{B}{A}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 G_z' G_z'' = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{B}{A}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{C}{A}\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln erhält man leicht die Relation:

$$66) \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 (1 + G_y' G_y'' + G_z' G_z'')$$
$$= \frac{(A-C)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{A},$$

oder:

$$67) \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 (1 + G_y' G_y'' + G_z' G_z'')$$
$$= \frac{A\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} - B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - C\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{A},$$

oder:

$$68) \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 (1 + G_y' G_y'' + G_z' G_z'')$$
$$= \frac{(A-C)\,\Theta^2 - A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}{A};$$

welche wir nun, den Zähler des Bruchs in 67) auf der rechten Seite in's Auge fassend, zuvörderst etwas näher betrachten wollen.

Wir unterscheiden in diesem Zähler den $\Theta$ als Factor enthaltenden Theil von dem $\Theta$ nicht als Factor enthaltenden Theile. Der Factor von $\Theta$ in dem ersten dieser beiden Theile ist, wie man leicht findet:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}$$
$$-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)$$
$$-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right),$$

also offenbar:

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\,\Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right).$$

Der $\Theta$ nicht als Factor enthaltende Theil unsers Zählers ist, wie man sogleich übersieht:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\},$$

also offenbar:

$$+\frac{\partial u}{\partial z}\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right).$$

Folglich ist der ganze Zähler:

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right),$$

d. h. der Zähler verschwindet, und wir haben daher die folgenden Gleichungen:

$$69) \;.\;.\; A\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-C\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}=0,$$

oder:

$$70) \;.\;.\; (A-C)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=-A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

oder:

$$71) \;.\;.\; (A-C)\Theta^2=A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Zugleich haben wir nach 66), 67), 68) die merkwürdige und wichtige Gleichung:

$$72) \;.\;.\;.\;.\;.\; 1+G_y'G_y''+G_z'G_z''=0.$$

Nach 69) ist:

$$B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=A\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-C\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\},$$

also:

$$(B^2+4AC)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left\{A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]+C\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^2$$

$$-4AC\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}+4AC\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

und folglich:

$$(B^2+4AC)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left\{A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]+C\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^2$$

$$-4AC\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$73) \quad \ldots\ldots \quad (B^2+4AC)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left\{(A+C)\Theta^2-A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}^2-4AC\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

Auch ist nach 71) offenbar:

$$74) \quad \ldots\ldots \quad (B^2+4AC)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left\{(A-C)\Theta^2-A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}^2+4AC\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Nach diesen beiden letzteren Gleichungen ist also:

$$(B^2+4AC)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4$$

$$=\left\{(A+C)\Theta^2-A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$-4AC\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

$$(B^2+4AC)\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$=\left\{(A-C)\Theta^2-A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}^2\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$+4AC\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man die Gleichung:

$$75) \quad (B^2+4AC)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$=\left\{(A+C)\Theta^2-A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$+\left\{(A-C)\Theta^2-A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}^2\Theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

woraus sich unmittelbar das wichtige Resultat ergiebt, dass die Grösse $B^2+4AC$ stets positiv ist, folglich die obigen Werthe von $G_y$ und $G_z$ stets reell sind.

Da es nach dem Bisherigen für jeden Punkt $(xyz)$ unserer Fläche zwei reelle Werthe von $G_y$ und zwei entsprechende reelle Werthe von $G_z$ giebt, so werden jedem Punkte $(xyz)$ unserer Fläche offenbar zwei Krümmungslinien entsprechen.

Weil die Gleichungen der Berührenden der Krümmungslinie im Punkte $(xyz)$ im Allgemeinen bekanntlich *)

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial z}{\partial \varphi}},$$

folglich für die beiden in Rede stehenden Krümmungslinien in nach dem Obigen leicht von selbst verständlicher Bezeichnung

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)'}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)'}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)'},\quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)''}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)''}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)''}$$

sind, wo man sich nach dem Obigen

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)'=G_y'\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)',\quad \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)'=G_z'\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)';$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)''=G_y''\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)'',\quad \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)''=G_z''\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)''$$

gesetzt zu denken hat, und weil also wegen der Gleichung 72) offenbar

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)'\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)''+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)'\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)''+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)'\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)''=0$$

ist; so ergiebt sich nach bekannten Sätzen und Gleichungen der analytischen Geometrie das wichtige Resultat, dass die beiden in Rede stehenden Krümmungslinien in dem Punkte $(xyz)$ jederzeit auf einander senkrecht stehen.

Wenn wir die Winkel, welche die Berührenden der dem Punkte $(xyz)$ entsprechenden Krümmungslinien mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliessen, durch $\theta, \omega, \varpi$ bezeichnen; so haben wir, weil deren Cosinus sich bekanntlich wie die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ zu einander verhalten, zur Bestimmung der Cosinus dieser Winkel nach 35) und 33) augenscheinlich die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi=0,$$

*) M. s. Thl. XXX. Nr. XL. S. 367. Nr. 3).

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\cos\theta^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\cos\omega^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\cos\overline{\omega}^2\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cos\theta\cos\omega\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\cos\omega\cos\overline{\omega}\\
-\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\cos\overline{\omega}\cos\theta
\end{array}\right\}=0,$$

und ausserdem die bekannte Gleichung: $\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1$.

Diese Gleichungen stimmen aber, wie man sogleich übersieht, vollkommen überein mit den Gleichungen, welche wir in unserer „**Allgemeinen Theorie der Krümmung der Flächen für jedes beliebige rechtwinklige Coordinatensystem**“ in Thl. XXVIII. S. 184. zur Bestimmung der Lage der Normalschnitte der grössten und kleinsten Krümmung der Fläche in dem Punkte $(xyz)$ gefunden haben, woraus sich also die merkwürdige Eigenschaft der Krümmungslinien ergiebt, **dass in jedem Punkte der Fläche die Richtungen der beiden diesem Punkte entsprechenden, auf einander senkrecht stehenden Krümmungslinien mit den bekanntlich gleichfalls auf einander senkrecht stehenden Normalschnitten der grössten und kleinsten Krümmung in diesem Punkte zusammenfallen.** Dieser merkwürdigen Eigenschaft wegen haben die Krümmungslinien ihren Namen erhalten.

Für irgend eine Curve sind nach 16) die Gleichungen der conjugirten Berührenden in dem Punkte $(xyz)$: $\frac{\mathfrak{x}-x}{A}=\frac{\mathfrak{y}-y}{B}=\frac{\mathfrak{z}-z}{C}$, und nach 18) ist allgemein:

$$\begin{aligned}
A\frac{\partial x}{\partial\varphi}+B\frac{\partial y}{\partial\varphi}+C\frac{\partial z}{\partial\varphi}=&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2&+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\\
&-\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\
&-\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\
&-\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}.
\end{aligned}$$

Ist nun die in Rede stehende Curve eine Krümmungslinie, so verschwindet nach 33) die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehende Grösse, und in diesem Falle ist also

$$A\frac{\partial x}{\partial \varphi}+B\frac{\partial y}{\partial \varphi}+C\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0,$$

woraus sich unmittelbar die neue merkwürdige allgemeine Eigenschaft der Krümmungslinien ergiebt, dass in jedem ihrer Punkte die entsprechende conjugirte Berührende der Fläche auf ihnen senkrecht steht.

Auf diese Weise haben wir jetzt die wichtigsten allgemeinen Eigenschaften der Krümmungslinien sämmtlich streng bewiesen, und die allgemeine Theorie dieser merkwürdigen Curven für jedes beliebige rechtwinklige Coordinatensystem entwickelt.

# VII.

# Miscellen.

## Zwei Sätze von höheren arithmetischen Reihen.

Von Herrn Reallehrer Dr. J. G. Molitor in Ettenheim im Grossherz. Baden.

### I.

Ist eine arithmetische Reihe der $m$ten Ordnung gegeben mit der constanten Differenz $\delta_1$, eine zweite von der $n$ten Ordnung mit $CD_n=\delta_2$, eine weitere von der $r$ten Ordnung mit $CD_r=\delta_3$ u. s. f., und diese werden gliedweise multiplicativ verbunden, so ist die so erhaltene Reihe von der $(m+n+r+\ldots.)$ten Ordnung mit der constanten Differenz:

$$CD_{(m+n+r+\ldots.)}=\frac{1.2.3\ldots.(m+n+r+\ldots.)}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.n.1.2\ldots.r\ldots.}.\delta_1.\delta_2.\delta_3\ldots.$$

### II.

Ist $a_1$, $a_2$, $a_3$,.... eine Reihe der $m$ten Ordnung mit der constanten Differenz $\delta$, so ist:

$$a_1^n,\quad a_2^n,\quad a_3^n,\ldots.$$

eine Reihe der $(nm)$ten Ordnung mit der constanten Differenz:

$$\frac{1.2.3\ldots.mn}{(1.2.3\ldots.m)^n}\delta^n.$$

# VIII.

## Ueber das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{(z^m-1)dz}{\log z}.$$

Von

Herrn Professor Dr. *J. P. Wolfers*

in Berlin.

---

Die Veranlassung zur Bestimmung dieses Integrales fand ich bei'm Studium von L. Euler's Integral-Rechnung, Thl. IV. Supplement V. pag. 261. u. f. Ich schicke hier einige kurze Paragraphen dieses Werkes, unter Hinzufügung weniger Bemerkungen, voran, theils weil dieselben an und für sich interessante Betrachtungen enthalten, theils um zu zeigen, wie ich zu meinem Verfahren gekommen bin. Am a. O.

§. 2. wird das einfachere Integral

$$\int_0^1 \frac{(z-1)dz}{\log z}$$

betrachtet und gezeigt, dass dasselbe einen bestimmten Werth habe. Setzt man nämlich

$$\frac{z-1}{\log z} = y,$$

so stellt unser Integral $\int y dz$ den Flächeninhalt einer Curve dar, deren Abscisse $z$ und Ordinate $=y$ ist, und es wird diese Fläche, von $z=0$ bis $z=1$ ausgedehnt, wenig grösser als $\frac{1}{2}$ sein. Es

wird für $z=0$, auch die Ordinate $y=0$; für $z=1$ aber nimmt die Ordinate $y=\frac{z-1}{\log z}$ zunächst die Form $\frac{0}{0}$ an. Wenn man nun nach bekannter Weise statt des Zählers und Nenners ihre Differentialquotienten setzt, erhält man sogleich für $z=1$

$$y=z=1.$$

Um von der Gestalt der Curve eine Vorstellung zu bekommen, bilden wir noch

$$\frac{dy}{dz}=\frac{z\log z-z+1}{z(\log z)^2}.$$

Für $z=0$ wird dieser Ausdruck

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\log 0}-\frac{1}{(\log 0)^2}+\frac{1}{0(\log 0)^2}.$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite verschwinden offenbar; um uns von dem Werthe des dritten eine deutliche Vorstellung zu machen, setzen wir

$$\log z=-\zeta, \quad \text{wonach} \quad z=\frac{1}{e^\zeta},$$

mithin für $z=0$, $\zeta=\infty$ wird. Wir haben nun allgemein

$$\frac{1}{z(\log z)^2}=\frac{e^\zeta}{\zeta^2}=\frac{1+\zeta+\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{\zeta^3}{3!}+\dots}{\zeta^2},$$

offenbar $=\infty$, wenn $z=0$ oder $\zeta=\infty$ ist. Wir haben daher im Anfangspunkt der Abscissen

$$\frac{dy}{dz}=\infty,$$

und es steigt die Curve daselbst senkrecht über die Abscissenaxe empor.

Für $z=1$ nimmt $\frac{dy}{dz}$ die Form $\frac{0}{0}$ an, nach vollzogener Differentiation des Zählers und Nenners erhält man

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\log z+2}, \text{ d. h. für } z=1$$

$$\frac{dy}{dz}=\tfrac{1}{2};$$

woraus sich die Neigung der Curve im obern Endpunkte gegen die Abscissen- und Ordinatenaxe ergiebt.

Für die mittleren Abscissen wird, für $z=e^{-\zeta}$,

$$y=\frac{e^{-\zeta}-1}{-\zeta}=\frac{e^{\zeta}-1}{\zeta e^{\zeta}},$$

wenn also $z$ sehr klein und $\zeta$ sehr gross ist, wird sehr nahe

$$y=\frac{1}{\zeta}.$$

Dieser Werth ist demnach weit grösser, als die Abscisse $z$, und wenn man die entsprechende Curve verzeichnet, deren Anfangspunkt durch $A$, Abscisse $z=1$ durch $AB$, Ordinate $y=1$ durch $BC$ bezeichnet werde; so wird man sehen, dass der Flächeninhalt $AMCB$ zwischen der Curve $AMC$, Abscisse $AB$ und Ordinate $BC$ wenig grösser als der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC=\frac{1}{2}$ sein wird.

§. 3. Neuerdings aber, als ich mit andern Untersuchungen beschäftigt war, habe ich wider Erwarten gefunden, dass dieser Flächeninhalt gleich dem hyperbolischen Logarithmen von 2, also

$$=0{,}6931471805\ldots.$$

sei. Dieses Resultat hat sich auf folgende Weise ergeben.

Da in Wirklichkeit

$$\log z=\frac{z^0-1}{0}$$

ist, weil durch Differentiation auf beiden Seiten

$$\frac{dz}{z}=\frac{0z^{-1}dz}{0}=\frac{dz}{z}$$

entsteht und beide Ausdrücke für $z=1$ verschwinden; so schreibe ich statt 0 den Bruch $\frac{1}{i}$, wo $i$ eine unendlich grosse Zahl bezeichnet. Es wird alsdann

$$\log z=i(z^{\frac{1}{i}}-1),$$

also die Ordinate

$$y=\frac{z-1}{i(z^{\frac{1}{i}}-1)}=\frac{1-z}{i(1-z^{\frac{1}{i}})},$$

so wie die Integral-Formel

$$\int_0^1 \frac{(1-z)dz}{i(1-z^{\frac{1}{i}})}.$$

Setzt man jetzt $z^{\frac{1}{i}} = x$, so wird

$$z = x^i,$$

wobei man bemerke, dass für beide Grenzen der Integration $z=0$ und $z=1$ zugleich auch $x=0$ und $x=1$ wird. Da ferner $dz = ix^{i-1}dx$ ist, wird die Integral-Formel

$$\int_0^1 \frac{x^{i-1}dx(1-x^i)}{1-x}.$$

§. 4. Da nun aber

$$\frac{1-x^i}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{i-1},$$

so erhält man

$$\int \frac{x^{i-1}dx(1-x^i)}{1-x} = \frac{x^i}{i} + \frac{x^{i+1}}{i+1} + \frac{x^{i+2}}{i+2} + \dots + \frac{x^{2i-1}}{2i-1}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite verschwindet für $x=0$, und es wird daher der gesuchte Werth:

$$\int_0^1 \frac{(z-1)dz}{\log z} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \dots + \frac{1}{2i-1},$$

wo $i$ unendlich gross, und daher die Anzahl der Glieder in Wirklichkeit unendlich ist. Nichts desto weniger wird, weil die einzelnen Glieder unendlich klein sind, diese Reihe eine endliche Summe haben, welche man folgendermaassen auf eine gewöhnliche Reihe zurückführen kann.

§. 5. Die gefundene Reihe kann betrachtet werden als die Differenz der folgenden zwei harmonischen Progressionen:

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2i-1},$$

$$B = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i-1};$$

indem $A-B$ die gefundene Reihe darstellt. Weil aber die Anzahl der Glieder in der Reihe $A=2i-1$ und in der Reihe $B=i-1$, also jene doppelt so gross als diese ist; so kann man, um eine regelmässige Reihe zu erhalten, die einzelnen Glieder der Reihe $B$ sprungweise von dem zweiten, vierten, sechsten, achten u. s. w. Gliede der Reihe $A$ subtrahiren, auf welche Weise man gleichzeitig zum Ende beider Reihen gelangen wird. Genau genommen, ist diess nicht streng richtig, indem $A$ nur dann doppelt so viele Glieder als $B$ haben würde, wenn das letzte Glied in ersterer

$$\frac{1}{2i-2}$$

wäre. Da indessen $i=\infty$ ist, so wird in jedem Falle das übrigbleibende Glied $\frac{1}{2i-1}$ als verschwindend klein anzusehen sein. — Man erhält auf diese Weise

$$A-B=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\ldots \text{ in inf.},$$

und da aus

$$\log w=w-1-\tfrac{1}{2}(w-1)^2+\tfrac{1}{3}(w-1)^3-\tfrac{1}{4}(w-1)^4+\ldots$$

für $w=2$

$$\log 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots$$

folgt; so wird offenbar

$$\int_0^1 \frac{(z-1)\,dz}{\log z}=\log 2.$$

§. 6. Eine ähnliche Schlussfolge kann der allgemeinen Integral-Formel

$$\int \frac{(z^m-1)dz}{\log z}$$

angepasst werden, und man wird endlich

$$\int_0^1 \frac{(z^m-1)dz}{\log z}=\log(m+1)$$

finden.

So weit habe ich den Inhalt der angeführten Paragraphen, dem Wesen, wenn auch nicht dem Worte nach hier mitgetheilt, muss aber bemerken, dass eine ganz ähnliche Schlussfolge, wie

in §§. 3.—5., mich nicht zu der in §. 6. aufgestellten allgemeinen Formel hat gelangen lassen.

Setzt man z. B. $m=2$, so folgt zwar aus

$$\int \frac{(z^2-1)dz}{\log z},$$

indem man wie vorhin in §. 3. $\log z = i(z^{\frac{1}{i}}-1)$ und $z=x^i$ setzt,

$$\int_0^1 \frac{(z^2-1)dz}{\log z} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \dots + \frac{1}{3i-1},$$

welche Reihe man ebenfalls als den Unterschied der harmonischen Progressionen

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3i-1},$$

$$B = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i-1}$$

betrachten kann. Es wird daher auch in diesem Falle

$$\int_0^1 \frac{(z^2-1)dz}{\log z} = A - B;$$

allein ich habe nicht ermitteln können, wie man den Werth von $A-B$ auf die Form

$$\log 3 = 1 - \tfrac{1}{2}.2 + \tfrac{1}{3}.2^2 - \tfrac{1}{4}.2^3 + \dots$$

bringen soll. Dagegen ist es mir gelungen, die Richtigkeit der in §. 6. aufgestellten allgemeinen Gleichung

$$\int_0^1 \frac{(z^m-1)dz}{\log z} = \log(m+1)$$

darzuthun, und zwar auf eine ähnliche, jedoch theilweise von der obigen abweichende Weise. Diesen Beweis will ich hier führen.

Aus dem vorausgesetzten Integrale

$$(1) \qquad \int \frac{(z^m-1)dz}{\log z}$$

eliminiren wir vermittelst der obigen Gleichung

$$\log z = i(z^{\frac{1}{i}} - 1)$$

nicht wie in §. 2. log$z$, sondern umgekehrt $z$; wir haben zu diesem Ende

$$z=(1+\frac{1}{i}\log z)^i \quad \text{und} \quad z^m=(1+\frac{1}{i}\log z)^{mi},$$

und es geht der Ausdruck (1) über in

$$(2) \qquad \int \frac{\{(1+\frac{1}{i}\log z)^{mi}-1\}\,dz}{\log z}$$

Hierbei muss daran erinnert werden, dass $i$ eine unendlich grosse Zahl bedeutet. Der Zähler in (2) wird daher, wenn wir die Binomial-Coefficienten nach der vielfach angewandten Weise bezeichnen:

$$(1+\frac{1}{i}\log z)^{mi}-1=mi\cdot\frac{1}{i}\log z+(mi)_2\cdot\frac{1}{i^2}(\log z)^2+(mi)_3\cdot\frac{1}{i^3}(\log z)^3$$
$$+\ldots \text{ in inf.},$$

oder weil z. B.

$$(mi)_3\cdot\frac{1}{i^3}=\frac{mi(mi-1)(mi-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{i^3}=\frac{m(m-\frac{1}{i})(m-\frac{2}{i})}{1.2.3}=\frac{m^3}{3!},$$

wegen $i=\infty$, statt (2) jetzt

$$(3) \qquad \int dz\{m+\frac{m^2}{2!}\log z+\frac{m^3}{3!}(\log z)^2+\frac{m^4}{4!}(\log z)^3+\ldots\}\cdot$$

Durch partielle Integration wird aber:

(4)

$$\int dz \quad =1,$$

$$\int dz\log z \quad =z\log z-z,$$

$$\int dz(\log z)^2=z(\log z)^2-2\int dz\log z=z(\log z)^2-2z\log z+2z,$$

$$\int dz(\log z)^3=z(\log z)^3-3\int dz(\log z)^2=z(\log z)^3-3z(\log z)^2+3.2.z\log z-3.2z,$$

$$\int dz(\log z)^4=z(\log z)^4-4\int dz(\log z)^3=z(\log z)^4-4z(\log z)^3+4.3z(\log z)^2$$
$$-4!\,z\log z+4!\,z,$$

u. s. w.

Für die obere Grenze $z=1$ gehen diese Werthe offenbar über in:

$$(5)\quad \begin{cases} \int dz = 1, \\ \int dz \log z = -1, \\ \int dz (\log z)^2 = +2, \\ \int dz (\log z)^3 = -3!, \\ \int dz (\log z)^4 = +4!, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Für die untere Grenze $z=0$ kommt es darauf an, zu untersuchen, welchen Werth ein Product von der Form

$$z(\log z)^n$$

in diesem Falle annimmt. Allein gerade wie oben in §. 2. gezeigt worden ist, dass für $z=0$

$$\frac{1}{z(\log z)^2} = \infty$$

sei, folgt sogleich

$$z(\log z)^n = 0.$$

Für die untere Grenze $z=0$ werden demnach alle Werthe in (4) gleich Null, und indem wir die Werthe (5) in (3) substituiren, erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{(z^m-1)dz}{\log z} = m - \frac{m^2}{2} + \frac{2m^3}{3!} - \frac{3!\,m^4}{4!} + \frac{4!\,m^5}{5!} - \dots$$
$$= m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \tfrac{1}{4}m^4 + \tfrac{1}{5}m^5 - \dots$$

oder

$$\int_0^1 \frac{(z^m-1)dz}{\log z} = \log(m+1).$$

Hiermit dürfte der Wunsch erfüllt sein, welcher a. a. O. §. 7. ausgesprochen war, nämlich nach einer andern leichten und gewöhnlichen Methode, das vorstehende Integral auf dieselbe Summe zurückzuführen, welche Untersuchung dort als eine höchst schwierige erschien.

Dass wenige Seiten und Paragraphen später in jenem Werke dieses bestimmte Integral nach einer ganz andern Methode auf denselben Logarithmen reducirt wird, möge hier am Schlusse bemerkt werden.

# IX.

## Ein geometrischer Lehrsatz.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

---

*Lehrsatz.* Gegeben sind zwei feste Punkte im Raume, durch welche zwei bewegliche Gerade gehen, die einen konstanten Winkel mit einander bilden und deren kürzeste Entfernung ebenfalls konstant ist, so hat die Kugel, welche durch die beiden festen Punkte und durch diejenigen zwei Punkte auf den Geraden geht, die die kürzeste Entfernung derselben angeben, einen konstanten Durchmesser.

*A* und *B* seien die festen Punkte, durch welche zwei bewegliche Geraden gehen, die von einer dritten, auf beiden zugleich senkrecht stehenden Geraden in *C* und *D* geschnitten werden, so ist der Durchmesser der Kugel, welche durch die vier Punkte *ABCD* geht, gleich

$$\sqrt{AB^2 \operatorname{cosec}^2\alpha - CD^2 \operatorname{cotg}^2\alpha};$$

$\alpha$ ist der Winkel zwischen den Geraden *AC* und *BD*. Man ziehe durch *B* die Linien *BE* parallel und gleich *CD*, ziehe *AE* und *AB*, so ist Winkel $AEB = 90^0$; also

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{AB^2 - CD^2}.$$

Ferner ziehe man *CE*, so ist nach dem Obigen $ACE = \alpha$; der Halbmesser des um *ACE* beschriebenen Kreises ist

$$r = \operatorname{cosec}\alpha . \frac{AE}{2}.$$

Da nun $CD$ senkrecht auf der Ebene $ACE$ steht, so folgt sogleich, dass der Halbmesser der durch die Punkte $A$, $E$, $C$, $D$ bestimmten Kugel, welche auch durch $B$ geht, gleich ist

$$\sqrt{r^2 + \frac{CD^2}{4}}.$$

Also ist der Durchmesser dieser Kugel

$$\sqrt{(AB^2 - CD^2)\operatorname{cosec}^2\alpha + CD^2} = \sqrt{AB^2 \operatorname{cosec}^2\alpha - CD^2 \operatorname{cotg}^2\alpha}.$$

Der obige Satz kann auch auf zwei andere Arten ausgesprochen werden:

Gegeben sind zwei Punkte auf einer Kugel, durch welche zwei bewegliche Sehnen gehen, so dass die Verbindungslinie ihrer andern Endpunkte senkrecht auf beiden steht (ihre kürzeste Entfernung angibt); so ist der Winkel zwischen beiden Sehnen konstant.

Gegeben sind zwei feste Gerade im Raume und eine dritte Gerade von konstanter Länge, welche sich mit ihren Endpunkten auf den beiden ersten Linien bewegt; dann hat die Kugel, welche durch die Punkte der kürzesten Entfernung auf den festen Geraden und die Endpunkte der beweglichen Geraden geht, einen konstanten Durchmesser.

Um den momentanen Drehungspunkt der Geraden $AB$ von unveränderlicher Länge, deren Endpunkte sich auf zwei festen Geraden $AC$ und $BD$ bewegen, zu bestimmen, nehmen wir wie vorher an, dass $CD$ senkrecht auf $AC$ und $BD$ zugleich stehe; oder dass die Punkte $C$ und $D$ die kürzeste Entfernung der Geraden $AC$ und $BD$ angeben. Ferner ziehen wir, wie oben, $BE$ parallel und gleich $CD$, $AE$ und $CE$; so ist in dem rechtwinkligen Dreieck $AEB$:

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \text{const.}$$

Während der Bewegung der Geraden $AB$ dreht sich auch die Linie $AE$, oder die Projektion von $AB$ auf der Ebene $AEC$; da nun die Linie $AE$ konstant ist und ihre Endpunkte sich auf den Schenkeln des festen Winkels $ACE$ bewegen, so ist ihr momentaner Drehungspunkt $X$ von $A$ ebenso weit entfernt, als der Fusspunkt des von $C$ auf $AE$ gefällten Perpendikels von $E$ *). Bei

*) Siehe den Aufsatz des Verfassers im Archiv: „Die Hypocycloide mit vier Aesten". (Nr. II. in diesem Theile S. 105.)

der Bewegung von $AB$ bleibt die Ebene $AEB$ stets parallel der Geraden $CD$, also ist ihre momentane Drehungsaxe parallel $CD$; da nun $X$ ein Punkt dieser Axe ist, so findet man diese selbst, wenn man durch $X$ eine Linie parallel $CD$ zieht; diese schneidet $AB$ in $Y$, somit ist $Y$ der momentane Drehungspunkt von $AB$. Wir haben somit folgende Aufgabe gelöst:

Gegeben sind zwei feste Gerade im Raume, auf welchen sich eine dritte Gerade von unveränderlicher Länge mit ihren Endpunkten bewegt. Man soll den momentanen Drehungspunkt der letzteren Geraden bestimmen.

## X.

## Ueber den durch drei Punkte einer Ellipse gehenden Kreis, und über den Krümmungskreis der Ellipse.

Von

dem Herausgeber.

Dieser Aufsatz, welcher zu verschiedenen neuen eleganten analytischen Ausdrücken führen wird, hat den Zweck, eine weitere fruchtbare Anwendung der Anomalien*) in der Lehre von der Ellipse zu zeigen, und zugleich die Theorie des Krümmungskreises dieser Curve aus einem neuen Gesichtspunkte darzustellen, welcher sich sehr zu einer elementaren Behandlung dieses Gegenstandes eignet; auf die Abhandlung Thl. XXIV. Nr. XXIX. wird des Folgenden wegen hier ein für alle Mal verwiesen.

*) M. s. Thl. XXIV. S. 372.

Die Anomalien zweier Punkte einer Ellipse seien $u_0$ und $u_1$, so sind bekanntlich

$$a\cos u_0,\ b\sin u_0 \quad \text{und} \quad a\cos u_1,\ b\sin u_1$$

die Coordinaten dieser Punkte; die Gleichung der durch diese beiden Punkte gehenden Sehne der Ellipse ist:

$$1)\ \ldots\ bx\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$

und die Coordinaten des Mittelpunkts dieser Sehne sind:

$$\tfrac{1}{2}a(\cos u_0+\cos u_1)=a\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$

$$\tfrac{1}{2}b(\sin u_0+\sin u_1)=b\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1).$$

Durch diesen Punkt lege man eine auf der Sehne senkrecht stehende Gerade, deren Gleichung

$$2)\ \ldots\ldots\ldots\ Ax+By+1=0$$

sein mag; so haben wir zur Bestimmung von $A$, $B$ die beiden Gleichungen:

$$Ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+Ba\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=0,$$

$$\{Aa\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+Bb\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)=-1;$$

aus denen sich leicht:

$$3)\ \ldots\ \begin{cases} A=-\dfrac{a}{(a^2-b^2)\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}, \\[2ex] B=+\dfrac{b}{(a^2-b^2)\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)} \end{cases}$$

ergiebt. Also ist die Gleichung der auf der Sehne 1) in ihrem Mittelpunkte senkrecht stehenden Geraden:

$$4)$$

$$\frac{ax}{(a^2-b^2)\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}-\frac{by}{(a^2-b^2)\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}=1,$$

oder:

$$5)\quad \frac{ax}{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}-\frac{by}{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}=(u^2-b^2)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1).$$

Ist nun $u_2$ die Anomalie eines dritten Punktes der Ellipse, und sind $X$, $Y$ die Coordinaten des Mittelpunktes des durch die

drei, durch die Anomalien $u_0$, $u_1$, $u_2$ bestimmten Punkte der Ellipse gehenden Kreises; so hat man nach der vorstehenden Gleichung für diese Coordinaten offenbar die folgenden Gleichungen:

6)

$$\frac{aX}{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}-\frac{bY}{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}=(a^2-b^2)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$

$$\frac{aX}{\cos\frac{1}{2}(u_1+u_2)}-\frac{bY}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2)}=(a^2-b^2)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2),$$

$$\frac{aX}{\cos\frac{1}{2}(u_2+u_0)}-\frac{bY}{\sin\frac{1}{2}(u_2+u_0)}=(a^2-b^2)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_0).$$

Bestimmt man aus zweien dieser Gleichungen, etwa aus den beiden ersten, die Coordinaten $X$, $Y$; so erhält man, weil, wie man leicht findet,

$$\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)-\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)$$
$$=-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)-\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)$$

ist, für $X$, $Y$ die folgenden merkwürdigen, ganz symmetrisch gebildeten Ausdrücke:

7)

$$X=\frac{a^2-b^2}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0),$$

$$Y=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0).$$

Wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ drei beliebige Winkel sind, so ist jederzeit:

$$8)\ \ldots\ \begin{cases} 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \\ =\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma), \\ 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \\ =\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma); \end{cases}$$

also nach 7):

9)

$$X=\frac{a^2-b^2}{4a}\{\cos(u_0+u_1+u_2)+(\cos u_0+\cos u_1+\cos u_2)\},$$

$$Y=\frac{a^2-b^2}{4b}\{\sin(u_0+u_1+u_2)-(\sin u_0+\sin u_1+\sin u_2)\}.$$

Bezeichnen wir den Halbmesser des durch die drei Punkte, deren Anomalien $u_0$, $u_1$, $u_2$ sind, beschriebenen Kreises durch $R$; so ist:

$$R^2=(a\cos u_0-X)^2+(b\sin u_0-Y)^2,$$

$$R^2=(a\cos u_1-X)^2+(b\sin u_1-Y)^2,$$

$$R^2=(a\cos u_2-X)^2+(b\sin u_2-Y)^2;$$

also nach 7):

10)

$$R^2=\quad\{a\cos u_0-\frac{a^2-b^2}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2$$

$$+\{b\sin u_0+\frac{a^2-b^2}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2,$$

oder:

11)

$$R^2=\quad\{a\cos u_1-\frac{a^2-b^2}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2$$

$$+\{b\sin u_1+\frac{a^2-b^2}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2,$$

oder:

12)

$$R^2=\quad\{a\cos u_2-\frac{a^2-b^2}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2$$

$$+\{b\sin u_2+\frac{a^2-b^2}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_0)\}^2.$$

Aus der Gleichung

$$R^2=(a\cos u_0-X)^2+(b\sin u_0-Y)^2$$

erhält man:

$$R^2=a^2\cos u_0{}^2+b^2\sin u_0{}^2-2(aX\cos u_0+bY\sin u_0)+X^2+Y^2.$$

Nach 9) ist aber:

$$aX\cos u_0+bY\sin u_0$$

$$=\frac{a^2-b^2}{4}\left\{\begin{array}{l}\cos u_0\cos(u_0+u_1+u_2)+\cos u_0(\cos u_0+\cos u_1+\cos u_2)\\+\sin u_0\sin(u_0+u_1+u_2)-\sin u_0(\sin u_0+\sin u_1+\sin u_2)\end{array}\right\},$$

also:

$$aX\cos u_0+bY\sin u_0$$

$$=\frac{a^2-b^2}{4}\left\{\begin{array}{r}\cos(u_1+u_2)+\cos u_0(\cos u_0+\cos u_1+\cos u_2)\\-\sin u_0(\sin u_0+\sin u_1+\sin u_2)\end{array}\right\},$$

und folglich, wie man sogleich übersieht:

$$a^2\cos u_0{}^2+b^2\sin u_0{}^2-2(aX\cos u_0+bY\sin u_0)$$

$$=-\frac{a^2}{2}\{\cos(u_0+u_1)+\cos(u_1+u_2)+\cos(u_2+u_0)-1\}$$

$$+\frac{b^2}{2}\{\cos(u_0+u_1)+\cos(u_1+u_2)+\cos(u_2+u_0)+1\}$$

$$=-\frac{a^2-b^2}{2}\{\cos(u_0+u_1)+\cos(u_1+u_2)+\cos(u_2+u_0)\}+\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Folglich ist:

13)

$$R^2=\left(\frac{a^2-b^2}{4}\right)^2\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{\cos(u_0+u_1+u_2)+(\cos u_0+\cos u_1+\cos u_2)}{a}\right]^2\\+\left[\dfrac{\sin(u_0+u_1+u_2)-(\sin u_0+\sin u_1+\sin u_2)}{b}\right]^2\end{array}\right\}$$

$$-\frac{a^2-b^2}{2}\{\cos(u_0+u_1)+\cos(u_1+u_2)+\cos(u_2+u_0)\}+\frac{a^2+b^2}{2},$$

oder nach dem Obigen:

14)

$$R^2=(a^2-b^2)^2\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2+u_0)}{a}\right]^2\\+\left[\dfrac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2)\sin\frac{1}{2}(u_2+u_0)}{b}\right]^2\end{array}\right\}$$

$$-\frac{a^2-b^2}{2}\{\cos(u_0+u_1)+\cos(u_1+u_2)+\cos(u_2+u_0)\}+\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ein anderer Ausdruck für $R^2$ ergiebt sich auf folgende Art. Man setze der Kürze wegen:

$$15) \;.\;. \begin{cases} U=\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\frac{1}{2}(u_2+u_0), \\ V=\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2)\sin\frac{1}{2}(u_2+u_0). \end{cases}$$

Dann ist nach dem Obigen:

$$R^2=(a\cos u_0-\frac{a^2-b^2}{a}U)^2+(b\sin u_0+\frac{a^2-b^2}{b}V)^2,$$

$$R^2=(a\cos u_1-\frac{a^2-b^2}{a}U)^2+(b\sin u_1+\frac{a^2-b^2}{b}V)^2,$$

$$R^2=(a\cos u_2-\frac{a^2-b^2}{a}U)^2+(b\sin u_2+\frac{a^2-b^2}{b}V)^2;$$

also, wenn man die Quadrate auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens entwickelt, dann die Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(u_1-u_2),\quad \sin(u_2-u_0),\quad \sin(u_0-u_1)$$

multiplicirt, und hierauf zu einander addirt, weil

$$\cos u_0\sin(u_1-u_2)+\cos u_1\sin(u_2-u_0)+\cos u_2\sin(u_0-u_1)=0,$$

$$\sin u_0\sin(u_1-u_2)+\sin u_1\sin(u_2-u_0)+\sin u_2\sin(u_0-u_1)=0$$

und

$$\sin(u_0-u_1)+\sin(u_1-u_2)+\sin(u_2-u_0)$$
$$=-4\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

ist, wenn man der Kürze wegen noch

16)

$$U_1=\cos u_0{}^2\sin(u_1-u_2)+\cos u_1{}^2\sin(u_2-u_0)+\cos u_2{}^2\sin(u_0-u_1),$$
$$V_1=\sin u_0{}^2\sin(u_1-u_2)+\sin u_1{}^2\sin(u_2-u_0)+\sin u_2{}^2\sin(u_0-u_1)$$

setzt:

$$17) \;.\;.\;.\;.\; R^2=\left(\frac{a^2-b^2}{a}\right)^2U^2+\left(\frac{a^2-b^2}{b}\right)^2V^2$$
$$-\frac{a^2U_1+b^2V_1}{4\sin\frac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

oder, weil

$$U_1+V_1=-4\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_0)$$

ist:

$$18) \quad \ldots \quad R^2 = a^2 + (a^2-b^2)^2 \left\{ \left(\frac{U}{a}\right)^2 + \left(\frac{V}{b}\right)^2 \right\}$$

$$+ \frac{(a^2-b^2)V_1}{4\sin\frac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)},$$

oder:

$$19) \quad \ldots \quad R^2 = b^2 + (a^2-b^2)^2 \left\{ \left(\frac{U}{a}\right)^2 + \left(\frac{V}{b}\right)^2 \right\}$$

$$- \frac{(a^2-b^2)U_1}{4\sin\frac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}.$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen erhält man:

$$20) \quad \ldots \quad 2R^2 = a^2 + b^2 + 2(a^2-b^2)^2 \left\{ \left(\frac{U}{a}\right)^2 + \left(\frac{V}{b}\right)^2 \right\}$$

$$- \frac{(a^2-b^2)\{\cos 2u_0 \sin(u_1-u_2) + \cos 2u_1 \sin(u_2-u_0) + \cos 2u_2 \sin(u_0-u_1)\}}{4\sin\frac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_2-u_0)}.$$

Wenn man im Vorhergehenden $u$ für $u_0$ schreibt, und annimmt, dass, indem die Anomalie $u$ einem bestimmten unveränderlichen Punkte der Ellipse entspricht, die Anomalien $u_1$ und $u_2$ sich der Anomalie $u$ nähern, und dann zu den Gränzen übergeht, welchen unter dieser Voraussetzung die Coordinaten $X$, $Y$ und der Halbmesser $R$ sich nähern; so erhält man offenbar die Coordinaten des Mittelpunkts und den Halbmesser des Krümmungskreises der Ellipse in dem durch die Anomalie $u$ bestimmten Punkte. Bezeichnet man aber diese Gränzen der Kürze wegen jetzt durch $X$, $Y$ und $R$ selbst, so erhält man aus den Gleichungen 7) und 14) zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunkts und des Halbmessers des Krümmungskreises in dem durch die Anomalie $u$ bestimmten Punkte der Ellipse unmittelbar die folgenden Formeln:

$$21) \quad \ldots \quad X = \frac{a^2-b^2}{a}\cos u^3, \quad Y = -\frac{a^2-b^2}{b}\sin u^3$$

und:

$$R^2 = (a^2-b^2)^2 \left\{ \left(\frac{\cos u^3}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin u^3}{b}\right)^2 \right\} - \frac{3(a^2-b^2)}{2}\cos 2u + \frac{a^2+b^2}{2},$$

also:

$$R^2=(a^2-b^2)^2\left\{\left(\frac{\cos u^3}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin u^3}{b}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{3(a^2-b^2)}{2}(\cos u^2-\sin u^2)+\frac{a^2+b^2}{2}(\cos u^2+\sin u^2),$$

welche Formel man leicht auf die folgende Form bringt:

$$R^2=\frac{a^4}{b^2}\sin u^6+\frac{b^4}{a^2}\cos u^6$$

$$-a^2\{\cos u^2(1-\cos u^4)-2\sin u^2(1-\sin u^4)\}$$

$$-b^2\{\sin u^2(1-\sin u^4)-2\cos u^2(1-\cos u^4)\}.$$

Aber

$$\cos u^2(1-\cos u^4)-2\sin u^2(1-\sin u^4)$$

$$=\quad\cos u^2\sin u^2(1+\cos u^2)-2\sin u^2\cos u^2(1+\sin u^2)$$

$$=-\sin u^2\cos u^2+\cos u^4\sin u^2-2\sin u^4\cos u^2$$

$$=-\sin u^2\cos u^2(1-\cos u^2)-2\sin u^4\cos u^2=-3\sin u^4\cos u^2,$$

$$\sin u^2(1-\sin u^4)-2\cos u^2(1-\cos u^4)$$

$$=\quad\sin u^2\cos u^2(1+\sin u^2)-2\cos u^2\sin u^2(1+\cos u^2)$$

$$=-\cos u^2\sin u^2+\sin u^4\cos u^2-2\cos u^4\sin u^2$$

$$=-\cos u^2\sin u^2(1-\sin u^2)-2\cos u^4\sin u^2=-3\cos u^4\sin u^2;$$

also nach dem Obigen:

$$R^2=\frac{a^4}{b^2}\sin u^6+3a^2\sin u^4\cos u^2+3b^2\sin u^2\cos u^4+\frac{b^4}{a^2}\cos u^6,$$

folglich offenbar:

$$22)\quad\ldots\ldots\quad R^2=\frac{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^3}{a^2b^2}.$$

Ganz Dasselbe erhält man noch leichter aus der Formel

$$R^2=(a\cos u-X)^2+(b\sin u-Y)^2,$$

nämlich, wenn man für $X$, $Y$ ihre Werthe aus 21) setzt, aus der Formel:

$$R^2=(a-\frac{a^2-b^2}{a}\cos u^2)^2\cos u^2+(b+\frac{a^2-b^2}{b}\sin u^2)^2\sin u^2,$$

weil hiernach

$$R^2 = (a\sin u^2 + \frac{b^2}{a}\cos u^2)^2 \cos u^2 + (b\cos u^2 + \frac{a^2}{b}\sin u^2)^2 \sin u^2$$

$$= (a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2)^2 \left\{\left(\frac{\sin u}{b}\right)^2 + \left(\frac{\cos u}{a}\right)^2\right\},$$

also

$$R^2 = \frac{(a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)^3}{a^2 b^2}$$

ist, ganz übereinstimmend mit dem vorher Gefundenen.

Setzt man

$$\cos u = \frac{x}{a}, \quad \sin u = \frac{y}{b};$$

so erhält man aus 21) und 22) die bekannten Formeln:

$$23) \ldots\ldots X = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3, \quad Y = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3$$

und

$$24) \ldots R^2 = \frac{\left(\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}\right)^3}{a^2 b^2} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8 b^8}.$$

# XI.

## Elementar-geometrischer Beweis der Grundeigenschaft der kürzesten oder geodätischen Linie auf einer beliebigen Fläche und darauf gegründete Entwickelung der allgemeinen Gleichungen der kürzesten oder geodätischen Linie.

Von

dem Herausgeber.

---

Wir gehen von der folgenden einfachen geometrischen Aufgabe aus:

Im Raume seien zwei Punkte und eine Ebene gegeben; man soll in dieser Ebene einen Punkt bestimmen, welcher in derselben eine solche Lage hat, dass er von den beiden gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist, und dass die Summe seiner Entfernungen von den beiden gegebenen Punkten ein Minimum ist.

Wir wollen die beiden gegebenen Punkte durch $A$ und $B$, die gegebene Ebene durch $E$ bezeichnen. Weil der gesuchte Punkt, den wir durch $M$ bezeichnen werden, von den beiden Punkten $A$ und $B$ gleich weit entfernt sein und in der Ebene $E$ liegen soll, so ist klar, dass dieser Punkt in der Geraden liegen muss, in der die gegebene Ebene $E$ von der in dem Mittelpunkte $C$ der Geraden $AB$ auf dieser Geraden senkrecht stehenden Ebene $E'$ geschnitten wird, welche Durchschnittslinie wir durch $L$ bezeichnen wollen. Legen wir nun durch die Gerade $AB$ eine auf der gegebenen Ebene $E$ senkrecht stehende Ebene $E''$, so ist der

Punkt $M$, in welchem von dieser Ebene die Gerade $L$ geschnitten wird, der gesuchte Punkt.

Um dies zu beweisen, sei $M'$ ein beliebiger anderer Punkt in der Geraden $L$. Man denke sich $MA = MB$ und $M'A = M'B$ gezogen. Weil die Ebene $E'$ auf der in der Ebene $E''$ liegenden Geraden $AB$ senkrecht steht, so steht die Ebene $E'$ auf der Ebene $E''$ senkrecht; nach der Construction steht aber auch die Ebene $E$ auf der Ebene $E''$ senkrecht; also steht die Durchschnittslinie $L$ der Ebenen $E$ und $E'$ auf der Ebene $E''$, folglich auch auf den beiden in der Ebene $E''$ liegenden, einander gleichen Geraden $MA$ und $MB$ senkrecht. Folglich sind die Dreiecke $AMM'$ und $BMM'$ bei $M$ rechtwinklig, daher

$$MA < M'A, \quad MB < M'B;$$

also:

$$MA + MB < M'A + M'B,$$

also offenbar $M$ der Punkt in der gegebenen Ebene $E$, welcher von den gegebenen Punkten $A$ und $B$ gleich weit entfernt ist und der zu erfüllenden Bedingung des Minimums genügt.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende geometrische Satz:

Wenn $A$ und $B$ zwei beliebige Punkte im Raume sind und $E$ eine beliebige Ebene ist, und man legt durch den Mittelpunkt $C$ der Geraden $AB$ eine auf $AB$ senkrecht stehende Ebene $E'$, durch die Gerade $AB$ aber eine auf der Ebene $E$ senkrecht stehende Ebene $E''$; so ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt $M$ der drei Ebenen $E$, $E'$, $E''$ derjenige Punkt der Ebene $E$, welcher in dieser Ebene eine solche Lage hat, dass er von den beiden Punkten $A$ und $B$ gleich weit entfernt, und dass die Summe $MA + MB$ seiner Entfernungen von den Punkten $A$ und $B$ ein Minimum ist.

Umgekehrt:

Wenn $A$ und $B$ zwei beliebige Punkte im Raume sind und $E$ eine beliebige Ebene ist, und der Punkt $M$ hat in der Ebene $E$ eine solche Lage, dass er von den beiden Punkten $A$ und $B$ gleich weit entfernt und dass die Summe $MA + MB$ seiner Entfernungen von den Punkten $A$ und $B$ ein Minimum ist; so ist der Punkt $M$ der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der Ebene $E$

und zweier Ebenen $E'$ und $E''$, von denen die erste $E'$ in dem Mittelpunkte $C$ der Geraden $AB$ auf dieser Geraden senkrecht steht, die zweite $E''$ durch die Gerade $AB$ senkrecht gegen die Ebene $E$ gelegt ist.

Da nämlich zuvörderst der in der Ebene $E$ liegende Punkt $M$ von den Punkten $A$ und $B$ nach der Voraussetzung gleich weit entfernt ist, so muss derselbe offenbar nothwendig in der in dem Mittelpunkte $C$ der Geraden $AB$ auf dieser Geraden senkrecht stehenden Ebene $E'$, also in der Durchschnittslinie der Ebenen $E$ und $E'$ liegen. Läge nun aber der Punkt $M$ nicht auch in der Ebene $E''$, und wäre also nicht der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Ebenen $E$, $E'$, $E''$, so sei $M'$ dieser gemeinschaftliche Durchschnittspunkt; dann wäre nach dem vorhergehenden Satze

$$M'A + M'B < MA + MB,$$

also $MA + MB$ kein Minimum, wie doch vorausgesetzt wurde, womit also unser Satz bewiesen ist.

Wenn nun auf einer Fläche zwischen zwei Punkten in derselben die Kürzeste gezogen ist, so ist zuvörderst nach einem bekannten Princip klar, dass auch jeder Theil dieser Kürzesten die Kürzeste zwischen seinen Endpunkten sein muss, weil ja, wenn es zwischen diesen Endpunkten eine kürzere Linie auf der Fläche als den in Rede stehenden Theil geben sollte, es natürlich auch zwischen den beiden ersten Punkten eine kürzere Linie auf der Fläche geben würde als die, welche wir als die kürzeste annahmen, was ungereimt ist.

Ist jetzt $M$ ein beliebiger Punkt in der zwischen zwei gegebenen Punkten auf einer beliebigen Fläche gezogenen Kürzesten, so denke man sich, dass in diesem Punkte zwei einander gleiche Elemente $MA$ und $MB$ dieser Kürzesten zusammenstossen: dann muss nach dem obigen Princip der Punkt $M$ unter allen auf der Fläche liegenden, von $A$ und $B$ gleich weit entfernten Punkten derjenige sein, für welchen $MA + MB$ ein Minimum ist. Denkt man sich aber die Fläche in der unmittelbarsten Nähe des Punktes $M$ durch ihre Berührungsebene ersetzt oder repräsentirt, so ist klar, dass auch in dieser Berührungsebene der Punkt $M$ eine solche Lage haben muss, dass $MA + MB$ ein Minimum ist, woraus sich nach den oben bewiesenen geometrischen Sätzen von selbst ergiebt, dass die Ebene $AMB$ auf der Berührungsebene der Fläche in dem Punkte $M$ senkrecht stehen muss. Weil nun aber die Ebene $AMB$ offenbar die Osculationsebene der Curve in dem

Punkte $M$ ist*), so ergiebt sich hieraus als Grundeigenschaft jeder Kürzesten auf einer Fläche, dass in jedem ihrer Punkte ihre diesem Punkte entsprechende Osculationsebene und die Berührungsebene der Fläche in demselben Punkte auf einander senkrecht stehen.

Mittelst dieser Grundeigenschaft der kürzesten oder geodätischen Linie und der aus der analytischen Geometrie bekannten Theorie der Berührungsebene einer Fläche und der Osculationsebene einer Curve ist es nun leicht, die allgemeinen Gleichungen der kürzesten oder geodätischen Linie aufzustellen.

Für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als veränderliche oder laufende Coordinaten sei

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

die allgemeine Gleichung einer Fläche, und $(x, y, z)$ sei ein beliebiger Punkt auf derselben, wo also auch

$$f(x, y, z) = 0$$

ist, und, insofern $f(x, y, z)$ im Allgemeinen als eine Function der veränderlichen Grössen $x$, $y$, $z$ betrachtet wird, der Kürze wegen

$$u = f(x, y, z)$$

gesetzt werden soll. Die Gleichung der Berührungsebene der Fläche in dem Punkte $(x, y, z)$ ist**):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x} - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y} - y) + \frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z} - z) = 0.$$

Denken wir uns nun den Punkt $(x, y, z)$ als einen beliebigen, einer bestimmten Curve auf der Fläche angehörenden Punkt, so ist die Gleichung der Osculationsebene dieser Curve in dem Punkte $(x, y, z)$***):

$$\left.\begin{array}{l} (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)(\mathfrak{x} - x) \\ + (\partial z \partial^2 x - \partial x \partial^2 z)(\mathfrak{y} - y) \\ + (\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)(\mathfrak{z} - z) \end{array}\right\} = 0,$$

wo man sich bekanntlich $x$, $y$, $z$ sämmtlich als von einer gewissen veränderlichen Grösse abhängig denken muss. Soll nun aber die in Rede stehende Curve, welcher der Punkt $(x, y, z)$ als

*) M. s. Thl. XXX. S. 380.

**) M. s. a. a. O. S. 425. Nr. 61).

***) M. s. a. a. O. S. 381. Nr. 25).

angehörend betrachtet worden ist, eine kürzeste oder geodätische Linie auf der Fläche sein; so muss nach dem Obigen in jedem ihrer Punkte ihre Osculationsebene auf der Berührungsebene der Fläche in demselben Punkte senkrecht stehen, also nach dem Obigen in Folge der allgemeinen Principien der analytischen Geometrie

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x}(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\\ +\frac{\partial u}{\partial y}(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)\\ +\frac{\partial u}{\partial z}(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)\end{array}\right\}=0$$

sein. Daher sind die allgemeinen Gleichungen einer Kürzesten auf unserer Fläche:

$$u=f(x,y,z)=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x}(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\\ +\frac{\partial u}{\partial y}(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)\\ +\frac{\partial u}{\partial z}(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)\end{array}\right\}=0$$

oder auch:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u}{\partial z}\partial z=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x}(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)\\ +\frac{\partial u}{\partial y}(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)\\ +\frac{\partial u}{\partial z}(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)\end{array}\right\}=0.$$

Der weiteren Ausführung dieses Gegenstandes wegen verweisen wir auf die Abhandlung Thl. XXII. Nr. IX.; hier kam es uns zunächst bloss auf die obige elementar-geometrische Ableitung der Grundeigenschaft der kürzesten oder geodätischen Linie an, auf welcher die ganze weitere Theorie dieser Linie beruhet.

# XII.

# Ueber die gemeinschaftliche Form aller jener ganzen Zahlen, deren jede so beschaffen ist, dass der Kreis, durch rein geometrische Construction, in eine ihr gleich grosse Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Von

Herrn Professor *Hessel*

in Marburg.

## Einleitung.

Gauss hat, in seinen Disquisit. arithm. (Lipsiae 1801 *)) S. 592. bis 665., besonders S. 662. bis 665., gezeigt, dass, wenn $m$ eine Primzahl (und grösser als 2) ist, die Peripherie eines Kreises nur in dem Falle durch rein geometrische Construction in $m$ gleiche Theile getheilt werden kann, wenn $m$ eine solche Primzahl ist, welche, bei ganzem nicht negativem Werthe der Zahl $n$, die Form $m = (2^n + 1)$ hat **).

Da jedoch das Aufsuchen solcher Primzahlen, welche diese Eigenschaft haben, mühsam sein würde, so fügt er selbst die weitere Angabe bei, dass, wenn $(2^n + 1)$ eine Primzahl sein soll (die grösser als 2 ist), sie die Form $[(2)^{2^y} + 1]$ haben muss.

Er zeigt nämlich, dass, wenn $n$ durch irgend eine von 1 und

*) Vergleiche auch Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung von 1796 Nr. 66. S. 554.

**) Auch 2 ist unter der Form $(2^n + 1)$ als $(2^0 + 1)$ enthalten.

von 2 verschiedene Zahl $\zeta$ theilbar wäre (also z. B. $=3.1$ oder $=5.2$ oder $=5.7$ u. s. w. wäre), die Zahl $(2^n+1)=(2^{\zeta\cdot\xi}+1)$ (in welcher $\zeta$ eine von 1 und von 2 verschiedene ganze Zahl und $\xi$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet) durch die ganze Zahl $(2^\zeta+1)$ theilbar sein würde, indem

$$\frac{2^{\zeta\cdot\xi}+1}{2^\zeta+1}=2^{\zeta(\xi-1)}-2^{\zeta(\xi-2)}+2^{\zeta(\xi-3)}+\ldots.$$

ist, und (weil $\xi$ eine ganze Zahl ist) die Division zu einem letzten Gliede $2^{\zeta\cdot 1}=2^\zeta$ im Quotienten führt, also aufgeht.

Er zeigt also, dass in einem solchen Falle die Zahl $(2^n+1)$ $=(2^{\zeta\xi}+1)$ durch jede der beiden ganzen Zahlen $(2^\zeta+1)$ und $(2^\xi+1)$, von denen jene $>(2^2+1)$, d. h. $>5$, diese $\overline{\overline{>}}(2^0+1)$, d. h. $\overline{\overline{>}}2$ ist, theilbar, also keine Primzahl sein würde.

Gauss hat offenbar auf die Primzahl von der Form $(2^n+1)$ deshalb mehr Gewicht gelegt, als auf die Primzahl von der Form $[(2)^{2^y}+1]$, weil jene auch die Primzahl 2 umfasst, diese aber (wenn man nur Werthe von $y$ vor Augen hat, welche nicht negative ganze Zahlen sind)*) die Primzahl 2 ausschliesst. Auch wollte Gauss zunächst nur für solche Zahlen $m$ sein Gesetz aussprechen, welche Primzahlen sind.

Fragt man aber nach der gemeinschaftlichen Form aller jener Zahlen $m$, deren jede die Eigenschaft hat, dass die Peripherie des Kreises durch rein geometrische Construction in $m$ gleiche Theile getheilt werden kann, (gleichviel ob $m$ eine Primzahl ist, oder nicht), so führen nachstehende Paragraphen zu einer, auf die Arbeiten von Gauss gegründeten, nicht uninteressanten Antwort**).

§. 1. Bedeutet $y$ eine beliebige **ganze** nicht negative Zahl, so ist die Zahl

---

*) Wenn man also den einzigen negativen ganzen Werth $y=-\infty$, bei welchem $(2)^{2^y}$ also auch $[(2)^{2^y}+1]$ eine ganze Zahl sein kann, nicht mit berücksichtigt.

**) Da die Lehre von Gauss, über die wir hier reden, nicht allen denen genügend bekannt ist, denen sie bekannt sein sollte, und da sie nicht bloss rein mathematisches Interesse hat, sondern auch für gewisse physikalische and insbesondere für gewisse krystallographische Lehren von Wichtigkeit ist, so kann vorliegende Arbeit auch dazu dienen, an dieselbe zu erinnern.

$$p_y = [(2)^{2^y} + 1]$$

eine ganze Zahl, die grösser als 2 ist. — Es ist nämlich:

| bei | | der Werth von $p_y$ |
|---|---|---|
| 1) $y=0$ | $2^y=2^0 \quad =1$ | $(2)^{2^y}+1=2^1+1=3$ |
| 2) $y=1$ | $2^y=2^1 \quad =2$ | $(2)^{2^y}+1=2^2+1=5$ |
| 3) $y=2$ | $2^y=2^2 \quad =4$ | $(2)^{2^y}+1=2^4+1=17$ |
| 4) $y=3$ | $2^y=2^3 \quad =8$ | $(2)^{2^y}+1=2^8+1=257$ |
| 5) $y=4$ | $2^y=2^4 \quad =16$ | $(2)^{2^y}+1=2^{16}+1=65537$ |
| 6) $y=5$ | $2^y=2^5 \quad =32$ | $(2)^{2^y}+1$*) $=2^{32}+1=4294967297$ |
| . . . . | . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| $y=\infty_1$ | $2^y=2^{\infty_1}=\infty_2$ | $(2)^{2^y}+1=2^{\infty_2}+1=(2\infty_3+1)$ |

§. 2. Um anzudeuten, dass irgend eine Zahl $p$ entweder auf der ersten oder auf der nullten Potenz vorhanden sei, dient bekanntlich

das Zeichen $p^{\frac{1}{2}(1\pm 1)}$ oder das Zeichen $p^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu})}$,

wo, bei + im Exponenten, oder, bei geradem Werthe der ganzen Zahl $\nu$, der Ausdruck den Werth $p^1=p$ annimmt, während er, bei — im Exponenten, oder, bei ungeradem Werthe von $\nu$, den Werth $p^0=1$ annimmt.

§. 3. Der Ausdruck

$$P_y = [p_y]^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu_y})} = [(2)^{2^y} + 1]^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu_y})}$$

umfasst daher nicht nur jede der Zahlen 3, 5, 17, 257, 65537, .... sondern auch die Zahl 1.

Es ist dabei $P_y \underset{\bullet}{=} 1$, wenn bei dem betreffenden Werth der ganzen nicht negativen Ordnungszahl $y$ der Werth von $\nu_y$, der eine ganze positive Zahl bedeutet (also $>0$) ist, einen ungeraden Werth hat. Ist dagegen, bei dem betreffenden Werthe von $y$, die Zahl $\nu_y$ eine gerade, so ist

---

*) $(2)^{2^5}+1=2^{32}+1$ ist keine Primzahl, sie ist $=641.6700417$, wie Euler gezeigt hat.

$$P_y = p_y = [(2)^{2^y} + 1] > 1.$$

§. 4. Sind $y=\alpha$ und $y=\beta$ zwei verschiedene (ganze nicht negative) Werthe von $y$, so sind

$$P_\alpha = [(2)^{2^\alpha} + 1]^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu_\alpha})} = p_\alpha^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu_\alpha})}$$

und

$$P_\beta = [(2)^{2^\beta} + 1]^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu_\beta})} = p_\beta^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu_\beta})}$$

nur dann einander gleich, wenn

$$(-1)^{\nu_\alpha} = (-)^{\nu_\beta} = -1,$$

also jede der beiden Zahlen $\nu_\alpha$ und $\nu_\beta$ eine ungerade Zahl ist.

Ist dagegen jede der beiden Zahlen $\nu_\alpha$ und $\nu_\beta$ eine gerade Zahl, oder ist nur eine derselben gerade, so ist $P_\alpha$ verschieden von $P_\beta$.

§. 5. Es sei in dem Ausdruck

$$m = (2^x) . P_0 . P_1 . P_2 \ldots . P_y \ldots . P_u$$

1) $m$ eine ganze positive Zahl,

2) $x$ eine ganze nicht negative Zahl,

3) $(2^x)$ die höchste der Potenzen von 2, die in der Zahl $m$ als Factor enthalten ist,

4) bei jedem der Werthe von $y$, welche die ganzen nicht negativen Zahlen, von $y=0$ bis $y=u$ sind, stets

$$P_y = [p_y]^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu_y})} = [(2)^{2^y} + 1]^{\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu_y})}$$

und es habe dabei

5) die ganze Zahl $\nu_y$ nur dann ungerade Werthe, wenn die Zahl

$$p_y = [(2)^{2^y} + 1]$$

keiner der primären Factoren von $m$ ist, sei es deshalb,

I. weil unter jenen Primzahlen, welche kleiner als die Zahl $p_y$ sind, solche $\gamma$, $\gamma_1 \ldots$ vorkommen, bei denen

$\dfrac{p_y}{\gamma}$ } kein **eigentlicher** (unächter) **Bruch** ist, d. h. weil $p_y$ keine Primzahl ist;

oder deshalb,

II. 1) weil $\frac{m}{p_y}$ { ein **eigentlicher** unächter Bruch ist, d. h. weil $\frac{m}{p_y}$ keine Primzahl und auch kein Product aus Primzahlen ist,

oder

II. 2) weil $\frac{m}{p_y}$ { ein **eigentlicher** ächter Bruch ist, d. h. weil $p_y > m$ ist;

6) es habe daher auch $p_u$ einen solchen Werth, der $\overline{\overline{<}} m$ ist.

Diess vorausgesetzt, so ist es, nach Gauss möglich, durch geometrische Construction die Peripherie eines gegebenen Kreises in $m$ gleiche Theile zu theilen, also falls $m > 2$ ist, ein regelmässiges $m$seitiges Polygon darzustellen.

Ist dagegen $M$ eine solche ganze Zahl, welche unter der so bestimmten Form von $m$ nicht enthalten ist, so ist es nicht möglich, durch rein geometrische Construction die Peripherie eines Kreises in $M$ gleiche Theile zu theilen.

§. 7. 1) Die Zahl $m$, von der hier die Rede ist, lässt sich also darstellen in Form eines Products von gewissen Potenzen gewisser Grundzahlen.

2) Jede der Grundzahlen ist $\overline{\overline{<}} m$.

3) Jede der Grundzahlen hat entweder den Werth $= 2$, oder einen Werth $p_y$ von der Form

$$p_y = [(2)^{2^y} + 1],$$

in welcher $y$ eine ganze nicht negative Zahl ist.

4) Die zu diesen Grundzahlen gehörenden Exponenten der Potenzen derselben sind ganze, nicht negative Zahlen.

5) Der Exponent $x$ der Grundzahl 2 ist entweder 0, oder 1, oder grösser als 1, aber nie so gross, dass $2^x > m$ wird.

6) Der Exponent, welcher zu einer der Grundzahlen von der Form

$$p_y = [(2)^{2^y} + 1]$$

gehört, ist,

a) falls $p_y$ eine Primzahl ist,

entweder $=0$, oder $=1$;

b) falls $p_y$ keine Primzahl ist,

nur $=0$.

7) Da $2^x \overset{=}{>} 1$ und $2^x \overset{=}{<} m$ sein muss, so ist:

$$\text{I)} \quad x \overset{=}{>} 0$$

und

$$\log 2^x \overset{=}{<} \log m,$$

also

$$x \log 2 \overset{=}{<} \log m;$$

$$\text{II)} \quad x \overset{=}{<} \frac{\log m}{\log 2}.$$

Da ferner der Werth von $p_y$, d. h. von $(2)^{2^y} + 1$, $\overset{=}{<} m$ sein muss, so ist

$$2^y \log 2 \overset{=}{<} \log(m-1),$$

$$2^y \overset{=}{<} \frac{\log(m-1)}{\log 2};$$

folglich

$$y \log 2 \overset{=}{<} \log\left(\frac{\log(m-1)}{\log 2}\right) = \log\log(m-1) - \log\log 2,$$

also

$$1) \quad y \overset{=}{<} \frac{\log\log(m-1) - \log\log 2}{\log 2},$$

und, da $y$ nicht negativ zu sein braucht,

$$2) \quad y \overset{=}{>} 0.$$

Anmerkung. Bezeichnen wir einen Exponenten, der nur

die Werthe 0 oder 1 haben kann, der Kürze wegen, durch $\tau_0$, $\tau_1$, $\tau_2$, .... $\tau_y$ oder $\tau_n$...., und wir setzen das eine Mal:

$$\odot)\quad m = 2^x . p_0^{\tau_0} . p_1^{\tau_1} . p_2^{\tau_2} .... p_y^{\tau_y} .... p_u^{\tau_u} .$$

wo bei jedem der Werthe der Zahl $y$ von $y=0$ bis $y=u$ stets

$$p_y^{\tau_y} = [(2)^{2^y} + 1]^{\tau_y},$$

und das andere Mal:

$$\mathfrak{D})\quad m = q_0^x . q_1^{\tau_1} . q_2^{\tau_2} . q_3^{\tau_3} .... q_n^{\tau_n} .... q_w^{\tau_w} ,$$

wo bei jedem der Werthe der Ordnungszahl $n$ von $n=0$ bis $n=w$ stets

$$q_n = (2^n + 1)$$

ist, so gelten für $\tau_n$ dieselben Gesetze, die eben für $\tau_y$ unter Nr. 6. ausgesprochen wurden. Es ist aber die Anzahl der Werthe $q_n = (2^n + 1)$, welche keine Primzahlen sind, beträchtlich grösser als die Anzahl der Werthe $p_y$, welche keine Primzahlen sind, so dass die Factoren-Reihe $\mathfrak{D}$) meist eine sehr grosse, die Factoren-Reihe $\odot$) dagegen in jedem für die Praxis irgend wie in Betracht kommenden Falle gar keine und, abgesehen von der Praxis, in Vergleich mit der entsprechenden Factoren-Reihe $\mathfrak{D}$), nur sehr wenige überflüssige Factoren enthält; denn die sechs kleinsten Werthe von $((2)^{2^y} + 1)$ sind 3, 5, 17, 257, 65537, **4294967297**, von denen nur der letzte keine Primzahl ist, während in der Reihe der Zahlen $(2^n + 1)$ von $(2^1 + 1)$ bis $(2^{32} + 1)$ eine sehr grosse Anzahl von Gliedern vorkommt, die keine Primzahlen sind.

Man reicht z. B. zu allen Werthen von $m$, die kleiner als 42949672967 sind, aus mit der Formel:

$$m = (2^x) . p_0^{\tau_0} . p_1^{\tau_1} . p_2^{\tau_2} . p_3^{\tau_3} . p_4^{\tau_4},$$

und zu allen Werthen von $m$, die $\overline{\overline{<}}$ 65537 sind, mit

$$m = (2^x) . p_0^{\tau_0} . p_1^{\tau_1} . p_2^{\tau_2} . p_3^{\tau_3},$$

u. s. w. und es ist z. B.:

$$2 = 2^1$$

$$3 = 2^0 . 3^1$$

$$4 = 2^2 . 3^0$$

$$5 = 2^0 . 3^0 . 5^1$$

$$6 = 2^1 . 3^1 . 5^0$$

$$8 = 2^3 . 3^0 . 5^0$$

$$10 = 2^1 . 3^0 . 5^1$$

$$12 = 2^2 . 3^1 . 5^0$$

$$15 = 2^0 . 3^1 . 5^1$$

$$16 = 2^4 . 3^0 . 5^0$$

$$17 = 2^0 . 3^0 . 5^0 . 17^1$$

$$20 = 2^2 . 3^0 . 5^1 . 17^0$$

$$24 = 2^3 . 3^1 . 5^0 . 17^0$$

$$30 = 2^1 . 3^1 . 5^1 . 17^0$$

$$32 = 2^5 . 3^0 . 5^0 . 17^0$$

$$34 = 2^1 . 3^0 . 5^0 . 17^1$$

$$40 = 2^3 . 3^0 . 5^1 . 17^0$$

$$48 = 2^4 . 3^0 . 5^0 . 17^0$$

$$60 = 2^2 . 3^1 . 5^1 . 17^0$$

$$64 = 2^0 . 3^0 . 5^0 . 17^0$$

$$68 = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 17^1$$

$$80 = 2^4 . 3^0 . 5^1 . 17^0$$

u. s. w.

# XIII.

# Ueber die Anzahl congruenter Divisoren einer Zahl.

Von

Herrn Dr. *C. Traub*

in Lahr im Grossherzogthum Baden.

---

Die Anzahl derjenigen Theiler (einer Zahl), welche dieselbe lineäre Form haben, spielt bekanntlich in vielen Sätzen der höheren Arithmetik eine grosse Rolle. Man vergleiche hierüber die berühmte Abhandlung von Lejeune Dirichlet: „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des Nombres." Seconde partie. Crelle, T. XXI. Da, so viel mir bekannt, allgemeine Formeln zur Bestimmung der Anzahl congruenter Theiler noch nicht aufgestellt worden sind, so möchte eine elementare Behandlung dieses Gegenstandes den Freunden der Zahlentheorie vielleicht nicht unwillkommen sein.

Bevor wir zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung übergehen, wollen wir die zum Verständniss des Folgenden nothwendigen Sätze vorausschicken.

---

## I.

## Fundamentalsätze aus der Theorie der Potenzreste.

### §. 1.

Ist $a$ eine Zahl, die mit $M$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, $a'$ der Exponent, zu welchem $a$ nach dem Modul $M$ gehört, so bilden die Reste der Potenzen:

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4, \ldots .\ a^{\mathfrak{A}} \ldots .$$

eine Periode von $a'$ Gliedern, und man erhält dieselben, wenn man dem Exponenten $\mathfrak{A}$ der Reihe nach die Werthe

$$0, 1, 2, 3, \ldots (a'-1)$$

beilegt und die Reste der entsprechenden Potenzen nach dem Modul $M$ bestimmt. Geht man über den Exponenten $\mathfrak{A}=a'-1$ hinaus, so wiederholen sich die bereits erhaltenen Reste in derselben Ordnung.

§. 2.

Nimmt man allgemeiner beliebig viele unter einander verschiedene Zahlen

$$a, b, c, d, \ldots l,$$

von welchen jede mit $M$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, und bestimmt für jede Combination

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{L}$$

die kleinste positive ganze Zahl, welche der Congruenz

$$X \equiv a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots l^{\mathfrak{L}} (\text{mod.} M)$$

genügt, so sagen wir, es bilden die auf diese Weise erhaltenen Zahlen, deren jede mit $M$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, eine zusammengesetzte Gruppe von Potenzresten, und wir bezeichnen dieselbe mit

$$[a, b, c, \ldots l].$$

Sind $a', b', c', \ldots l'$ die Exponenten, zu welchen die Zahlen $a, b, c, \ldots l$ nach dem Modul $M$ gehören, und betrachtet man zwei Combinationen

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{L},$$

$$\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \ldots \mathfrak{L}'$$

von Exponenten, für welche die Congruenzen:

$$\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A} (\text{mod.} a'),$$
$$\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B} (\text{mod.} b'),$$
$$\mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{C} (\text{mod.} c'),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{L}' \equiv \mathfrak{L} (\text{mod.} l')$$

Statt finden, und sind die jenen Combinationen entsprechenden Zahlen der Gruppe $X$ und $X'$, so erhält man

$$X \equiv {}' X (\text{mod.} M).$$

Um daher alle Zahlen der Gruppe $[a, b, c \ldots . l]$ zu erhalten, kann man sich darauf beschränken, nur solche Combinationen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots . \mathfrak{L}$ zu betrachten, welche den Ungleichheiten:

$$\begin{array}{l} a' > \mathfrak{A} \geqq 0, \\ b' > \mathfrak{B} \geqq 0, \\ c' > \mathfrak{C} \geqq 0, \\ \ldots\ldots \\ l' > \mathfrak{L} \geqq 0 \end{array}$$

Genüge leisten.

Wenn daher im Folgenden nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so sollen unter:

$$\begin{array}{c} \alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda, \\ \alpha', \beta', \gamma', \ldots . \lambda', \\ \alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots . \lambda'', \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots . \mathfrak{L}, \\ \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \ldots . \mathfrak{L}', \\ \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}'', \ldots . \mathfrak{L}'' \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

immer solche Combinationen von Exponenten der $a, b, c, \ldots . l$ verstanden werden, welche die obigen Ungleichheiten erfüllen.

## §. 3.

Folgende Sätze sind nun leicht zu beweisen:

1) Das Produkt beliebig vieler Zahlen einer Gruppe $[a, b, c, \ldots l]$ gehört in dieselbe Gruppe von Potenzresten.

2) Sind $t, u, v, w, \ldots .$ beliebig viele Zahlen aus der Gruppe $[a, b, c, \ldots . l]$, so enthält die neue Gruppe $[t, u, v, w, \ldots .]$ nur solche Zahlen, welche in $[a, b, c, \ldots . l]$ vorkommen; aber nicht alle Zahlen der letzteren Gruppe werden im Allgemeinen auch Glieder der ersten sein.

3) Nimmt man insbesondere an, es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_f$

die sämmtlichen incongruenten Zahlen aus der Gruppe $[a, b, c, \ldots. l]$, so sind die zwei Gruppen $[x_1, x_2, x_3, \ldots. x_f]$ und $[a, b, c, \ldots. l]$ identisch, d. h. jede Zahl der einen kommt auch in der andern vor.

## §. 4.

Es seien wie vorhin

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots. x_f$$

die sämmtlichen incongruenten Zahlen der Gruppe $[a, b, c, \ldots. l]$, ferner

$$m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots.. m_f$$

die Exponenten, zu welchen jene Zahlen nach dem Modul $M$ gehören. Ist dann $m$ der grösste der Exponenten, so sind $m_1$, $m_2$, $m_3, \ldots. m_f$ die sämmtlichen Theiler der Zahl $m$. Der Beweis beruht auf folgenden zwei bekannten Sätzen: Sind $P$, $Q$, $R$, $S$,... beliebig viele Zahlen, von welchen jede mit $M$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, ferner $p, q, r, s, \ldots.$ die Exponenten, zu welchen $P, Q, R, S, \ldots.$ nach dem Modul $M$ gehören, und sind

1) je zwei der Exponenten relative Primzahlen, so gehört das Produkt $P.Q.R.S\ldots.$ zum Exponenten $p.q.r.s\ldots.$ Da der Voraussetzung nach die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} P^p \equiv 1 \\ Q^q \equiv 1 \\ R^r \equiv 1 \\ S^s \equiv 1 \\ \ldots. \end{array}\right\} (\text{mod.}\, M) \ldots\ldots\ldots. \text{(a)}$$

Statt finden, so ergiebt sich daraus:

$$(P.Q.R.S\ldots.)^{pqrs\ldots.} \equiv 1\, (\text{mod.}\, M). \ldots.. \text{(b)}$$

Es gehöre nun $P.Q.R.S\ldots.$ zum Exponenten $x$, also

$$(P.Q.R.S\ldots.)^x \equiv 1\, (\text{mod.}\, M), \ldots\ldots \text{(c)}$$

so folgt hieraus durch Erhebung zur Potenz $qrs\ldots.$ und Berücksichtigung der Congruenzen (a)

$$P^{x.q.r.s\ldots.} \equiv 1\, (\text{mod.}\, M),$$

woraus hervorgeht, dass $x.q.r.s\ldots.$ durch $p$ theilbar ist (Disq. arith. art. 48.). Da aber diese Zahl zu jedem der Exponenten $q, r, s, \ldots.$ daher auch zu ihrem Produkte relative Primzahl ist,

so muss $x$ durch $p$ theilbar sein. Ebenso beweist man die Theilbarkeit von $x$ durch die andern Exponenten $q, r, s, \ldots.$, woraus dann hervorgeht, dass $x$ ein Vielfaches von $p.q.r.s\ldots.$ sein muss. Da aber $x$ die kleinste Zahl ist, welche der Congruenz (c) genügt, so ergibt sich aus (b) $x = pqrs\ldots.$ als Exponent, zu welchem das Produkt $P.Q.R.S\ldots.$ gehört. Sind aber

2) $p, q, r, s, \ldots.$ nicht je zwei relative Primzahlen, und ist $t$ die kleinste Zahl, welche durch die Exponenten $p, q, r, s, \ldots.$ theilbar ist, so kann man eine Zahl finden, welche zum Exponenten $t$ gehört. Denn man setze $t = p'q'r's'\ldots.$, wo je zwei der Zahlen $p', q', r', s', \ldots.$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben und $p', q', r', s', \ldots.$ aliquote Theile von $p, q, r, s, \ldots.$ sind. Ueber die Art und Weise, wie diese Zerlegung vorzunehmen ist, sehe man Disq. arith. art. 73. in der Anmerkung. Die Zahlen $P^{\frac{p}{p'}}, Q^{\frac{q}{q'}}, R^{\frac{r}{r'}}, S^{\frac{s}{s'}}, \ldots.$ gehören alsdann zu den Exponenten $p', q', r', s', \ldots.$, daher ist nach dem vorigen Satze $p'.q'.r'.s'\ldots.$ oder $t$ der Exponent, welcher dem Produkte

$$P^{\frac{p}{p'}}.Q^{\frac{q}{q'}}.R^{\frac{r}{r'}}.S^{\frac{s}{s'}}\ldots.$$

zukommt. Ist daher $m$ die kleinste Zahl, welche durch die Exponenten $m_1, m_2, m_3, \ldots. m_f$ theilbar ist, und setzt man

$$m = \mu_1.\mu_2.\mu_3\ldots.\mu_f,$$

wo die Faktoren $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots. \mu_f$ je zwei relative Primzahlen und aliquote Theile von $m_1, m_2, m_3, \ldots. m_f$ sind, so ist die Zahl

$$X = x_1^{\frac{m_1}{\mu_1}}.x_2^{\frac{m_2}{\mu_2}}.x_3^{\frac{m_3}{\mu_3}}\ldots.x_f^{\frac{m_f}{\mu_f}}$$

(siehe §. 3. 1)) in der Gruppe $[a, b, c, \ldots. l]$ enthalten und gehört zum Exponenten $m$. Um noch einzusehen, dass zu einem beliebigen Theiler $\Delta$ von $m$ auch Zahlen der Gruppe $[a, b, c, \ldots l]$ gehören, bemerke man, dass $X^{\frac{m}{\Delta}}$ diesen beiden Bedingungen genügt.

## §. 5.

Es sei $x$ eine bestimmte Zahl aus der Gruppe $[a, b, c, \ldots. l]$ und es werde

$$a^{\mathfrak{A}'}b^{\mathfrak{B}'}c^{\mathfrak{C}'}\ldots.l^{\mathfrak{L}'} \equiv x (\text{mod. } M),$$

so sollen hieraus alle Combinationen der Exponenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots. \mathfrak{L}$ abgeleitet werden, für welche die Congruenz

$$a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots. l^{\mathfrak{L}} \equiv x (\text{mod.}\, M) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Statt findet. Zur Bestimmung dieser Exponenten hat man daher auch die Congruenz:

$$a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots. l^{\mathfrak{L}} \equiv a^{\mathfrak{A}'} b^{\mathfrak{B}'} c^{\mathfrak{C}'} \ldots. l^{\mathfrak{L}'} (\text{mod.}\, M). \quad \ldots \quad (1')$$

Bedeutet nun $(\mathfrak{A})$ die Zahl $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{A}'$, und die Zahl $\mathfrak{A} + a'$, wenn $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}'$, und haben $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$, ....$(\mathfrak{L})$ eine ähnliche Bedeutung, so kann man, weil in Folge unserer Voraussetzung (siehe §. 2.):

$$a^{a'} \equiv 1 (\text{mod.}\, M),$$
$$b^{b'} \equiv 1 (\text{mod.}\, M),$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$l^{l'} \equiv 1 (\text{mod.}\, M)$$

statt obiger Congruenz jetzt auch die folgende schreiben:

$$a^{(\mathfrak{A})} b^{(\mathfrak{B})} c^{(\mathfrak{C})} \ldots. l^{(\mathfrak{L})} \equiv a^{\mathfrak{A}'} b^{\mathfrak{B}'} c^{\mathfrak{C}'} \ldots. l^{\mathfrak{L}'} (\text{mod.}\, M),$$

in welcher die Exponenten auf der linken Seite nicht kleiner sind als die entsprechenden Exponenten der Rechten. Man erhält daher:

$$a^{\mathfrak{A}'} b^{\mathfrak{B}'} c^{\mathfrak{C}'} \ldots. l^{\mathfrak{L}'} \{ a^{(\mathfrak{A}) - \mathfrak{A}'} . b^{(\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}'} \ldots. l^{(\mathfrak{L}) - \mathfrak{L}'} - 1 \} \equiv 0 (\text{mod.}\, M),$$

also auch

$$a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots. l^{\lambda} \equiv 1 (\text{mod.}\, M), \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

wo wir der Kürze halber

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{A}) - \mathfrak{A}' &= \alpha, \\ (\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}' &= \beta, \\ (\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}' &= \gamma, \\ \ldots &\ldots \\ (\mathfrak{L}) - \mathfrak{L}' &= \lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

gesetzt haben. Die Exponenten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ....$\lambda$ sind alle positiv und genügen den Ungleichheiten:

$$a' > \alpha \geqq 0,$$

$$b' > \beta \geqq 0,$$

$$\ldots \ldots$$

$$l' > \lambda \geqq 0.$$

Aus jeder Auflösung der Congruenz (1') leitet man daher vermittelst der Gleichungen (3) eine Auflösung der Congruenz (2) ab. Die Gleichungen (3) können auch in Form von Congruenzen geschrieben werden, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' (\text{mod.}\, a'),\\ \beta \equiv \mathfrak{B} - \mathfrak{B}' (\text{mod.}\, b'),\\ \gamma \equiv \mathfrak{C} - \mathfrak{C}' (\text{mod.}\, c'),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda \equiv \mathfrak{L} - \mathfrak{L}' (\text{mod.}\, l');\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und man ersieht leicht, dass zwei verschiedene Combinationen

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \ldots.\mathfrak{L},$$
$$\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{B}_0,\ \mathfrak{C}_0,\ \ldots.\mathfrak{L}_0,$$

welche die Congruenz (1) erfüllen, auch zwei verschiedene Combinationen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots.\lambda,$$
$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0,\ \ldots.\lambda_0$$

geben müssen, welche der Congruenz (2) genügen, so dass man aus $n$ verschiedene Auflösungen der Congruenz (1) ebenso viele verschiedene Auflösungen von (2) erhält. Denn wäre dieses nicht der Fall, sondern

$$\begin{array}{l}\alpha \equiv \alpha_0 (\text{mod.}\, a'),\\ \beta \equiv \beta_0 (\text{mod.}\, b'),\\ \cdots\cdots\cdots\\ \lambda \equiv \lambda_0 (\text{mod.}\, l');\end{array}$$

so würde man vermöge (4) zu folgenden Congruenzen gelangen:

$$\begin{array}{l}\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' (\text{mod.}\, a'),\\ \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B} - \mathfrak{B}' (\text{mod.}\, b'),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathfrak{L}_0 - \mathfrak{L}' \equiv \mathfrak{L} - \mathfrak{L}' (\text{mod.}\, l');\end{array}$$

aus welchen man erhält:

$$\begin{array}{l}\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A} (\text{mod.}\, a'),\\ \mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{B} (\text{mod.}\, b'),\\ \cdots\cdots\cdots\\ \mathfrak{L}_0 \equiv \mathfrak{L} (\text{mod.}\, l').\end{array}$$

Da aber

$$a' > \mathfrak{A} \geqq 0,$$

$$a' > \mathfrak{A}_0 \geqq 0,$$

$$b' > \mathfrak{B} \geqq 0,$$

$$b' > \mathfrak{B}_0 \geqq 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$l' > \mathfrak{L} \geqq 0,$$

$$l' > \mathfrak{L}_0 \geqq 0;$$

so würde sich

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B},$$
$$\cdots$$
$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L};$$

also die vollkommene Uebereinstimmung der zwei Combinationen

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{L},$$
$$\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{B}_0,\ \mathfrak{C}_0, \ldots \mathfrak{L}_0$$

ergeben. Die allgemeinste Auflösung der Congruenz (1) wird daher in Funktion einer beliebigen Auflösung ausgedrückt durch die nachstehenden Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &\equiv \alpha + \mathfrak{A}' (\mathrm{mod.}\, a'), \\ \mathfrak{B} &\equiv \beta + \mathfrak{B}' (\mathrm{mod.}\, b'), \\ \mathfrak{C} &\equiv \gamma + \mathfrak{C}' (\mathrm{mod.}\, c'), \\ &\cdots\cdots \\ \mathfrak{L} &\equiv \lambda + \mathfrak{L}' (\mathrm{mod.}\, l'); \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{L}$ so zu bestimmen sind, dass sie den Ungleichheiten

$$a' > \mathfrak{A} \geqq 0,$$

$$b' > \mathfrak{B} \geqq 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$l' > \mathfrak{L} \geqq 0$$

genügen. Nehmen wir nun an, es gebe $n$ verschiedene Combinationen der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda$, nehmlich:

$$\alpha', \beta', \gamma', \ldots . \lambda',$$
$$\alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots . \lambda'',$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)}, \ldots . \lambda^{(n)},$$

welche die Congruenz (2) erfüllen, so leitet man mittelst (5) ebenso viele verschiedene Auflösungen der Congruenz (1) ab, wenn dieselbe überhaupt eine zulässt.

Denn würden zwei verschiedene Combinationen

$$\alpha', \beta', \gamma', \ldots . \lambda',$$
$$\alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots . \lambda''$$

dieselbe Combination $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots . \mathfrak{L}$ ergeben, so erhielte man vermöge (5) folgende Congruenzen:

$$\alpha' + \mathfrak{A}' \equiv \alpha'' + \mathfrak{A}' (\text{mod. } a'),$$
$$\beta' + \mathfrak{B}' \equiv \beta'' + \mathfrak{B}' (\text{mod. } b'),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\lambda' + \mathfrak{L}' \equiv \lambda'' + \mathfrak{L}' (\text{mod. } l')$$

und hieraus:

$$\alpha' = \alpha'',$$
$$\beta' = \beta'',$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\lambda' = \lambda'',$$

was der Voraussetzung wiederspricht. Wir erhalten daher folgenden Satz:

Bestimmt man in der Congruenz (1) für jede Combination $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots . \mathfrak{L}$ der Exponenten, welche den Ungleichheiten

$$a' > \mathfrak{A} \geqq 0,$$

$$b' > \mathfrak{B} \geqq 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$l' > \mathfrak{L} \geqq 0$$

genügen, die Zahl $X$ so, dass sie ein Glied der Reihe 1, 2, 3, ....

.... $M-1$ wird, so erhält man eine jede der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_f$ gleich oft, nehmlich $n$mal, wo somit $n$ durch die Gleichung

$$a'b'c' \ldots l' = nf$$

bestimmt wird.

## §. 6.

Sind die Exponenten $a', b', c', \ldots l'$ je zwei relative Primzahlen, so ist $n=1$. Denn es sei

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda \equiv 1 (\text{mod. } M),$$

so folgt, wenn man zur Pontenz $b'c'd' \ldots l'$ erhebt,

$$a^{\alpha . b'c'd' \ldots l'} \equiv 1 (\text{mod. } M).$$

Da nun $a$ zum Exponenten $a'$ gehört, der zu $b'c'd' \ldots l'$ relative Primzahl ist, so folgt hieraus (Disq arith. art. 48.):

$$\alpha \equiv 0 (\text{mod. } a').$$

Ebenso findet man:

$$\beta \equiv 0 (\text{mod. } b'),$$
$$\gamma \equiv 0 (\text{mod. } c'),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda \equiv 0 (\text{mod. } l');$$

so dass sich $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$ als einzige Auflösung der Congruenz (2) im vorigen Paragraphen ergiebt. Man zieht aus dem vorigen Paragraphen auch noch leicht die nachstehende Folgerung:

Lässt die Congruenz (2) nur die einzige Auflösung $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ $\ldots = \lambda = 0$ zu, so ist die Anzahl der incongruenten Zahlen der Gruppe $[a, b, c, \ldots l]$ gleich $a'b'c' \ldots l'$.

## §. 7.

Es sei $\mathfrak{a}$ der kleinste Exponent, die Null ausgenommen, von der Eigenschaft, dass $a^\mathfrak{a}$ einem Produkte von Potenzen aller folgenden Zahlen $b, c, d, \ldots l$ congruent wird, was wir, ohne die Exponenten anzudeuten, auf folgende Weise ausdrücken wollen:

$$a^\mathfrak{a} \equiv (b, c, d, \ldots l) (\text{mod. } M).$$

Damit aber hieraus keine Verwechselung entstehen kann, so sollen zwei Ausdrücke $(b, c, d, \ldots l)$, deren entsprechende Ex-

ponenten nicht alle übereinstimmen, durch Accente unterschieden werden. Eine ähnliche Bedeutung wie $\mathfrak{a}$ sollen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots \mathfrak{l}$ haben, so dass:

$$\left.\begin{array}{l} a^{\mathfrak{a}} \equiv (b, c, d, \ldots l \\ b^{\mathfrak{b}} \equiv (c, d, \ldots l) \\ c^{\mathfrak{c}} \equiv (d, e, \ldots l) \\ \ldots\ldots\ldots \\ k^{\mathfrak{k}} \equiv (l) \\ l^{\mathfrak{l}} \equiv 1 \end{array}\right\} \text{(mod. } M\text{)}.$$

Da der letzten Zahl $l$ gleichsam die 1 folgt, so ist $\mathfrak{l} = l'$ der Exponent, zu welchem $l$ gehört.

## §. 8.

Bedeutet $\mu = \varphi(M)$ die Anzahl derjenigen Zahlen, welche $< M$ sind und mit dem Modul keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist nach dem allgemeinen Fermatschen Satze:

$$\left.\begin{array}{l} a^{\mu} \equiv b^{\mu} c^{\mu} d^{\mu} \ldots l^{\mu} \\ b^{\mu} \equiv c^{\mu} d^{\mu} \ldots l^{\mu} \\ c^{\mu} \equiv d^{\mu} e^{\mu} \ldots l^{\mu} \\ \ldots\ldots\ldots \\ k^{\mu} \equiv l^{\mu} \\ l^{\mu} \equiv 1 \end{array}\right\} \text{(mod. } M\text{)},$$

woraus hervorgeht, dass die Exponenten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{l}$ in der Reihe $1, 2, 3, \ldots \mu$ enthalten sind.

## §. 9.

Dieses vorausgesetzt, kann man jeden Ausdruck

$$(a, b, c, \ldots l) \text{ (mod. } M\text{)}$$

auf die Form bringen:

$$a^{\mathfrak{A}'} b^{\mathfrak{B}'} c^{\mathfrak{C}'} \ldots l^{\mathfrak{L}'},$$

wo die Exponenten $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \ldots \mathfrak{L}'$ die Ungleichheiten

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{A}' \geqq 0, \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{B}' \geqq 0, \quad \mathfrak{c} > \mathfrak{C}' \geqq 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{l} > \mathfrak{L}' \geqq 0$$

erfüllen. Ist nehmlich in dem Ausdrucke $(a, b, c, \ldots. l)$ der Exponent von $a$ gleich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} > \mathfrak{a}$, so kann man setzen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}x + \mathfrak{A}',$$

wo jetzt für $\mathfrak{A}'$ die erste der vorstehenden Ungleichheiten Statt findet. Man erhält daher

$$a^{\mathfrak{A}} = a^{\mathfrak{A}'}(a^{\mathfrak{a}})^x.$$

Da nun der Voraussetzung nach $a^{\mathfrak{a}}$ congruent ist einem Produkte von Potenzen aller folgenden Zahlen $b, c, d, \ldots. l$, so erhält man auch:

$$(a, b, c, \ldots. l) \equiv a^{\mathfrak{A}'}(b, c, d, \ldots. l) (\text{mod.}\, M).$$

Ist nun der Exponent von $b$ in $(b, c, d, \ldots. l)$ gleich $\mathfrak{B}$, so zeigt man auf dieselbe Weise, dass

$$(b, c, d, \ldots. l) = b^{\mathfrak{B}'}(c, d, \ldots. l)$$

gesetzt werden kann. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhält man daher folgendes System von Congruenzen und Ungleichheiten:

$$\left.\begin{array}{r} (a, b, c, \ldots\ldots l) \equiv a^{\mathfrak{A}'}(b, c, \ldots\ldots\ldots l) \\ (b, c, \ldots\ldots l) \equiv b^{\mathfrak{B}'}(c, d, \ldots\ldots\ldots l) \\ (c, d, \ldots l) \equiv c^{\mathfrak{C}'}(d, e, \ldots\ldots\ldots l) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (k, l) \equiv k^{\mathfrak{K}'}(l) \\ (l) \equiv l^{\mathfrak{L}'} \end{array}\right\} (\text{mod.}\, M) \quad \begin{array}{l} \mathfrak{a} > \mathfrak{A}' \geqq 0, \\ \mathfrak{b} > \mathfrak{B}' \geqq 0, \\ \mathfrak{c} > \mathfrak{C}' \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{k} > \mathfrak{K}' \geqq 0, \\ \mathfrak{l} > \mathfrak{L}' \geqq 0 \end{array}$$

und hieraus

$$(a, b, c, \ldots. l) \equiv a^{\mathfrak{A}'} b^{\mathfrak{B}'} c^{\mathfrak{C}'} \ldots. l^{\mathfrak{L}'} (\text{mod.}\, M),$$

wo die Exponenten der rechten Seite die gegebenen Ungleichheiten erfüllen.

## §. 10.

In einer Congruenz von der Form

$$(a, b, c, \ldots. l) . x \equiv (a, b, c, \ldots. l)' (\text{mod.}\, M)$$

kann man, wie in §. 5. schon gezeigt wurde, es immer so einrichten, dass die Exponenten auf der rechten Seite nicht grösser

sind als die entsprechenden der Linken, so dass aus obiger Congruenz unmittelbar eine andere von folgender Form:

$$x \equiv (a, b, c, \ldots . l)'' (\text{mod. } M)$$

abgeleitet werden kann.

## §. 11.

Dieses vorausgesetzt, sei wie in §. 7. $\mathfrak{a}$ der kleinste Exponent mit Ausnahme der Null, für welchen

$$a^{\mathfrak{a}} \equiv (b, c, d, \ldots . l) (\text{mod. } M)$$

gesetzt werden kann. Ist dann auch für den Exponenten $x > 0$

$$a^x \equiv (b, c, d, \ldots . l)' (\text{mod. } M),$$

so ist $x$ ein Vielfaches von $\mathfrak{a}$.

Da nehmlich in Folge unserer Annahme $x > \mathfrak{a}$ sein muss, so setze man

$$x = t\mathfrak{a} + x',$$

wo jetzt $x' < \mathfrak{a}$ wird, so erhält man

$$a^x = a^{x'}(a^{\mathfrak{a}})^t$$

oder

$$a^x \equiv a^{x'}(b, c, d, \ldots . l)^t \equiv a^{x'}(b, c, d, \ldots . l)''.$$

Da aber auch vermöge der Voraussetzung

$$a^x \equiv (b, c, d, \ldots . l)',$$

so folgt

$$a^{x'}(b, c, d, \ldots . l)'' \equiv (b, c, d, \ldots . l)' (\text{mod. } M)$$

und hieraus nach §. 10.

$$a^{x'} \equiv (b, c, d, \ldots . l)'''.$$

Nun ist $x' < \mathfrak{a}$, also diese letztere Congruenz nur möglich für $x' = 0$. Es wird daher $x = t\mathfrak{a}$, d. h. ein Vielfaches von $\mathfrak{a}$.

Zusatz. Da

$$a^{a'} \equiv b^{b'} c^{c'} \ldots . l^{l'} (\text{mod. } M),$$

so ist nach dem Vorigen $a'$ ein Vielfaches von $\mathfrak{a}$. Ebenso zeigt man dass $b', c', \ldots . l'$ Vielfache von $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots . \mathfrak{l}$ sind.

## §. 12.

Zwei Ausdrücke von der Form:

$$a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots . l^{\mathfrak{L}},$$

$$a^{\mathfrak{A}'} b^{\mathfrak{B}'} c^{\mathfrak{C}'} \ldots . l^{\mathfrak{L}'},$$

in welchen die Exponenten folgende Ungleichheiten:

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{A} \geqq 0, \quad \mathfrak{a} > \mathfrak{A}' \geqq 0,$$

$$\mathfrak{b} > \mathfrak{B} \geqq 0, \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{B}' \geqq 0,$$

$$\ldots \ldots \quad \ldots \ldots$$

$$\mathfrak{l} > \mathfrak{L} \geqq 0, \quad \mathfrak{l} > \mathfrak{L}' \geqq 0$$

erfüllen, sind nach dem Modul $M$ nur dann congruent, wenn gleichzeitig

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}',$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}',$$
$$\ldots \ldots$$
$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}',$$

d. h. die zwei Combinationen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ....$\mathfrak{L}$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, ....$\mathfrak{L}'$ übereinstimmen.

Man nehme an, es seien obige Ausdrücke congruent, so erhält man

$$a^{\mathfrak{A}}(b, c, d, \ldots . l) \equiv a^{\mathfrak{A}'}(b, c, d, \ldots . l)' (\text{mod.} M)$$

und schliesst daraus $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. Denn wäre dieses nicht der Fall, so darf man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}'$ voraussetzen, und erhält nach §. 10.:

$$a^{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'} \equiv (b, c, d, \ldots . l)'' (\text{mod.} M),$$

was der Voraussetzung widerspricht, denn es ist

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' > 0,$$

da doch $\mathfrak{a}$ der kleinste Exponent ist, für welchen

$$a^{\mathfrak{a}} \equiv (b, c, d, \ldots . l)$$

gesetzt werden kann. Da nun $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, so geht die Congruenz:

$$a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \dots l^{\mathfrak{L}} \equiv a^{\mathfrak{A}'} b^{\mathfrak{B}'} c^{\mathfrak{C}'} \dots l^{\mathfrak{L}'} (\mathrm{mod.}\, M)$$

in die einfachere

$$b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \dots l^{\mathfrak{L}} \equiv b^{\mathfrak{B}'} c^{\mathfrak{C}'} \dots l^{\mathfrak{L}'} (\mathrm{mod.}\, M)$$

über, woraus auf dieselbe Weise $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ abgeleitet wird, und fährt man so fort, so erhält man endlich:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}',\ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}',\ \mathfrak{C} = \mathfrak{C}',\ \dots \mathfrak{L} = \mathfrak{L}',$$

d. h. die zwei Combinationen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots \mathfrak{L}$; $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \dots \mathfrak{L}'$ sind identisch.

## §. 13.

Aus §. 9. und §. 12. folgt nun:

Die Anzahl der nach dem Modul $M$ incongruenten Zahlen der Gruppe $[a, b, c, \dots l]$ ist gleich $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \dots \mathfrak{l} = f$. Da $\mathfrak{l} = l'$ so ist $f$ ein Vielfaches des Exponenten, zu welchem die Zahl $l$ gehört. Weil man aber die Buchstaben $a, b, c, \dots l$ beliebig anordnen kann, so ist $f$ theilbar durch sämmtliche Exponenten $a', b', c', \dots l'$. Da man ferner (siehe §. 3., 3)), ohne der Allgemeinheit zu schaden, annehmen darf, dass $a, b, c, \dots l$, abgesehen von der Ordnung, mit den Zahlen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots x_f$$

übereinstimmen, so ist $f$ ein Vielfaches des höchsten Exponenten $m$, der zu der Gruppe $[a, b, c, \dots l]$ gehört (§. 4.).

## §. 14.

Sind $a, b, c, \dots l$ die sämmtlichen Zahlen $< M$, welche mit $M$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist $f = \varphi(M) = \mu$; fehlen aber noch die Zahlen $p, q, r, \dots x, y, z$, so betrachte man die Gruppe $[p, q, \dots y, z, a, b, \dots l]$. Haben alsdann $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \dots \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots \mathfrak{l}$ die frühere Bedeutung, so erhält man:

$$\mathfrak{p}.\mathfrak{q} \dots \mathfrak{y}.\mathfrak{z}.\mathfrak{a}.\mathfrak{b} \dots \mathfrak{l} = \varphi(M) = \mu.$$

Da ferner

$$\mathfrak{a}.\mathfrak{b}.\mathfrak{c} \dots \mathfrak{l} = f,$$

so schliesst man daraus:

$$\mathfrak{p}.\mathfrak{q} \dots \mathfrak{y}.\mathfrak{z}.f = \mu.$$

Die Anzahl der incongruenten Zahlen einer Gruppe ist daher im-

mer ein Theiler von $\varphi(M) = \mu$. Der Beweis lässt sich auch auf eine ähnliche Weise führen wie Art. 49. der Disq. arith.; der dort vorgetragene Satz ist ein specieller Fall dieses allgemeineren.

§. 15.

Legt man in der Congruenz:

$$X \equiv a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} \ldots . l^{\mathfrak{L}} \pmod{M}$$

den Exponenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ....$\mathfrak{L}$ alle Combinationen von Werthen bei, welche den Ungleichheiten

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{A} \geqq 0,$$

$$\mathfrak{b} > \mathfrak{B} \geqq 0,$$

$$\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{l} > \mathfrak{L} \geqq 0$$

genügen, so sind die entsprechenden $X$ alle incongruent (siehe §. 12.) und stimmen, abgesehen von der Ordnung, mit den Zahlen $x_1$, $x_2$, $x_3$, ....$x_f$ überein, so dass man die Congruenz

$$x_1 . x_2 . x_3 \ldots . x_f \equiv \Pi a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots . l^{\mathfrak{L}} \pmod{M}$$

erhält. Um in dem ausgeführten Produkte $\Pi$ den Exponenten von $a$ zu finden, bemerke man, dass in den $f$ Faktoren des Produkts $\Pi$ der Exponent $\mathfrak{A}$ jeden Werth der Reihe: 0, 1, 2, 3, ....$\mathfrak{a}-1$ so oft annimmt, als $\frac{f}{\mathfrak{a}}$ Einheiten enthält. Jener Exponent ist daher

$$\frac{f}{\mathfrak{a}}(1+2+3+\ldots.+\mathfrak{a}-1) = \frac{\mathfrak{a}-1}{2}.f.$$

Ebenso findet man die Exponenten von $b$, $c$, $d$, ....$l$ in dem ausgeführten Produkte $\Pi$ der Reihe nach gleich

$$\frac{\mathfrak{b}-1}{2}.f, \frac{\mathfrak{c}-1}{2}.f, \ldots . \frac{\mathfrak{l}-1}{2}.f,$$

so dass die obige Congruenz jetzt in die folgende:

$$x_1 x_2 x_3 \ldots . x_f \equiv a^{\frac{\mathfrak{a}-1}{2}.f} b^{\frac{\mathfrak{b}-1}{2}.f} \ldots . l^{\frac{\mathfrak{l}-1}{2}.f}$$

übergeht, woraus man erhält:

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots . x_f)^2 \equiv \{a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots . l^{\lambda-1}\}^f.$$

Da nun $f$ durch die Exponenten $\alpha', \beta', \gamma', \ldots . \lambda'$ theilbar ist, so kann man dafür einfacher

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots . x_f)^2 \equiv 1 (\text{mod. } M)$$

schreiben. Ist $f$ theilbar durch $2\alpha', 2\beta', 2\gamma', \ldots . 2\lambda'$, so erhält man

$$x_1 . x . x_3 \ldots . x_f \equiv 1 (\text{mod. } M).$$

Dieses wäre der verallgemeinerte Wilson'sche Satz.

## §. 16.

Sind $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots . \mathfrak{l}'$ die kleinsten Exponenten, die Null ausgenommen, für welche man

$$\left.\begin{array}{l} a^{\mathfrak{a}'} \equiv (b, c, d, \ldots . l) \\ b^{\mathfrak{b}'} \equiv (a, c, d, \ldots . l) \\ c^{\mathfrak{c}'} \equiv (a, b, d, \ldots . l) \\ \ldots\ldots\ldots \\ l^{\mathfrak{l}'} \equiv (a, b, c, \ldots . k) \end{array}\right\} (\text{mod. } M)$$

setzen kann, und schreibt man die Congruenz

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots . l^\lambda \equiv 1 (\text{mod. } M)$$

auf folgende Weisen:

$$a^\alpha \equiv b^{\mathfrak{b}'-\beta} c^{\mathfrak{c}'-\gamma} \ldots . l^{\mathfrak{l}'-\lambda},$$

$$b^\beta \equiv a^{\mathfrak{a}'-\alpha} c^{\mathfrak{c}'-\gamma} \ldots . l^{\mathfrak{l}'-\lambda},$$

$$c^\gamma \equiv a^{\mathfrak{a}'-\alpha} b^{\mathfrak{b}'-\beta} \ldots . l^{\mathfrak{l}'-\lambda},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so ergibt sich aus §. 11., dass $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda$ Vielfache von $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots . \mathfrak{l}'$ sind. Es ist aber insbesondere $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$.

## §. 17.

Bemerkt man ferner, dass die Congruenzen in §. 7., nehmlich

$$b^{\mathfrak{b}} \equiv (c, d, \ldots . l),$$
$$c^{\mathfrak{c}} \equiv (d, e, \ldots . l),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

auch auf folgende Weise geschrieben werden können:

$$b^{\mathfrak{b}} \equiv a^0 b^0 (c, d, \ldots\ldots l) \equiv (a, b, c, \ldots. l)',$$

$$c^{\mathfrak{c}} \equiv a^0 b^0 c^0 (d, e, \ldots. l) \equiv (a, b, c, \ldots. l)'',$$

$$d^{\mathfrak{d}} \equiv a^0 b^0 c^0 d^0 (e, \ldots. l) \equiv (a, b, c, \ldots. l)''',$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

so schliesst man aus §. 16. und §. 11., dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots. \mathfrak{l}$ Vielfache von $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots. \mathfrak{l}'$ sind.

## §. 18.

Sollen die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$ der Congruenz

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots. l^\lambda \equiv 1 (\text{mod. } M)$$

genügen, so kann man dem Exponenten $\alpha$ einen beliebigen Werth $\alpha'$, der in der Reihe

$$0, \mathfrak{a}, 2\mathfrak{a}, 3\mathfrak{a}, \ldots. \left(\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} - 1\right)\mathfrak{a}$$

enthalten ist, beilegen. Es gibt alsdann $\frac{n\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'}$ verschiedene Combinationen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$, worin $\alpha$ den gegebenen Werth $\alpha'$ hat. Denn zur Bestimmung von $\beta, \gamma, \ldots. \lambda$ erhält man:

$$b^\beta c^\gamma \ldots. l^\lambda \equiv a^{\mathfrak{a}' - \alpha'} (\text{mod. } M).$$

Da nun $\mathfrak{a}' - \alpha'$ durch $\mathfrak{a}$ theilbar ist (siehe §. 11. Zusatz), so ergibt sich aus

$$a^{\mathfrak{a}} \equiv (b, c, d, \ldots. l)$$

die Möglichkeit obiger Congruenz. Der Ausdruck $b^\beta c^\gamma \ldots. l^\lambda$ kann nun (siehe §. 5. und §. 13.) auf $\frac{\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}' \ldots. \mathfrak{l}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{b} \ldots. \mathfrak{l}} = \frac{n\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'}$ verschiedene Weisen $\equiv 1 (\text{mod. } M)$, also auf ebenso viele Weisen $\equiv a^{\mathfrak{a}' - \alpha'}$ werden.

# II.

## Eigenschaften gewisser endlichen Reihen.

Nachdem wir in den vorhergehenden Paragraphen diejenigen einfachsten Sätze aus der Theorie der Potenzreste erläutert haben, welche zur Behandlung der Aufgabe nothwendig sind, müssen

noch, bevor wir zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen können, gewisse endliche Reihen untersucht werden, was in den folgenden Paragraphen geschehen soll.

## §. 19.

Es seien $A, B, C, \ldots. L$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen, ferner $m$ ein Vielfaches sämmtlicher Exponenten $a', b', c', \ldots. l'$ der Gruppe $[a, b, c, \ldots. l]$, und es soll die Summe

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\mathfrak{A}-\frac{m}{b'}B\mathfrak{B}-\ldots.-\frac{m}{l'}L\mathfrak{L}} = S_x$$

bestimmt werden, in welcher $P$ eine Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$ ist, und wo die Summation über alle Combinationen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots. \mathfrak{L}$ auszudehnen ist, welche den Ungleichheiten

$$a' > \mathfrak{A} \geqq 0,$$

$$b' > \mathfrak{B} \geqq 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$l' > \mathfrak{L} \geqq 0$$

und der Congruenz

$$a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} \ldots. l^{\mathfrak{L}} \equiv x \pmod{M}$$

genügen. Wir setzen voraus, dass es mehrere Combinationen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots. \mathfrak{L}$ gebe, welche diese Congruenz erfüllen; denn sonst würde sich obige Summe auf ein einziges Glied reduciren.

1) Ohne der Allgemeinheit zu schaden, darf angenommen werden, dass $P$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$ ist, und dass die Coefficienten $A, B, C, \ldots. L$ den Ungleichheiten:

$$a' > A \geqq 0,$$

$$b' > B \geqq 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$l' > L \geqq 0$$

genügen. Denn es sei $P'$ eine primitive Wurzel obiger Gleichung, so kann man auf einzige Weise $P = P'^{\pi}$ setzen. Man bestimme nun mit Hilfe der Congruenzen

$$A' \equiv \pi A \pmod{a'},$$
$$B' \equiv \pi B \pmod{b'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L' \equiv \pi L \pmod{l'}$$

die neuen Coefficienten $A'$, $B'$, $C'$, .... $L'$ so, dass obige Ungleichheiten erfüllt sind, so verwandelt sich unsere Summe, wenn man bemerkt, dass im Exponenten des allgemeinen Gliedes jedes Vielfache von $m$ weggelassen werden kann, in die ähnliche Summe:

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A'\mathfrak{A}-\frac{m}{b'}B'\mathfrak{B}-\ldots-\frac{m}{l'}L'\mathfrak{L}},$$

in welcher die verlangten Bedingungen erfüllt sind.

2) Ist jetzt ferner $m = tm'$, wo auch die Zahl $m'$ durch $a'$, $b'$, $c'$, .... $l'$ theilbar ist, so kann man die letztere Summe noch in eine ganz ähnliche verwandeln, in welcher statt $m$ die Zahl $m'$ steht. Setzt man nehmlich $P^t = P_0'$, so ist $P_0'$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{m'} - 1 = 0$, und obige Summe verwandelt sich in die folgende:

$$\Sigma P_0'^{-\frac{m'}{a'}A'\mathfrak{A}-\frac{m'}{b'}B'\mathfrak{B}-\ldots-\frac{m'}{l'}L'\mathfrak{L}}.$$

Man darf daher insbesondere $m'$ als die kleinste Zahl voraussetzen, welche durch die Exponenten $a'$, $b'$, $c'$, .... $l'$ theilbar ist. Vorerst sollen aber die Voraussetzungen in (1) und (2) noch nicht gemacht werden.

Es sei $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, .... $\mathfrak{L}'$ irgend eine der Combinationen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, .... $\mathfrak{L}$, für welche

$$a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots l^{\mathfrak{L}} \equiv x \pmod{M}$$

und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\lambda$ die allgemeinste Combination, welche der Congruenz

$$a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda} \equiv 1 \pmod{M}$$

genügt, so kann man nach §. 5. setzen:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' + \alpha \pmod{a'},$$
$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}' + \beta \pmod{b'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}' + \lambda \pmod{l'},$$

wodurch unsere Summe $S_x$ übergeht in:

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A(\mathfrak{A}'+\alpha)-\frac{m}{b'}B(\mathfrak{B}'+\beta)-\ldots-\frac{m}{l'}L(\mathfrak{L}'+\lambda)},$$

wo sich die Summation jetzt auf alle verschiedenen Combinationen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\lambda$ bezieht, welche den Ungleichheiten

$$a' > \alpha \geqq 0,$$

$$b' > \beta \geqq 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$l' > \lambda \geqq 0$$

und der Congruenz

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots . l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$$

Genüge leisten. Man kann in dieser Summe den konstanten Faktor

$$p_x' = P^{-\frac{m}{a'} A\mathfrak{A}' - \frac{m}{b'} B\mathfrak{B}' - \ldots . - \frac{m}{l'} L\mathfrak{L}'},$$

welcher ein Glied der Summe $S_x$ ist, vor das Summationszeichen setzen, und erhält alsdann:

$$S_x = p_x' S_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo analog mit der früheren Bezeichnung

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'} A\alpha - \frac{m}{b'} B\beta - \ldots . - \frac{m}{l'} L\lambda} = S_1$$

gesetzt wurde. Weil aber jedes Glied $p_x'$ der Summe $S_x$ zu dieser Umformung gebraucht werden kann, und da $S_1$ von dem besonderen Werthe dieses Gliedes durchaus unabhängig ist, so erhält man, wenn $p_x'$, $p_x''$, $p_x'''$, .... $p_x^{(n)}$ die einzelnen Glieder der Summe $S_x$ bedeuten:

$$S_x = p_x' S_1 = p_x'' S_1 = p_x''' S_1 = \ldots . = p_x^{(n)} S_1 . \;.\; . \quad (2)$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $S_1$ von Null verschieden ist oder nicht.

Es sei 1) $S_1$ nicht gleich Null. Dieses findet z. B. Statt, wenn die Coefficienten $A$, $B$, $C$, .... $L$ sämmtlich gleich Null gesetzt werden. Dann ergibt sich aus (2) sofort: $p_x' = p_x'' = p_x''' = \ldots .$ $\ldots . = p_x^{(n)}$, d. h. es sind alle Glieder der Summe $S_x$ einander gleich. Bezeichnet daher $p_x$ irgend eines dieser Glieder, so erhält man, da die Anzahl derselben gleich $n$ ist,

$$S_x = n . p_x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und hieraus in Verbindung mit (1) zieht man den Schluss, dass

der Werth von $S_1$ von der Grösse der Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ unabhängig ist. Es ist nehmlich:

$$S_1 = n. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Ist 2) $S_1 = 0$, so kann aus den Gleichungen (2) zwar nicht mehr die Gleichheit der Glieder $p_x', p_x'', \ldots p_x^{(n)}$ geschlossen werden, wohl aber

$$S_x = 0.$$

## §. 20.

Das im vorigen Paragraphen gefundene Resultat, dass die Summe $S_1$ den Werth 0 oder $n$ hat, lässt sich allgemeiner auf folgende Weise ausdrücken: Sind

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha', & \beta', & \gamma', \ldots & \lambda', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', \ldots & \lambda'', \\ \alpha''', & \beta''', & \gamma''', \ldots & \lambda''', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \alpha^{(n)}, & \beta^{(n)}, & \gamma^{(n)}, \ldots & \lambda^{(n)} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

sämmtliche incongruente Systeme von je $\nu$ Zahlen, welche gewissen Relationen genügen, und haben die letztern, welche im Uebrigen willkührlich bleiben, die Eigenschaft, dass, sobald folgende Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv N'\alpha' + N''\alpha'' + \ldots + N^{(n)}\alpha^{(n)} \pmod{a'}, \\ \beta \equiv N'\beta' + N''\beta'' + \ldots + N^{(n)}\beta^{(n)} \pmod{b'}, \\ \gamma \equiv N'\gamma' + N''\gamma'' + \ldots + N^{(n)}\gamma^{(n)} \pmod{c'}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \lambda \equiv N'\lambda' + N''\lambda'' + \ldots + N^{(n)}\lambda^{(n)} \pmod{l'} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Statt finden (in welchen $a', b', c', \ldots l'$ konstante Moduln, ferner $N', N'', \ldots N^{(n)}$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen, bedeuten), auch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ unter den Systemen (1) vorkommt: so wird die Summe

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda} = S_1,$$

welche über alle incongruenten Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ in (1) auszudehnen ist, und wo im Uebrigen dieselben Voraussetzungen wie im vorigen Paragraphen gelten, entweder Null oder $n$. Unter den

Systemen (1) kommt offenbar auch das System 0, 0, 0, .... 0 vor, wie man ersieht, wenn man $N' = N'' = .... = N^{(n)} = 0$ setzt. Zwei Systeme von Zahlen, z. B.

$$\alpha', \quad \beta', \quad \gamma', \ldots. \lambda',$$
$$\alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma'', \ldots. \lambda'',$$

nennen wir aber congruent, wenn folgende Congruenzen:

$$\alpha' \equiv \alpha'' (\text{mod. } a'),$$
$$\beta' \equiv \beta'' (\text{mod. } b'),$$
$$\gamma' \equiv \gamma'' (\text{mod. } c'),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\lambda' \equiv \lambda'' (\text{mod. } l')$$

Statt finden. Zwei solche Systeme sind als gleichbedeutend zu betrachten, und man findet leicht, dass für dieselben der Werth des allgemeinen Gliedes der Summe $S_1$ ungeändert bleibt.

Um den Satz zu beweisen, sei

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \ldots. \lambda_0$$

ein bestimmtes der $n$ Systeme in (1), so sind in Folge der Eigenschaft der letztern

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' + \alpha_0, \quad \beta' + \beta_0, \quad \gamma' + \gamma_0, \ldots. \lambda' + \lambda_0, \\ \alpha'' + \alpha_0, \quad \beta'' + \beta_0, \quad \gamma'' + \gamma_0, \ldots. \lambda'' + \lambda_0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha^{(n)} + \alpha_0, \quad \beta^{(n)} + \beta_0, \quad \gamma^{(n)} + \gamma_0, \ldots. \lambda^{(n)} + \lambda_0 \end{array}\right\} \quad .. \quad (3)$$

$n$ incongruente Systeme von Zahlen, welche dieselben Relationen erfüllen; da es aber der Voraussetzung nach nur $n$ solche Systeme in (1) gibt, so müssen dieselben, abgesehen von der Ordnung, mit den Systemen (3) übereinstimmen. Man darf daher in der Summe $S_1$ die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$ durch $\alpha + \alpha_0$, $\beta + \beta_0, \ldots.$ .... $\lambda + \lambda_0$ ersetzen und erhält:

$$S_1 = \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A(\alpha+\alpha_0) - \frac{m}{b'}B(\beta+\beta_0) - \ldots. - \frac{m}{l'}L(\lambda+\lambda_0)}.$$

Setzt man den konstanten Faktor

$$P^{-\frac{m}{a'}A\alpha_0 - \frac{m}{b'}B\beta_0 - \ldots. - \frac{m}{l'}L\lambda_0} = p_0,$$

welcher ein Glied obiger Summe ist, vor das Summationszeichen heraus, so geht obige Gleichung über in:

$$S_1 = p_0 S_1.$$

Wenn also $S_1$ nicht gleich Null ist, so folgt aus der letzten Gleichung $p_0=1$, d. h. es sind alle Glieder von $S_1$ gleich 1, und somit $n$ der Werth dieser Summe.

## §. 21.

Um in die Natur einer solchen Summe $S_1$ noch näher einzudringen, betrachten wir den Exponenten des allgemeinen Gliedes, nehmlich:

$$E\equiv-\frac{m}{a'}A\alpha-\frac{m}{b'}B\beta-\frac{m}{c'}C\gamma-\ldots-\frac{m}{l'}L\lambda\,(\text{mod.}\,m)$$

etwas näher.

Findet 1) für jedes System $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ in (1) die Congruenz $E\equiv0$ (mod. $m$) Statt, so ist $S_1=n$. Ist aber 2) nicht für jedes System $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ in (1) $E\equiv0$ (mod. $m$), so sei $k'$ die kleinste Zahl in der Reihe $1, 2, 3, \ldots m-1$, welcher $E$ nach dem Modul $m$ congruent werden kann, also:

$$k'\equiv-\frac{m}{a'}A\alpha'-\frac{m}{b'}B\beta'-\ldots-\frac{m}{l'}L\lambda'\,(\text{mod.}\,m).$$

Findet dann für eine andere Zahl obiger Reihe die Congruenz

$$k\equiv-\frac{m}{a'}A\alpha-\frac{m}{b'}B\beta-\ldots-\frac{m}{l'}L\lambda\,(\text{mod.}\,m)$$

Statt, so ist $k$ nothwendig ein Vielfaches von $k'$. Denn es ist offenbar $k>k'$; setzt man daher $k=tk'+k''$, wo jetzt $k''<k'$ wird, so leitet man aus den zwei letzten Congruenzen sogleich die folgende ab:

$$k''\equiv-\frac{m}{a'}A(\alpha-t\alpha')-\frac{m}{b'}B(\beta-t\beta')-\ldots-\frac{m}{l'}L(\lambda-t\lambda')\,(\text{mod.}\,m).$$

Da nun, in Folge der Voraussetzung über die Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ auch $\alpha-t\alpha'$, $\beta-t\beta'$, $\gamma-t\gamma'$, $\ldots \lambda-t\lambda'$ einem solchen congruent ist, so schliesst die letztere Congruenz einen Widerspruch in sich, wenn nicht $k''=0$, also $k=tk'$ angenommen wird.

Die Zahl $k'$ ist nothwendig ein Theiler von $m$; weil nehmlich $m>k'$ ist, so kann man setzen $m=tk'-k''$ oder $k''\equiv tk'$ (mod. $m$), wo $k''$ ein Glied der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots k'-1$ ist. Multiplicirt man daher die Congruenz

$$k'\equiv-\frac{m}{a'}A\alpha'-\frac{m}{b'}B\beta'-\ldots-\frac{m}{l'}L\lambda'\,(\text{mod.}\,m)$$

mit $t$, so folgt:

$$k'' \equiv -\frac{m}{a'}A(t\alpha') - \frac{m}{b'}B(t\beta') - \ldots - \frac{m}{l'}L(t\lambda') \pmod{m};$$

da aber $t\alpha'$, $t\beta'$, .... $t\lambda'$ einem Systeme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\lambda$ in (1) congruent ist, so schliesst man wie vorhin $k''=0$, also $m=tk'$. Aus dem Vorhergehenden ersieht man nun, dass der Exponent $E$ der Summe $S_1$ jeder Zahl der Reihe

$$0,\ k',\ 2k',\ 3k', \ldots \left(\frac{m}{k'}-1\right)k'$$

und nur solchen nach dem Modul $m$ congruent werden kann. Wüsste man also, für wie viele Systeme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\lambda$ in (1) der Exponent $E$ einer jeden Zahl obiger Reihe congruent wird, so liesse sich die Summe $S_1$ angeben. Es werde also für folgende $p$ incongruente Systeme in (1)

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \ldots & \lambda_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, \ldots & \lambda_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, \ldots & \lambda_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_p, & \beta_p, & \gamma_p, \ldots & \lambda_p, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (4)$$

$$E \equiv tk' \pmod{m}.$$

Da aber aus den zwei Congruenzen

$$-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda \equiv tk',$$

$$-\frac{m}{a'}A\alpha_1 - \frac{m}{b'}B\beta_1 - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda_1 \equiv tk'$$

sogleich die nachstehende:

$$-\frac{m}{a'}A(\alpha-\alpha_1) - \frac{m}{b'}B(\beta-\beta_1) - \ldots - \frac{m}{l'}L(\lambda-\lambda_1) \equiv 0 \pmod{m}$$

sich ergibt, so sieht man, dass für folgende $p$ incongruente Systeme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\lambda$ in (1):

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha_1-\alpha_1, & \beta_1-\beta_1, & \gamma_1-\gamma_1, \ldots & \lambda_1-\lambda_1, \\ \alpha_2-\alpha_1, & \beta_2-\beta_1, & \gamma_2-\gamma_1, \ldots & \lambda_2-\lambda_1, \\ \alpha_3-\alpha_1, & \beta_3-\beta_1, & \gamma_3-\gamma_1, \ldots & \lambda_3-\lambda_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_p-\alpha_1, & \beta_p-\beta_1, & \gamma_p-\gamma_1, \ldots & \lambda_p-\lambda_1, \end{array}\right\} \ldots \quad (5)$$

$$E \equiv 0 \pmod{m}$$

wird. Nimmt man umgekehrt an, dass für die Systeme (4) $E \equiv 0 \pmod{m}$ werde und dass

$$tk' \equiv -\frac{m}{a'} A\alpha - \frac{m}{b'} B\beta - \ldots - \frac{m}{l'} L\lambda,$$

so folgt, dass nachstehende $p$ incongruente Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$:

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha+\alpha_1, & \beta+\beta_1, & \gamma+\gamma_1, \ldots & \lambda+\lambda_1, \\ \alpha+\alpha_2, & \beta+\beta_2, & \gamma+\gamma_2, \ldots & \lambda+\lambda_2, \\ \alpha+\alpha_3, & \beta+\beta_3, & \gamma+\gamma_3, \ldots & \lambda+\lambda_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha+\alpha_p, & \beta+\beta_p, & \gamma+\gamma_p, \ldots & \lambda+\lambda_p \end{array}\right\} \ldots \quad (6)$$

die Congruenz $E \equiv tk' \pmod{m}$ erfüllen. Hieraus schliesst man, dass die Congruenz $E \equiv tk' \pmod{m}$ für eben so viele Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ in (1) Statt findet, als die Congruenz $E \equiv 0 \pmod{m}$, und umgekehrt: Der Exponent $E$ wird daher für $p$ Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ in (1) jeder Zahl der Reihe $0, k', 2k', \ldots \left(\frac{m}{k'}-1\right)k'$ congruent, so dass man die Gleichung $n = \frac{m}{k'} \cdot p$ erhält. Die Summe $S_1$ nimmt nun folgende Gestalt an:

$$S_1 = p\left(1 + P^{k'} + P^{2k'} + \ldots + P^{\left(\frac{m}{k'}-1\right)k'}\right)$$

oder

$$S_1 = p \cdot \frac{P^m - 1}{P^{k'} - 1},$$

woraus man ersieht, dass $S_1$ im Allgemeinen verschwindet; ist aber $P^{k'} = 1$, also jedes Glied der Summe gleich 1, so erhält man:

$$S_1 = p \cdot \frac{m}{k'} = n.$$

## §. 22.

Um zu sehen, ob für eine bestimmte Combination der $A, B, C, \ldots L$ die Wurzel $P$ immer so gewählt werden kann, dass die Summe $S_1$ den Werth 0 hat, und auch so, dass $S_1 = n$ wird, sei $P'$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$, so sind sämmtliche Wurzeln derselben die Glieder der Reihe:

$$1, \quad P', \quad P'^2, \quad P'^3, \ldots P'^{m-1}.$$

Betrachtet man daher die Doppelsumme

$$\Sigma\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha-\frac{m}{b'}B\beta-\ldots-\frac{m}{l'}L\lambda},$$

wo die eine Summation den früheren Umfang hat, während die andere über alle Wurzeln der Gleichung $x^m-1=0$ auszudehnen ist, und vollzieht man zuerst die zweite Summation in Bezug auf ein bestimmtes System $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, so ist der Exponent $E$ des allgemeinen Gliedes der Summe als eine Constante zu betrachten; es ist daher dieser Theil der Doppelsumme:

$$1+P'^E+P'^{2E}+\ldots+P'^{(m-1)E}=\frac{P'^{mE}-1}{P'^E-1},$$

also im Allgemeinen gleich Null, wenn nicht etwa $E\equiv0 \pmod{m}$ ist, in welchem speciellen Falle man $m$ erhält. Findet daher die Congruenz $E\equiv0 \pmod{m}$ wie im vorigen Paragraphen für $p$ Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ Statt, so ist die Doppelsumme gleich $mp$. Da aber für jede Wurzel der Gleichung $x^m-1=0$ $S_1$ den Werth 0 oder $n$ hat, so gibt es $\frac{mp}{n}$, oder nach dem vorigen Paragraphen $k'$ solche Wurzeln, für welche $S_1$ den Werth $n$ hat (darunter befindet sich $P=1$), und $m-k'$ andere, für welche $S_1$ verschwindet. Den einzigen Fall ausgenommen, wo $k'=m$ und daher $p=n$ ist, gibt es also Wurzeln von der einen und der andern Art. Dasselbe ergibt sich auch unmittelbar aus der Gleichung

$$S_1=p\cdot\frac{P^m-1}{P^{k'}-1}$$

des §. 21. Die Wurzeln der Gleichung $x^m-1=0$, für welche $S_1=n$ wird, sind die $k'$ Wurzeln der Gleichung $P^{k'}-1=0$, für alle andern ist $S_1=0$.

## §. 23.

Nimmt man wie im vorigen Paragraphen das System der Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ als fest an, so ergibt sich aus der Gleichung

$$S_1=p\cdot\frac{P^m-1}{P^{k'}-1},$$

dass, wenn für $P$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m-1=0$ angenommen wird, die Summe $S_1$ unabhängig ist von $P$, d. h. für jede primitive Wurzel obiger Gleichung den Werth 0 hat, oder für jede den Werth $n$. Denn ist $t$ zu $m$ relative Primzahl und $P$ eine primitive Wurzel, so ist irgend eine solche von der Form $P^t$, also das entsprechende $S_1$, welches wir durch $S_1(t)$ bezeichnen wollen, gegeben durch die Gleichung:

$$S_1(t) = p \cdot \frac{P^{mt}-1}{P^{k't}-1}.$$

Denn $p$ und $k'$ sind von der Wahl der primitiven Wurzel durchaus unabhängig. Es ist daher $S_1(t)=0$, wenn $k't$, also $k'$ durch $m$ nicht theilbar ist, und im anderen Falle gleich $n$. Diese Bedingung enthält aber nichts, was von der Wahl der primitiven Wurzel abhängig wäre. Dasselbe lässt sich noch leichter auf folgende Weise einsehen.

Setzt man in $S_1$ statt $P$ die Wurzel $P^t$, wo $t$ zu $m$ relative Primzahl ist, so erhält man:

$$S_1(t) = \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A(\alpha t)-\frac{m}{b'}B(\beta t)-\ldots-\frac{m}{l'}L(\lambda t)}.$$

Sind nun, wie in §. 20.,

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha', & \beta', & \gamma', \ldots & \lambda', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', \ldots & \lambda'', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n)}, & \beta^{(n)}, & \gamma^{(n)}, \ldots & \lambda^{(n)} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

sämmtliche $n$ incongruente Systeme, von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, über welche die Summation auszudehnen ist, so sind auch

$$\left.\begin{array}{llll} t\alpha', & t\beta', & t\gamma', \ldots & t\lambda', \\ t\alpha'', & t\beta'', & t\gamma'', \ldots & t\lambda'', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t\alpha^{(n)}, & t\beta^{(n)}, & t\gamma^{(n)}, \ldots & t\lambda^{(n)} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

solchen Systemen congruent. Da nun $t$ zu $m'$, also auch zu $a', b', c', \ldots l'$ relative Primzahl ist, so sind die $n$ letzteren Systeme incongruent und müssen daher, abgesehen von der Ordnung, mit den ersteren übereinstimmen. Denn wären z. B. die zwei Systeme

$$\begin{array}{llll} t\alpha', & t\beta', & t\gamma', \ldots & t\lambda', \\ t\alpha'', & t\beta'', & t\gamma'', \ldots & t\lambda'' \end{array}$$

congruent, d. h.

$$\begin{array}{l} t\alpha' \equiv t\alpha'' \pmod{a'}, \\ t\beta' \equiv t\beta'' \pmod{b'}, \\ t\gamma' \equiv t\gamma'' \pmod{c'}, \\ \ldots\ldots \\ t\lambda' \equiv t\lambda'' \pmod{l'}, \end{array}$$

so würde hieraus, da $t$ zu $a', b', c', \ldots l'$ relative Primzahl ist, folgen:

$$\alpha' \equiv \alpha'' \pmod{a'},$$
$$\beta' \equiv \beta'' \pmod{b'},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\lambda' \equiv \lambda'' \pmod{l'},$$

d. h. die zwei Systeme $\alpha', \beta', \gamma', \ldots \lambda'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots \lambda''$ wären ebenfalls identisch, was der Voraussetzung widerspricht. Da nun das allgemeine Glied der Summe $S_1$ unverändert bleibt, wenn man das darin vorkommende System $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ durch ein congruentes ersetzt, so schliesst man hieraus, dass $S_1(t) = S_1$ ist, sobald $t$ mit $m$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat.

Denn diese zwei Summen unterscheiden sich nur durch die verschiedene Anordnung ihrer Glieder.

## III.

### Eigenschaften derjenigen Combinationen der Coefficienten $A, B, C, \ldots L$, für welche $S_1 = n$ ist.

§. 24.

Sind

$$\left.\begin{array}{llll} A', & B', & C', \ldots & L', \\ A'', & B'', & C'', \ldots & L'', \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{(y)}, & B^{(y)}, & C^{(y)}, \ldots & L^{(y)} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (8)$$

die sämmtlichen Combinationen von $A, B, C, \ldots L$, für welche $S_1$, bei Zugrundelegung einer bestimmten Wurzel $P$ der Gleichung $x^m - 1 = 0$, den Werth $n$ hat, so ist das allgemeinste System von dieser Eigenschaft gegeben durch die nachstehenden Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} A \equiv N'A' + N''A'' + \ldots + N^{(y)} A^{(y)} \pmod{a'}, \\ B \equiv N'B' + N''B'' + \ldots + N^{(y)} B^{(y)} \pmod{b'}, \\ C \equiv N'C' + N''C'' + \ldots + N^{(y)} C^{(y)} \pmod{c'}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ L \equiv N'L' + N''L'' + \ldots + N^{(y)} L^{(y)} \pmod{l'}, \end{array}\right\} \quad (9)$$

worin $N', N'', \ldots N^{(y)}$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Da nehmlich für jedes System $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, wel-

ches der Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots . l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$ genügt, folgende Gleichungen Statt finden:

$$p^{-\frac{m}{a'}A'\alpha - \frac{m}{b'}B'\beta - \ldots - \frac{m}{l'}L'\lambda} = 1,$$

$$p^{-\frac{m}{a'}A''\alpha - \frac{m}{b'}B''\beta - \ldots - \frac{m}{l'}L''\lambda} = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p^{-\frac{m}{a'}A^{(y)}\alpha - \frac{m}{b'}B^{(y)}\beta - \ldots - \frac{m}{l'}L^{(y)}\lambda} = 1;$$

so ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung, wenn man die vorstehenden Gleichungen zu den Potenzen $N'$, $N''$, .... $N^{(y)}$ erhebt und hierauf alle in einander multiplicirt. Es wird nehmlich für jedes System $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda$:

$$p^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda} = 1,$$

und daher die Summe $S_1$ gleich $n$. Man erhält insbesondere:

Ist $t$ zu $m$ relative Primzahl, so sind die $y$ Systeme von Coefficienten:

$$\left.\begin{array}{llll} tA', & tB', & tC', \ldots . & tL'; \\ tA'', & tB'', & tC'', \ldots . & tL''; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ tA^{(y)}, & tB^{(y)}, & tC^{(y)}, \ldots . & tL^{(y)} \end{array}\right\} \ldots\ldots (10)$$

alle incongruent und genügen der Bedingung $S_1 = n$; dieselben müssen daher, abgesehen von der Ordnung, mit den Systemen (8) übereinstimmen.

## §. 25.

Da die Systeme $A, B, C, \ldots . L$, für welche $S_1 = n$ ist, von der Art der Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda$ in §. 20. sind, so erhält man folgenden Satz:

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots . \mathfrak{l}$ beliebige positive oder negative Zahlen, so ist die Summe

$$\Sigma p^{-\frac{m}{a'}A\mathfrak{a} - \frac{m}{b'}B\mathfrak{b} - \ldots - \frac{m}{l'}L\mathfrak{l}},$$

in welcher die Summation sich auf alle incongruenten Systeme $A, B, C, \ldots . L$ bezieht, für welche $S_1$ den Werth $n$ hat, entweder gleich Null oder gleich der Anzahl dieser Systeme.

§. 26.

Betrachten wir, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, von jetzt an die Summe $S_1$, bei Zugrundelegung der Relation

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda \equiv 1 \pmod{M},$$

so ist es nun leicht, solche Combinationen $A, B, C, \dots L$ aufzufinden, für welche $S_1 = 0$, und auch solche, für welche $S_1$ den Werth $n$ hat. Dabei soll ferner vorausgesetzt werden, dass $P$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$ ist und dass $A, B, C, \dots L$ den Ungleichheiten

$$a' > A \geqq 0,$$

$$b' > B \geqq 0,$$

$$\dots\dots$$

$$l' > L \geqq 0$$

genügen.

Dehnt man die Summation

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \dots - \frac{m}{l'}L\lambda}$$

über alle $a'b'c' \dots l'$ Combinationen $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$ aus, die den Ungleichheiten

$$a' > \alpha \geqq 0,$$

$$b' > \beta \geqq 0,$$

$$\dots\dots$$

$$l' > \lambda \geqq 0$$

Genüge leisten, so erhält man, da für jede solche Combination $a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda$ einer der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots x_f$ congruent wird, einerseits

$$S_{x_1} + S_{x_2} + S_{x_3} + \dots + S_{x_f},$$

andererseits aber

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha} . \Sigma P^{-\frac{m}{b'}B\beta} \dots \Sigma P^{-\frac{m}{l'}L\lambda},$$

somit durch Ausführung der Summationen:

$$\frac{P^{-mA}-1}{P^{-\frac{m}{a'}A}-1}\cdot\frac{P^{-mB}-1}{P^{-\frac{m}{b'}B}-1}\cdots\frac{P^{-mL}-1}{P^{-\frac{m}{l'}L}-1},$$

und daher Null, den einzigen Fall ausgenommen, wo sämmtliche Coefficienten $A$, $B$, $C$, .... $L$ verschwinden, in welchem speciellen Falle der Werth obiger Summe gleich $a'b'c' \dots l'$ gefunden wird. In jedem andern Falle hat man die Gleichung:

$$S_{x_1} + S_{x_2} + S_{x_3} + \dots + S_{x_f} = 0. \quad \dots\dots \quad (1)$$

Nach §. 19. kann man aber setzen:

$$S_{x_1} = p_{x_1} \cdot S_1,$$
$$S_{x_2} = p_{x_2} \cdot S_1,$$
$$\dots\dots$$
$$S_{x_f} = p_{x_f} \cdot S_1,$$

so dass die Gleichung (1) sich jetzt in folgende verwandelt:

$$S_1 \Sigma p_x = 0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

wenn der Kürze halber

$$p_{x_1} + p_{x_2} + p_{x_3} + \dots + p_{x_f} = \Sigma p_x$$

gesetzt wird. Da der Ausdruck $a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda$ (mod. $M$) alle Werthe $x_1$, $x_2$, $x_3$, .... $x_f$ annimmt, und zwar jeden nur einmal, wenn man $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\lambda$ alle Combinationen beilegt, welche den Ungleichheiten

$$\mathfrak{a} > \alpha \geqq 0,$$

$$\mathfrak{b} > \beta \geqq 0,$$

$$\dots\dots$$

$$\mathfrak{l} > \lambda \geqq 0$$

genügen (siehe §. 12.), so ist:

$$\Sigma p_x = \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \dots - \frac{m}{l'}L\lambda},$$

wo die Summation auf der rechten Seite auszudehnen ist über alle Combinationen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... $\lambda$, welche die vorigen Ungleichheiten erfüllen. Führt man die Summation aus, so erhält man:

$$\cdot\frac{p^{-\frac{m}{a'}A\mathfrak{a}}-1}{p^{-\frac{m}{a'}A}-1}\cdot\frac{p^{-\frac{m}{b'}B\mathfrak{b}}-1}{p^{-\frac{m}{b'}B}-1}\cdots\frac{p^{-\frac{m}{l'}L\mathfrak{l}}-1}{p^{-\frac{m}{l'}L}-1}.$$

$\Sigma p_x$ ist also von Null verschieden, wenn gleichzeitig $A$ kein Vielfaches von $\frac{a'}{\mathfrak{a}}$ oder Null, $B$ kein Vielfaches von $\frac{b'}{\mathfrak{b}}$ oder Null u. s. w. ist. Die Anzahl der Combinationen $A, B, C, \ldots L$, welche diese Bedingungen erfüllen, ist aber $(a'-\mathfrak{a}+1)(b'-\mathfrak{b}+1)\ldots(l'-\mathfrak{l}+1)$; für jede derselben ist $\Sigma p_x$ von Null verschieden und daher nach (2) $S_1=0$. Ausser diesen Combinationen gibt es aber im Allgemeinen noch andere, welche ebenfalls der Bedingung $S_1=0$ genügen.

## §. 27.

Sind, wie in §. 16., $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots \mathfrak{l}'$ die kleinsten Exponenten ausser Null, für welche

$$a^{\mathfrak{a}'}\equiv(b,\ c,\ \ldots\ldots\ l),$$
$$b^{\mathfrak{b}'}\equiv(a,\ c,\ \ldots\ldots\ l),$$
$$c^{\mathfrak{c}'}\equiv(a,\ b,\ d,\ \ldots\ l),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

so sind, wie am erwähnten Orte gezeigt wurde, die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ in der Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$ Vielfache von $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots \mathfrak{l}'$.

Legt man daher in der Summe $S_1$ den Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ solche Werthe $A', B', C', \ldots L'$ bei, welche den vorigen nach den Moduln $\frac{a'}{\mathfrak{a}'}, \frac{b'}{\mathfrak{b}'}, \ldots \frac{l'}{\mathfrak{l}'}$ congruent sind, also:

$$A'\equiv A(\text{mod.}\ \frac{a'}{\mathfrak{a}'}),$$

$$B'\equiv B(\text{mod.}\ \frac{b'}{\mathfrak{b}'}),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$L'\equiv L(\text{mod.}\ \frac{l'}{\mathfrak{l}'});$$

so bleibt die Summe $S_1$ unverändert. Es genügt also die letztere für solche Werthe der Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ zu betrachten, welche den Ungleichheiten

$$\frac{a'}{\mathfrak{a}'} > A \geqq 0,$$

$$\frac{b'}{\mathfrak{b}'} > B \geqq 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{l'}{\mathfrak{l}'} > L \geqq 0$$

genügen. Lässt man z. B. $B, C, D, \ldots L$ unverändert und legt $A$ der Reihe nach die Werthe $A$, $A + \frac{a'}{\mathfrak{a}}$, $A + 2\frac{a'}{\mathfrak{a}}, \ldots A + (\mathfrak{a}-1)\frac{a'}{\mathfrak{a}}$ bei, so sind die entsprechenden Summen, an der Zahl $\mathfrak{a}$, alle einander gleich. Nimmt man insbesondere für $A, B, C, \ldots L$ Vielfache von $\frac{a'}{\mathfrak{a}'}, \frac{b'}{\mathfrak{b}'}, \frac{c'}{\mathfrak{c}'}, \ldots \frac{l'}{\mathfrak{l}'}$, so werden die Produkte $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma, \ldots L\lambda$ theilbar durch $a', b', c', \ldots l'$, und es ist daher für jedes Glied der Summe $S_1$ der Exponent durch $m$ theilbar, und somit $S_1 = n$. Die Anzahl dieser Combinationen ist aber $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ldots \mathfrak{l}'$, welcher Ausdruck, da $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, ferner $\mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots \mathfrak{l}'$ aliquote Theile von $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{l}$ sind (siehe §. 17.), die Grösse $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{l} = f$ nicht überschreiten kann. Wir werden nun aber zeigen, dass es genau so viele Systeme der $A, B, C, \ldots L$ gibt, für welche $S_1 = n$ wird, als die Zahl $f$ Einheiten enthält.

## §. 28.

In dem speciellen Falle, wo nur ein einziges System der $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ existirt, welches der Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$ genügt (siehe §. 6.), nehmlich $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$, und wo daher $n = 1$ ist, sieht man die Richtigkeit der Behauptung leicht ein. In diesem Falle hat nehmlich jede beliebige Combination $A, B, C, \ldots L$, deren Anzahl gleich $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ldots \mathfrak{l}'$ oder $f$ ist, die verlangte Eigenschaft. Um sich aber von der Richtigkeit des Satzes im Allgemeinen zu überzeugen, nehme man an, es werde $S_1$ für $x$ Combinationen der $A, B, C, \ldots L$ gleich 0 und für $y$ Combinationen gleich $n$, so erhält man:

$$ny = \Sigma\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda},$$

wo die eine Summation den gewöhnlichen Umfang hat, während die andere sich auf die $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ldots \mathfrak{l}'$ Combinationen der $A, B, C, \ldots L$ bezieht, welche den Ungleichheiten

$$a' > A \geqq 0,$$

$$b' > B \geqq 0,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$l' > L \geqq 0$$

genügen. Nehmen wir zuerst $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$ als konstant und $A, B, C, \ldots. L$ als veränderlich, so erhält man für den entsprechenden Theil der Summe:

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha} . \Sigma P^{-\frac{m}{b'}B\beta} \ldots. \Sigma P^{-\frac{m}{l'}L\lambda}$$

oder

$$\frac{P^{-m\alpha}-1}{P^{-\frac{m\alpha}{a'}}-1} \cdot \frac{P^{-m\beta}-1}{P^{-\frac{m\beta}{b'}}-1} \ldots. \frac{P^{-m\lambda}-1}{P^{-\frac{m\lambda}{l'}}-1},$$

also im Allgemeinen Null, den einzigen Fall ausgenommen, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$ sämmtlich verschwinden und obiger Ausdruck sich auf $a'b'c' \ldots. l'$ reducirt. Dieses Produkt ist daher der Werth der Doppelsumme, und so erhält man zur Bestimmung von $y$ die Gleichung

$$ny = a'b'c' \ldots. l' = nf,$$

woraus $y = f$ folgt. Die Anzahl der verschiedenen Systeme der $A, B, C, \ldots. L$, für welche $S_1$ den Werth $n$ hat, ist daher gleich der Anzahl der incongruenten Zahlen der Gruppe $[a, b, c, \ldots. l]$.

## §. 29.

Da die Summe

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\mathfrak{a} - \frac{m}{b'}B\mathfrak{b} - \ldots. - \frac{m}{l'}L\mathfrak{l}},$$

in welcher die Summation sich auf alle Systeme der $A, B, C, \ldots. L$ bezieht, für welche $S_1 = n$ ist, nach §. 25. entweder verschwindet oder den Werth $f$ hat, so findet man auf ähnliche Weise folgendes Resultat:

Es gibt $n$ Combinationen von Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots. \mathfrak{l}$, für welche die vorige Summe den Werth $f$ hat, und diese Combinationen stimmen mit den $n$ Systemen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$ überein, welche der Congruenz

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots. l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$$

genügen.

## §. 30.

Nehmen wir die primitive Wurzel $P$, ferner $a, b, c, \ldots l, M, m$ als konstant an, so soll der Werth von $S_1$, welcher einer bestimmten Combination der Coefficienten $A, B, C, \ldots L$ entspricht, durch

$$S_1(A, B, C, \ldots L)$$

bezeichnet werden. Unter $S_1(A, B, C)$ wollen wir alsdann die Summe $\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \frac{m}{c'}C\gamma}$ verstehen, wo die Summation sich auf alle Systeme $\alpha, \beta, \gamma$ bezieht, welche der Congruenz

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \equiv 1 \pmod{M}$$

und den Ungleichheiten

$$a' > \alpha \geqq 0, \quad b' > \beta \geqq 0, \quad c' > \gamma \geqq 0$$

genügen. Wir werden dieses in der Folge, wo es nothwendig sein sollte, auch kurz so andeuten, dass wir die den Umfang der Summe definirende Congruenz in Klammern beisetzen.

$S_1(D, E, \ldots L)$ bedeutet daher:

$$\Sigma P^{-\frac{m}{d'}D\delta - \frac{m}{e'}E\varepsilon - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda}$$

$$(d^\delta e^\varepsilon \ldots l^\lambda \equiv 1 \pmod{M})).$$

## §. 31.

Theilt man nun in der Summe $S_1$, in welcher die Coeficienten $A, B, C, \ldots L$ bestimmte Werthe haben, die wir durch $A', B', C', \ldots L'$ bezeichnen wollen, die letzteren in zwei beliebige Gruppen, z. B. in:

$$A', B', C' \text{ und } D', E', \ldots L',$$

so entsprechen denselben die zwei Summen

$$S_1(A', B', C') \text{ und } S_1(D', E', \ldots L').$$

Ist nun $S_1(A', B', C', \ldots L')$ von Null verschieden, so ist dasselbe auch mit den ähnlichen Summen der Fall, welche den zwei Gruppen der Coefficienten entsprechen, und hat eine dieser letztern Summen den Werth Null, so muss nothwendig auch die erste Summe verschwinden.

Wir können uns darauf beschränken, den Beweis für die eine Summe, etwa für $S_1(A', B', C')$ zu führen. Bildet man zu diesem Zwecke die Doppelsumme $\Sigma S_1(A', B', C', D, E, \ldots. L)$, wo die neue Summation sich auf alle möglichen Combinationen $D, E, \ldots. L$ bezieht, welche den Ungleichheiten:

$$d' > D \geqq 0,$$

$$e' > E \geqq 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$l' > L \geqq 0$$

genügen, und vollzieht man diese zweite Summation in Bezug auf ein bestimmtes System $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$, so erhält man für diesen Theil der Doppelsumme, da $A', B', C'$ konstant sind,

$$P^{-\frac{m}{a'}A'\alpha - \frac{m}{b'}B'\beta - \frac{m}{c'}C'\gamma} \Sigma P^{-\frac{m}{d'}D\delta - \frac{m}{e'}E\varepsilon - \ldots. \frac{m}{l'}L\lambda}$$

oder

$$P^{-\frac{m}{a'}A'\alpha - \frac{m}{b'}B'\beta - \frac{m}{c'}C'\gamma} \cdot \frac{P^{-m\delta} - 1}{P^{-\frac{m}{d'}\delta} - 1} \cdot \frac{P^{-m\varepsilon} - 1}{P^{-\frac{m}{e'}\varepsilon} - 1} \cdots \frac{P^{-m\lambda} - 1}{P^{-\frac{m}{l'}\lambda} - 1},$$

also Null, den einzigen Fall ausgenommen, wo $\delta = \varepsilon = \ldots. = \lambda = 0$ und daher $a^\alpha b^\beta c^\gamma \equiv 1 \pmod{M}$ ist. In diesem speciellen Falle findet man:

$$d' e' \ldots. l' P^{-\frac{m}{a'}A'\alpha - \frac{m}{b'}B'\beta - \frac{m}{c'}C'\gamma}.$$

Bemerkt man nun, dass die Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots. l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$ gerade so viele incongruente Auflösungen, für welche $\delta = \varepsilon = \ldots.$ $\ldots. = \lambda = 0$ ist, zulässt, als die Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma \equiv 1 \pmod{M}$ verschiedene Auflösungen gestattet, so sieht man, dass die Doppelsumme jetzt übergeht in:

$$d' e' \ldots. l' S_1(A', B', C').$$

Ist daher die Anzahl incongruenter Auflösungen der Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma \equiv 1 \pmod{M}$ gleich $n'$, so wird die Doppelsumme gleich

$$d' e' \ldots. l' . n' = n . \frac{f}{a' b' c'} . n'.$$

Bemerkt man nun, dass jede der Partialsummen, aus welchen die Doppelsumme zusammengesetzt ist, den Werth 0 oder $n$ hat, so ersieht man:

1) dass es zu der Gruppe von Coefficienten $A', B', C'$ so viele Combinationen $D, E, \ldots . L$ gibt, welche der Bedingung $S_1(A', B', C', D, E, \ldots . L) = n$ Genüge leisten, als der Ausdruck $\frac{f}{a'b'c'} . n'$ Einheiten enthält, und dass

2) sobald die Doppelsumme Null ist, auch jede Theilsumme verschwinden muss. Ist daher $S_1(A', B', C') = 0$, so findet dasselbe auch bei $S_1(A', B', C', D, E, \ldots . L)$ Statt, wie auch die Coefficienten $D, E, \ldots . L$ gewählt werden mögen. Ist aber $S_1(A', B', C', D', E, \ldots . L')$ gleich $n$, so kann die Doppelsumme

$$\Sigma S_1(A', B', C', D, E, \ldots . L)$$

nicht verschwinden, da obiges Glied derselben gleich $n$ und keines der übrigen negativ ist, es muss daher auch $S_1(A', B', C')$ von Null verschieden, also gleich der Anzahl incongruenter Auflösungen der Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma \equiv 1 \pmod{M}$ sein.

§. 32.

Bemerkt man, dass

$$S_1(A') = \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A'\alpha} (\alpha^a \equiv 1 \pmod{M})$$

gleich 1 ist, so erhält man folgenden speciellen Satz:

Sind wie in §. 24.:

$$\begin{matrix} A', & B', & C', \ldots . L', \\ A'', & B'', & C'', \ldots . L'', \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A^{(f)}, & B^{(f)}, & C^{(f)}, \ldots . L^{(f)} \end{matrix}$$

die sämmtlichen $f$ Systeme der Coefficienten $A, B, C, \ldots . L$, für welche $S_1$ den Werth $n$ hat, so kommen darunter $\frac{f}{a'}$ und nicht mehr Systeme vor, in welchen $A$ einen beliebigen Werth der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots . a'-1$ besitzt, und es gibt ebenso $\frac{f}{b'}$ Systeme, in welchen $B$ einen beliebigen Werth der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots . b'-1$ hat, u. s. w

Für die zweite Gruppe von Coefficienten $D', E', \ldots . L'$ lautet der Satz §. 31. wie folgt:

Lassen sich zu $D', E', \ldots . L'$ solche Coefficienten-Combinatio-

nen $A$, $B$, $C$ finden, so dass $A$, $B$, $C$, $D'$, $E'$, .... $L'$ die Bedingung $S_1 = n$ erfüllen, so gibt es $\mathfrak{abc}$ solche Combinationen, und noch specieller: Wenn die Summe $S_1(B', C', D', \ldots L')$ nicht verschwindet, also den Werth $\frac{n\mathfrak{a}}{a'}$ hat, so gibt es zu der Combination $B'$, $C'$, $D'$, .... $L'$ $\mathfrak{a}$ Werthe von $A$, so dass $A$, $B'$, $C'$, .... $L'$ ein solches System von Coefficienten ist, welches der Bedingung $S_1(A, B', C', \ldots L') = n$ genügt. Ist $A$ ein solcher Werth, so haben nach §. 27.

$$A + \frac{a'}{\mathfrak{a}},$$

$$A + 2.\frac{a'}{\mathfrak{a}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A + (\mathfrak{a} - 1)\frac{a'}{\mathfrak{a}}$$

dieselbe Eigenschaft; da deren Anzahl gleich $\mathfrak{a}$ ist, so gibt es zu der Combination $B'$, $C'$, $D'$, .... $L'$ nur einen einzigen Werth von $A$, der in der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots \frac{a'}{\mathfrak{a}} - 1$$

enthalten ist und der Bedingung $S_1(A, B', C', \ldots L') = n$ genügt.

## IV.

## Ueber die Bestimmung derjenigen Coefficienten-Combinationen $A$, $B$, $C$, .... $L$, welche der Bedingung $S_1 = n$ genügen.

### §. 33.

Zur Vervollständigung der in II. und III. enthaltenen Theorie der Summe $S_1$ ist nun noch ein Mittel anzugeben, diejenigen Combinationen $A$, $B$, $C$, .... $L$, für welche $S_1$ den Werth $n$ hat, aufzufinden. Zu diesem Zwecke wollen wir mit dem einfachsten Falle *) beginnen, wo die Anzahl der Zahlen $a$, $b$, $c$, .... $l$ sich auf

---

*) Hätte man nur eine einzige Zahl $a$, so ist die Summe

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha} \left(a^\alpha \equiv 1 \ (\text{mod.}\ M)\right)$$

für jeden Werth 0. 1. 2. 3. .... $a' - 1$, den man dem Coefficienten $A$ beilegen mag, gleich 1. (Siehe §. 28.)

zwei reducirt, nehmlich $a$ und $b$. Ist unter dieser Voraussetzung $\mathfrak{a}$ der kleinste Exponent, die Null ausgenommen, für welchen $a^{\mathfrak{a}}$ ein Glied der Periode von $b$ wird, und hat $\mathfrak{b}$ eine ähnliche Bedeutung in Bezug auf $b$, so dass man setzen kann:

$$a^{\mathfrak{a}} \equiv b^{p}, \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$b^{\mathfrak{b}} \equiv a^{q}, \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so lässt sich nach §. 13. die Anzahl der incongruenten Zahlen der Gruppe $[a, b]$ auf doppelte Weise ausdrücken, wodurch man die Gleichung

$$f = \mathfrak{a}b' = \mathfrak{b}a', \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und hieraus:

$$n = \frac{a'b'}{f} = \frac{a'}{\mathfrak{a}} = \frac{b'}{\mathfrak{b}}$$

erhält. Auch ergibt sich aus §. 11., dass $\frac{a'}{\mathfrak{a}}, \frac{b'}{\mathfrak{b}}, \frac{p}{\mathfrak{b}}, \frac{q}{\mathfrak{a}}$ ganze Zahlen sind. Erhebt man daher die erste Congruenz zur Potenz $\frac{q}{\mathfrak{a}}$, so folgt durch Vergleichung mit der zweiten:

$$b^{p\frac{q}{\mathfrak{a}}} \equiv b^{\mathfrak{b}} \pmod{M},$$

und da $b$ zum Exponenten $b'$ gehört, so schliesst man hieraus (Disq. arithm. art. 48.):

$$p.\frac{q}{\mathfrak{a}} \equiv \mathfrak{b} \pmod{b'}$$

oder einfacher:

$$\frac{p}{\mathfrak{b}}.\frac{q}{\mathfrak{a}} \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{b'}{\mathfrak{b}} = \frac{a'}{\mathfrak{a}} = n\right). \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Aus der letzteren Congruenz geht nun hervor, dass $\frac{p}{\mathfrak{b}}$ zu $\frac{b'}{\mathfrak{b}}$ und ebenso $\frac{q}{\mathfrak{a}}$ zu $\frac{a'}{\mathfrak{a}}$ relative Primzahl ist.

Um nun die Summe

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta} \quad (a^{\alpha}b^{\beta} \equiv 1 \pmod{M}) \quad \ldots \quad (5)$$

zu finden, bemerke man, dass nach §. 18. die Werthe des Exponenten $\alpha$ die folgenden sind:

$$0,\ 1.\mathfrak{a},\ 2.\mathfrak{a},\ 3.\mathfrak{a}, \ldots \left(\frac{a'}{\mathfrak{a}} - 1\right)\mathfrak{a}.$$

Man kann daher $\alpha = \left(\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} - z\right)\mathfrak{a}$ setzen, wo für $z$ eine beliebige Zahl der Reihe

$$0, 1, 2, 3, \ldots \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} - 1$$

zu nehmen ist. Durch Einführung dieses Werthes von $\alpha$ in die Congruenz (5) nimmt dieselbe, mit Berücksichtigung von (1), folgende Gestalt an:

$$b^\beta \equiv b^{pz} \text{ (mod. } M\text{)}, \quad \text{woraus} \quad \beta \equiv pz \text{ (mod. } b'\text{)}$$

erhalten wird. Jedem der obigen Werthe von $z$ entspricht also eine einzige Combination $\alpha$, $\beta$, und die Summe $S_1$ wird daher, wenn man im Exponenten die Vielfachen von $m$ weglässt,

$$\Sigma P^{z\left(\frac{m}{\mathfrak{a}'} A\mathfrak{a} - \frac{m}{b'} Bp\right)},$$

oder durch Vergleichung mit (3):

$$\sum_0^{\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} - 1} P^{\frac{m\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'} z (A - B\frac{p}{\mathfrak{b}})}.$$

Führt man die Summation aus, so erhält man daher:

$$\frac{P^{m(A - B\frac{p}{\mathfrak{b}})} - 1}{P^{\frac{m\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'}(A - B\frac{p}{\mathfrak{b}})} - 1} = S_1.$$

Da $\frac{p}{\mathfrak{b}}$ eine ganze Zahl ist, so wird diese Summe im Allgemeinen verschwinden; findet aber die Congruenz

$$A - \frac{p}{\mathfrak{b}} B \equiv 0 \text{ (mod. } n\text{)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Statt, so sind alle Glieder von $S_1$ gleich 1 und somit $S_1 = \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = n$.

Da $\frac{q}{\mathfrak{a}}$ mit $\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, so ist die Congruenz (6) gleichbedeutend mit der folgenden:

$$A\frac{q}{\mathfrak{a}} - B\frac{p}{\mathfrak{b}} \cdot \frac{q}{\mathfrak{a}} \equiv 0 \text{ (mod. } n\text{)},$$

welche mit Hilfe der Congruenz (4) übergeht in:

$$A\frac{q}{\mathfrak{a}} - B \equiv 0 \text{ (mod. } n\text{)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Zur Bestimmung derjenigen Combinationen $A$, $B$, für welche $S_1 = n$ wird, kann man daher eine beliebige der zwei Congruenzen (6) oder (7) benutzen. Wendet man die Congruenz (6) an, so gebe man $B$ der Reihe nach die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots b'-1$, für jeden solchen Werth von $B = B'$ erhält man alsdann mittelst (6) einen einzigen Werth von $A = A'$, welcher der Ungleichheit $\frac{a'}{a} > A' \geqq 0$ genügt, und daraus ergeben sich alsdann folgende Systeme $A$, $B$:

$$B',\quad A',$$
$$B',\quad A' + \frac{a'}{a},$$
$$B',\quad A' + 2.\frac{a'}{a},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$B',\quad A' + (a-1)\frac{a'}{a},$$

so dass die Anzahl sämmtlicher Systeme $A$, $B$ gleich wird $ab' = f$.

## §. 34.

Um in dem allgemeinen Falle, wo die Anzahl der Zahlen $a, b, c, \ldots l$ eine beliebige ist, diejenigen Systeme der Coefficienten zu bestimmen, für welche $S_1$ den Werth $n$ hat, geben wir der Summe

$$S_1 = \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda}$$
$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda \equiv 1 \pmod{M})$$

eine unserem Zwecke entsprechende Form. Nach §. 18. muss $\alpha = \left(\frac{a'}{a} - z\right)a$ gesetzt werden, wo für $z$ jede beliebige Zahl der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots \frac{a'}{a} - 1$$

genommen werden kann. Wir können daher die Summe $S_1$ in $\frac{a'}{a}$ Partialsummen zerlegen, welche den verschiedenen Werthen von $z$ entsprechen. Irgend eine dieser Partialsummen erhält, wenn man den konstanten Faktor

$$P^{-\frac{m}{a'}A\left(\frac{a'}{a} - z\right)a} = P^{\frac{m}{a'}Aaz}$$

vor das Summationszeichen setzt, die Form:

$$P^{\frac{m}{a'}A\alpha z}\Sigma P^{-\frac{m}{b'}B\beta-\frac{m}{c'}C\gamma-\ldots-\frac{m}{l'}L\lambda},$$

wo die Summation auf alle Systeme $\beta, \gamma, \delta, \ldots \lambda$ auszudehnen ist, für welche die Ungleichheiten

$$b' > \beta \geqq 0,$$

$$c' > \gamma \geqq 0,$$

$$\ldots\ldots$$

$$l' > \lambda \geqq 0$$

und die Congruenz $b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda \equiv a^{\alpha z}$ (mod. $M$) Statt finden. Setzen wir nun:

$$b^{\beta'} c^{\gamma'} d^{\delta'} \ldots l^{\lambda'} \equiv a^\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

also

$$b^{\beta' z} c^{\gamma' z} d^{\delta' z} \ldots l^{\lambda' z} \equiv a^{\alpha z}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

so ist eine Combination $\beta, \gamma, \delta, \ldots \lambda$ gegeben durch die folgenden Congruenzen:

$$\beta \equiv \beta' z \text{ (mod. } b'),$$
$$\gamma \equiv \gamma' z \text{ (mod. } c'),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda \equiv \lambda' z \text{ (mod. } l'),$$

wo $\beta, \gamma, \ldots \lambda$ so zu bestimmen sind, dass sie obige Ungleichheiten erfüllen. Wendet man daher den Satz

$$S_z = p_z S_1$$

in §. 19. an und bemerkt, dass man für $p_z$ ein beliebiges Glied der Partialsumme, also auch $P^{-\frac{m}{b'}B\beta' z-\frac{m}{c'}C\gamma' z-\ldots-\frac{m}{l'}L\lambda' z}$ nehmen kann, und setzt der Kürze halber:

$$E = \frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta' - \frac{m}{c'}C\gamma' - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda', \quad \ldots \quad (9)$$

so erhält man:

$$P^{Ez}\Sigma P^{-\frac{m}{b'}B\beta_0-\frac{m}{c'}C\gamma_0-\ldots-\frac{m}{l'}L\lambda_0}$$

$$(b^{\beta_0} c^{\gamma_0} \ldots l^{\lambda_0} \equiv 1 \text{ (mod. } M)),$$

wofür wir zur Abkürzung auch $P^{Ez} S_1{}^0$ schreiben wollen.

Um nun die Summe $S_1$ zu erhalten, hat man $S_1^0$, welches unabhängig von $z$ ist, zu multipliciren mit

$$\sum_0^{\frac{a'}{a}-1} p^{zE} = \frac{p^{\frac{a'}{a}E}-1}{p^E-1},$$

wodurch man erhält:

$$S_1 = \frac{p^{\frac{a'}{a}E}-1}{p^E-1} S_1^0.$$

Durch diese Gleichung ist die Summe $S_1$ zurückgeführt auf die Bestimmung einer ähnlichen und einfacheren Summe $S_1^0$, für welche die den Umfang der Summe definirende Congruenz ein Element weniger enthält.

Soll daher $S_1$ den Werth $n$ erhalten, so darf vorerst $S_1^0$ nicht Null sein, d. h. für $B, C, D, \ldots L$ muss eine solche Combination von Coefficienten genommen werden, für welche $S_1^0$ nicht verschwindet, sondern den Werth $\frac{b'c'\ldots l'}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{l}} = \frac{n\mathfrak{a}}{a'} = n^0$ annimmt, wie wir schon aus dem §. 31. wissen. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist das zweite Erforderniss, dass der Faktor $\frac{p^{\frac{a'}{\mathfrak{a}}E}-1}{p^E-1}$ sich auf $\frac{a'}{\mathfrak{a}}$ reducirt. Der letztere ist aber im Allgemeinen gleich Null, wenn $S_1^0$ den Werth $n^0$ hat. Denn in diesem Falle ist der Exponent eines jeden Gliedes der Summe $S_1^0$, nehmlich

$$-\frac{m}{b'}B\beta_0 - \frac{m}{c'}C\gamma_0 - \ldots - \frac{m}{l'}L\lambda_0$$

durch $m$ theilbar. Erhebt man aber die Congruenz (8) zur Potenz $\frac{a'}{\mathfrak{a}}$, so erhält man:

$$b^{\beta'\frac{a'}{\mathfrak{a}}} c^{\gamma'\frac{a'}{\mathfrak{a}}} \ldots l^{\lambda'\frac{a'}{\mathfrak{a}}} \equiv 1 \pmod{M},$$

und somit:

$$-\frac{a'}{\mathfrak{a}}\left(\frac{m}{b'}B\beta' + \frac{m}{c'}C\gamma' + \ldots + \frac{m}{l'}L\lambda'\right) \equiv 0 \pmod{m},$$

oder einfacher durch Benutzung von (9):

$$\frac{a'}{\mathfrak{a}}E \equiv 0 \pmod{m}, \text{ also auch } E \equiv 0 \left(\text{mod.} \frac{m\mathfrak{a}}{a'}\right).$$

Es ist daher $S_1$ im Allgemeinen gleich Null, wenn $S_1^0$ den Werth $n^0$ hat. Ist aber in diesem Falle $E \equiv 0 \pmod{m}$ oder $\frac{E}{\frac{m\mathfrak{a}}{a'}} \equiv 0 \left(\text{mod.} \frac{a'}{\mathfrak{a}}\right)$, so wird der Faktor von $S_1^0$ gleich $\frac{a'}{\mathfrak{a}}$, und daher:

$$S_1 = \frac{a_1}{\mathfrak{a}} n^0 = n.$$

Ist also $B, C, D, \ldots. L$ eine solche Combination, für welche $S_1^0$ den Werth $n^0$ erhält, und bestimmt man $A$ nach der Congruenz:

$$\frac{m}{a'} A\mathfrak{a} - \frac{m}{b'} B\beta' - \frac{m}{c'} C\gamma' - \ldots. - \frac{m}{l'} L\lambda' \equiv 0 \pmod{m}, \quad (10)$$

woraus sich ergibt:

$$A \equiv \frac{\frac{m}{b'} B\beta' + \frac{m}{c'} C\gamma' + \ldots. + \frac{m}{l'} L\lambda'}{\frac{m\mathfrak{a}}{a'}} \left(\text{mod.} \frac{a'}{\mathfrak{a}}\right),$$

so findet man einen einzigen Werth von $A$, den wir mit $A'$ bezeichnen wollen, welcher der Ungleichheit $\frac{a'}{\mathfrak{a}} > A' \geqq 0$ genügt, und es sind alsdann:

$$\begin{array}{lllll} A', & B, & C, & D, \ldots. L, \\ A' + \frac{a'}{\mathfrak{a}}, & B, & C, & D, \ldots. L, \\ A' + 2.\frac{a'}{\mathfrak{a}}, & B, & C, & D, \ldots. L, \\ \ldots & & & \\ A' + (\mathfrak{a}-1)\frac{a'}{\mathfrak{a}}, & B, & C, & D, \ldots. L \end{array}$$

solche Systeme der Coefficienten, für welche $S_1 = n$ wird. Da es $\frac{f}{\mathfrak{a}}$ Systeme $B, C, D, \ldots. L$ gibt, für welche $S_1^0 = n^0$, so erhält man $\mathfrak{a}.\frac{f}{\mathfrak{a}} = f$ Systeme $A, B, C, \ldots. L$, für welche $S_1$ den Werth $n$ erhält, also alle möglichen.

Wenn der Coefficient $A$ auf die angegebene Weise (10) bestimmt wird, so ist nun leicht zu zeigen, dass in der Summe

$$S_1 = \Sigma P^{-\frac{m}{a'} A\mathfrak{a} - \frac{m}{b'} B\beta - \ldots. - \frac{m}{l'} L\lambda}$$

für jede Combination $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \lambda$, welche der Congruenz $a^\alpha b^\beta \ldots\ldots l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$ genügt, der Exponent von $P$ durch $m$ theilbar wird. Denn, da $B, C, D, \ldots\ldots L$ eine solche Combination ist, für welche

$$\Sigma P^{-\frac{m}{b'}B\beta_0 - \frac{m}{c'}C\gamma_0 - \ldots\ldots - \frac{m}{l'}L\lambda_0}$$

den Werth $n_0$ erhält, so ist:

$$-\frac{m}{b'}B\beta_0 - \frac{m}{c'}C\gamma_0 - \ldots\ldots - \frac{m}{l'}L\lambda_0 \equiv 0 \pmod{m}, \quad . \ . \ (11)$$

sobald die Congruenz $b^{\beta_0} c^{\gamma_0} \ldots\ldots l^{\lambda_0} \equiv 1 \pmod{M}$ Statt findet. Soll aber $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$ sein, so muss, wie wir gesehen haben, $\alpha = \left(\frac{a'}{\mathfrak{a}} - z\right)\mathfrak{a}$, wo $z$ eine beliebige Zahl der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \left(\frac{a'}{\mathfrak{a}} - 1\right)$ bedeutet, gesetzt werden, wodurch man erhält:

$$b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda \equiv a^{\mathfrak{a}z} \pmod{M}.$$

Nach §. 5. ist daher:

$$\beta \equiv \beta' z + \beta_0 \pmod{b'},$$
$$\gamma \equiv \gamma' z + \gamma_0 \pmod{c'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda \equiv \lambda' z + \lambda_0 \pmod{l'},$$

wozu noch $\alpha = \left(\frac{a'}{\mathfrak{a}} - z\right)\mathfrak{a}$ kommt; dadurch wird der Exponent im allgemeinen Gliede der Summe $S_1$ aber

$$-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \ldots\ldots - \frac{m}{l'}L\lambda$$

$$\equiv -\frac{m}{b'}B\beta_0 - \frac{m}{c'}C\gamma_0 - \ldots\ldots - \frac{m}{l'}L\lambda_0 + z\left\{\frac{m}{a'}A\mathfrak{a} - \frac{m}{b'}B\beta' - \ldots\ldots - \frac{m}{l'}L\lambda'\right\},$$

also, durch Benützung von (10) und (11), $\equiv 0 \pmod{m}$. Die hier angegebene Methode, diejenigen Combinationen $A, B, C, \ldots\ldots L$ zu finden, für welche $S_1$ den Werth $n$ erhält, lässt sich noch bedeutend vereinfachen, wenn man weitere Sätze aus der Theorie der Potenzreste voraussetzt, wie wir vielleicht bei einer andern Gelegenheit zeigen werden.

## V.

## Lösung der vorgelegten Aufgabe mit Hilfe des Vorhergehenden.

### §. 35.

Nach diesen vorbereitenden Sätzen können wir zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, die Anzahl derjenigen Theiler (der Zahl $N$) zu finden, welche eine gegebene lineäre Form besitzen.

Es sei $N$ die vorgelegte Zahl und es werde die Anzahl ihrer Theiler gesucht, welche nach dem Modul $M$ der gegebenen Zahl $a$ congruent sind. Wir wollen diese Anzahl mit $(N:M, a)$ und, sobald keine Verwechselung möglich ist, einfach mit $(M, a)$ bezeichnen.

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, darf vorausgesetzt werden, dass $a$ zu $M$ relative Primzahl ist. Denn hätten $a$ und $M$ einen gemeinschaftlichen Theiler, so sei der grösste derselben gleich $\varDelta$, und

$$M = M'\varDelta,$$

$$a = a'\varDelta,$$

wo jetzt $a'$ zu $M'$ relative Primzahl ist. Da nun jede Zahl, welche nach dem Modul $M$ den Rest $a$ lässt, die Form $Mx + a$ oder $\varDelta(M'x + a')$ hat, so muss die Zahl $N$, sobald dieselbe Divisoren von obiger Form besitzt, durch $\varDelta$ theilbar sein. Man setze daher $N = N'\varDelta$, so wird $M'x + a'$ ein Theiler von $N'$.

Jeder Divisor $Mx + a$ der gegebenen Zahl $N$ liefert also einen Divisor $M'x + a'$ der Zahl $N'$, und auch umgekehrt. Es ist daher nach unserer Bezeichnung:

$$(N:M, a) = (N':M', a').$$

Ist $a = 0$, also $\varDelta = M$ und $a' = 0$, so ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten. Die Anzahl derjenigen Theiler von $N$, welche durch den Modul $M$ theilbar sind, ist gleich der Anzahl sämmtlicher Theiler der Zahl $\frac{N}{M}$.

### §. 36.

Es darf ferner angenommen werden, dass der Modul $M$ und die gegebene Zahl $N$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Denn wäre dieses nicht der Fall, so könnte man $N = N'q$ setzen, wo $q$ das Produkt aller derjenigen Primfaktoren von $N$ bedeutet, welche zugleich $M$ theilen, und wo daher $M$ zu $N'$ relative Primzahl ist. Da nun $a$ mit $M$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, so sind alle Zahlen von der Form $Mx + a$ zu $M$, also auch zu $q$ relative Primzahl. Besitzt daher $N$ Divisoren von der Form $Mx + a$, so muss jeder derselben die Zahl $N'$ theilen, oder in Zeichen ausgedrückt:

$$(N:M, a) = (N':M, a).$$

Ist z. B. der Modul gleich 2, so entsprechen demselben zwei Linearformen, nehmlich $2x$ und $2x + 1$, und man erhält:

1) Die Anzahl der geraden Theiler von $N$ ist gleich der Anzahl sämmtlicher Theiler von $\frac{N}{2}$.

2) Die Anzahl der ungeraden Theiler von $N$ ist gleich der Anzahl sämmtlicher Theiler der Zahl $\frac{N}{2^\lambda}$, wo $2^\lambda$ die höchste Potenz von 2 ist, welche $N$ theilt.

## §. 37.

Sind nun $a, b, c, d, \ldots.$ die sämmtlichen positiven Zahlen, kleiner als $M$, welche mit dem Modul keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man alle Primzahlen in $\varphi(M)$ Klassen eintheilen, welchen nachstehende lineäre Formen entsprechen:

$$Mx + a,$$
$$Mx + b,$$
$$Mx + c,$$
$$\ldots.$$

Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ die verschiedenen Primzahlen der ersten Klasse und eine ähnliche Bedeutung sollen $b_1, b_2, b_3, \ldots.$, $c_1, c_2, c_3, \ldots.$ u. s. w. in Bezug auf die anderen Klassen haben. Enthält nun die Zahl $N$ Primfaktoren von folgenden Linearformen:

$$Mx + a,$$
$$Mx + b,$$
$$\ldots.$$
$$Mx + l,$$

so kann man setzen:

$$\left.\begin{array}{l} N = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots \\ \quad\; b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} b_3^{\beta_3} \ldots \\ \quad\; c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} c_3^{\gamma_3} \ldots \\ \quad\; \ldots\ldots\ldots \\ \quad\; l_1^{\lambda_1} l_2^{\lambda_2} l_3^{\lambda_3} \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und ein beliebiger Theiler von $N$ hat die Form:

$$\left.\begin{array}{l} T = a_1^{\mathfrak{a}_1} a_2^{\mathfrak{a}_2} a_3^{\mathfrak{a}_3} \ldots \\ \quad\; b_1^{\mathfrak{b}_1} b_2^{\mathfrak{b}_2} b_3^{\mathfrak{b}_3} \ldots \\ \quad\; c_1^{\mathfrak{c}_1} c_2^{\mathfrak{c}_2} c_3^{\mathfrak{c}_3} \ldots \\ \quad\; \ldots\ldots\ldots \\ \quad\; l_1^{\mathfrak{l}_1} l_2^{\mathfrak{l}_2} l_3^{\mathfrak{l}_3} \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so dass man erhält:

$$T \equiv a^{\Sigma\mathfrak{a}} b^{\Sigma\mathfrak{b}} c^{\Sigma\mathfrak{c}} \ldots l^{\Sigma\mathfrak{l}} \pmod{M}, \quad \ldots\ldots (3)$$

wenn der Kürze halber:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \ldots = \Sigma\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3 + \ldots = \Sigma\mathfrak{b}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \mathfrak{l}_3 + \ldots = \Sigma\mathfrak{l} \end{array}$$

gesetzt wird.

Der rechten Seite in (3) kann man für das Folgende eine einfachere Gestalt geben, wenn eine der Zahlen $a, b, c, \ldots$ einem Produkte von Potenzen der übrigen congruent ist.

Ist z. B. $c \equiv a^p b^q d^r$, so nimmt (3) folgende Gestalt an:

$$T \equiv a^{\Sigma\mathfrak{a}+p\Sigma\mathfrak{c}} b^{\Sigma\mathfrak{b}+q\Sigma\mathfrak{c}} d^{\Sigma\mathfrak{d}+r\Sigma\mathfrak{c}} \ldots l^{\Sigma\mathfrak{l}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhält man eine Congruenz von folgender Form:

$$T \equiv a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots \pmod{M},$$

wo man jetzt annehmen kann, dass keine der Zahlen $a, b, c, \ldots$ congruent ist einem Produkte von Potenzen der übrigen, und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ lineare Funktionen von $\Sigma\mathfrak{a}, \Sigma\mathfrak{b}, \Sigma\mathfrak{c}, \ldots$ bedeuten. Wir werden daher dem Folgenden statt (3) allgemeiner die Congruenz

$$T \equiv a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots l^{\mathfrak{L}} \pmod{M} \quad \ldots\ldots (4)$$

zu Grunde legen, wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{L}$ lineare Funktionen von $\Sigma\mathfrak{a}, \Sigma\mathfrak{b}, \Sigma\mathfrak{c}, \ldots \Sigma\mathfrak{l}$ bedeuten.

§. 38.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen seien

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{A}', & \mathfrak{B}', & \mathfrak{C}', \ldots \mathfrak{L}', \\ \mathfrak{A}'', & \mathfrak{B}'', & \mathfrak{C}'', \ldots \mathfrak{L}'', \\ \mathfrak{A}''', & \mathfrak{B}''', & \mathfrak{C}''', \ldots \mathfrak{L}''', \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}^{(n)}, & \mathfrak{B}^{(n)}, & \mathfrak{C}^{(n)}, \ldots \mathfrak{L}^{(n)} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

alle verschiedenen Systeme der Exponenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{L}$, welche den Ungleichheiten

$$a' > \mathfrak{A} \geqq 0,$$

$$b' > \mathfrak{B} \geqq 0,$$

$$c' > \mathfrak{C} \geqq 0,$$

$$\ldots\ldots$$

$$l' > \mathfrak{L} \geqq 0$$

und der Congruenz $a^{\mathfrak{A}} b^{\mathfrak{B}} c^{\mathfrak{C}} \ldots l^{\mathfrak{L}} \equiv x \pmod{M}$ genügen.

Für $x_1, x_2, x_3, \ldots x_f$ erhalten diese Buchstaben noch unten die entsprechenden Indices. Um nun die Anzahl $(M, x)$ derjenigen Theiler von $N$ zu erhalten, welche $\equiv x \pmod{M}$ sind und der Combination $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \ldots \mathfrak{L}'$ entsprechen, liegt die einzige Schwierigkeit darin, eine Funktion $\psi$ von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{L}$ zu finden, welche gleich 1 ist, wenn die folgenden Congruenzen erfüllt sind:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \pmod{a'},$$

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}' \pmod{b'},$$

$$\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}' \pmod{c'},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}' \pmod{l'},$$

und in jedem andern Falle verschwindet. Ist nehmlich diese Funktion gefunden, so wird die Anzahl der fraglichen Theiler gleich $\Sigma\psi$, wo die Summation über sämmtliche Divisoren der Zahl $N$ auszudehnen ist.

Ist nun $f(x, \mu)$ eine solche Funktion von $x$ und $\mu$, welche den Werth 1 hat, wenn $x$ durch $\mu$ theilbar ist, und in jedem andern Falle verschwindet, so kann man setzen:

$$\psi = f(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}', a').f(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}', b') \dots f(\mathfrak{L}-\mathfrak{L}', l') \quad \dots (6)$$

Bedeutet $P$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^\mu - 1 = 0$, so ist folgender Ausdruck:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{P^{\mu x}-1}{P^x - 1} = \frac{1}{\mu}\{1 + P^x + P^{2x} + P^{3x} + \dots + P^{(\mu-1)x}\} \quad \dots (7)$$

ein tauglicher Werth für die Funktion $f$. Denn ist $x$ durch $\mu$ theilbar, so ergibt sich aus der entwickelten Form dieser Funktion: $f=1$, ist aber $x$ durch $\mu$ nicht theilbar, so erhält man aus der andern Form von $f$, da der Zähler verschwindet, während der Nenner von Null verschieden ist: $f=0$.

## §. 39.

Bedeuten daher $\varrho_{a'}, \varrho_{b'}, \varrho_{c'}, \dots \varrho_{l'}$ primitive Wurzeln der Gleichungen

$$x^{a'} - 1 = 0,$$
$$x^{b'} - 1 = 0,$$
$$x^{c'} - 1 = 0,$$
$$\dots\dots$$
$$x^{l'} - 1 = 0;$$

so darf man setzen:

$$\psi = \frac{1}{a'} \frac{\varrho_{a'}{}^{a'(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')} - 1}{\varrho_{a'}{}^{\mathfrak{A}-\mathfrak{A}'} - 1} \cdot \frac{1}{b'} \cdot \frac{\varrho_{b'}{}^{b'(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}')} - 1}{\varrho_{b'}{}^{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'} - 1} \dots \frac{1}{l'} \cdot \frac{\varrho_{l'}{}^{l'(\mathfrak{L}-\mathfrak{L}')} - 1}{\varrho_{l'}{}^{\mathfrak{L}-\mathfrak{L}'} - 1},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\psi = \frac{1}{a'b'c'\dots l'} \Sigma \varrho_{a'}{}^{A(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')} . \varrho_{b'}{}^{B(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}')} \dots \varrho_{l'}{}^{L(\mathfrak{L}-\mathfrak{L}')}, \quad \dots (8)$$

wo die Summation sich auf alle Combinationen von $A, B, C, \dots L$ bezieht, welche den Ungleichheiten

$$a' > A \geqq 0,$$
$$b' > B \geqq 0,$$
$$c' > C \geqq 0,$$
$$\dots\dots$$
$$l' > L \geqq 0$$

genügen.

Ist nun $m$ eine Zahl, welche durch sämmtliche Exponenten $a', b', c', \ldots. l'$ theilbar ist, und $P$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$, so darf man setzen:

$$\varrho_{a'} = P^{\frac{m}{a'}}, \quad \varrho_{b'} = P^{\frac{m}{b'}}, \ldots. \ \varrho_{l'} = P^{\frac{m}{l'}},$$

so dass $\psi$ nachstehende einfachere Form annimmt:

$$\psi = \frac{1}{a'b'c'\ldots. l'} \Sigma P^{\frac{m}{a'}(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')A + \frac{m}{b'}(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}')B + \ldots. + \frac{m}{l'}(\mathfrak{L}-\mathfrak{L}')L}. \tag{9}$$

Es könnte vielleicht allgemeiner erscheinen, wenn man

$$\varrho_{a'} = P^{\frac{m}{a'}\mathfrak{a}}, \quad \varrho_{b'} = P^{\frac{m}{b'}\mathfrak{b}}, \ldots. \ \varrho_{l'} = P^{\frac{m}{l'}\mathfrak{l}}$$

setzen würde, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots. \mathfrak{l}$ beliebige Zahlen bedeuten, welche bezüglich zu $a', b', c', \ldots. l'$ relative Primzahlen sind; es ist aber leicht zu zeigen, dass dieses nicht der Fall ist. Durch diese scheinbar allgemeinere Annahme würde man nehmlich erhalten:

$$\psi = \frac{1}{a'b'c'\ldots. l'} \Sigma P^{\frac{m}{a'}(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')A\mathfrak{a} + \frac{m}{b'}(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}')B\mathfrak{b} + \ldots. + \frac{m}{l'}(\mathfrak{L}-\mathfrak{L}')L\mathfrak{l}}. \tag{10}$$

Bedeuten nun aber für einen Augenblick

$$\left.\begin{array}{llll} A', & B', & C', \ldots. & L'; \\ A'', & B'', & C'', \ldots. & L''; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{(p)}, & B^{(p)}, & C^{(p)}, \ldots. & L^{(p)} \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(a)}$$

wo $p = a'b'c'\ldots. l'$ ist, sämmtliche verschiedene Combinationen der Coefficienten $A, B, C, \ldots. L$, welche in die Funktion $\psi$ eingehen, und bildet man daraus die Combinationen

$$\mathfrak{a}A, \ \mathfrak{b}B, \ \mathfrak{c}C, \ldots. \mathfrak{l}L,$$

nehmlich:

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{a}A', & \mathfrak{b}B', & \mathfrak{c}C', \ldots. & \mathfrak{l}L', \\ \mathfrak{a}A'', & \mathfrak{b}B'', & \mathfrak{c}C'', \ldots. & \mathfrak{l}L'', \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{a}A^{(p)}, & \mathfrak{b}B^{(p)}, & \mathfrak{c}C^{(p)}, \ldots. & \mathfrak{l}L^{(p)}, \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(b)}$$

so sind dieselben alle incongruent. Denn wäre z. B.

$$\mathfrak{a}A' \equiv \mathfrak{a}A'' \pmod{a'},$$
$$\mathfrak{b}B' \equiv \mathfrak{b}B'' \pmod{b'},$$
$$\mathfrak{c}C' \equiv \mathfrak{c}C'' \pmod{c'},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{l}L' \equiv \mathfrak{l}L'' \pmod{l'},$$

so leitet man daraus, da $\mathfrak{a}$ zu $a'$, $\mathfrak{b}$ zu $b'$, $\mathfrak{c}$ zu $c'$ u. s. w. relative Primzahl ist,

$$A' = A'',$$
$$B' = B'',$$
$$\cdots\cdot$$
$$L' = L''$$

ab, was der Voraussetzung widerspricht. Hieraus folgt, dass die Combinationen (b), abgesehen von der Ordnung der Combinationen (a), congruent sind. Bemerkt man ferner, dass in (10) die Combination der Coefficienten $\mathfrak{a}A, \mathfrak{b}B, \mathfrak{c}C, \ldots\, \mathfrak{l}L$, ohne den Werth des Gliedes zu ändern, durch eine congruente Combination ersetzt werden kann, so ersieht man, dass der zweite Ausdruck von $\psi$ nur scheinbar allgemeiner ist als der erste, da er sich von dem letztern nur durch die Anordnung der Glieder unterscheidet. Wir können daher den ersten Ausdruck von $\psi$, als den allgemeinsten, für die weitere Entwickelung benützen.

Setzt man nun für $a'b'c' \ldots l'$ seinen Werth in §. 5., und schreiben wir der Kürze halber immer nur das allgemeine Glied, so ist:

$$\psi = \ldots + \frac{1}{nf} P^{\frac{m}{a'}(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')A + \frac{m}{b'}(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}')B + \ldots + \frac{m}{l'}(\mathfrak{L}-\mathfrak{L}')L}. \tag{11}$$

## §. 40.

Die Anzahl derjenigen Theiler von $N$, welche nach dem Modul $M$ der Zahl $x$ congruent sind und der Combination $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \ldots \mathfrak{L}'$ entsprechen, ist nun $\Sigma\psi$, wo die Summation auf sämmtliche Divisoren der Zahl $N$ auszudehnen ist. Man erhält daher:

$$\Sigma\psi = \ldots + \frac{1}{nf} \Sigma P^{\frac{m}{a'}(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')A + \frac{m}{b'}(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}')B + \ldots + \frac{m}{l'}(\mathfrak{L}-\mathfrak{L}')L} + \ldots, \tag{12}$$

oder auch:

$$\Sigma\psi = \ldots + \frac{1}{nf} \Sigma p_{x'} P^{\xi} + \ldots, \quad \ldots\ldots \tag{13}$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{m}{a'}\mathfrak{A}A+\frac{m}{b'}\mathfrak{B}B+\ldots.+\frac{m}{l'}\mathfrak{L}L=\xi,$$

und dem entsprechend:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{m}{a'}\mathfrak{A}A'\;\;+\frac{m}{b'}\mathfrak{B}B''\;\;+\ldots.+\frac{m}{l'}\mathfrak{L}L'\;\;=\xi',\\
&\frac{m}{a'}\mathfrak{A}A''\;\;+\frac{m}{b'}\mathfrak{B}B''\;\;+\ldots.+\frac{m}{l'}\mathfrak{L}L''\;\;=\xi'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{m}{a'}\mathfrak{A}A^{(f)}+\frac{m}{b'}\mathfrak{B}B^{(f)}+\ldots.+\frac{m}{l'}\mathfrak{L}L^{(f)}=\xi^{(f)},
\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(14)$$

ferner, wie in §. 20.:

$$P^{-\frac{m}{a'}\mathfrak{A}'A-\frac{m}{b'}\mathfrak{B}'B-\ldots.-\frac{m}{l'}\mathfrak{L}'L}=p_x'\;\ldots\ldots\;(15)$$

gesetzt wird. Man darf in der Gleichung (13) den konstanten Faktor $p_x'$ vor das Summationszeichen setzen, wodurch dieselbe folgende Gestalt annimmt:

$$\Sigma\psi=\ldots.+\frac{1}{nf}p_x'\,\Sigma P^{\xi}+\ldots.\;\ldots\ldots\;(16)$$

Will man nun aber alle Theiler von $N$ erhalten, welche $\equiv x$ (mod. $M$) sind, so muss man $\Sigma\Sigma\psi$ bilden, wo die zweite Summation sich auf alle Systeme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, .... $\mathfrak{L}$ in §. 38., (5) bezieht, und es ist daher:

(17)

$$(M,x)=\Sigma\Sigma\psi=\ldots.+\frac{1}{nf}(p_x'+p_x''+p_x'''+\ldots.+p_x^{(n)}\Sigma P^{\xi}+\ldots.$$

Die Grösse in der Klammer ist offenbar $S_x$ (siehe §. 20.) oder $p_xS_1$, wo $p_x$ ein beliebiges Glied der Summe $S_x$ bedeutet. Nun ist $S_1$ entweder Null oder $n$, man kann daher schreiben:

$$(M,x)=\ldots.+\frac{1}{f}p_x\,\Sigma'\,P^{\xi}+\ldots.,\;\ldots\ldots\;(18)$$

wo der Strich an dem Summationszeichen andeuten soll, dass $A$, $B$, $C$, .... $L$ ein solches System von Coefficienten vorstellt, welches der Bedingung $S_1=n$ genügt und wo die Summation über alle Theiler der Zahl $N$ auszudehnen ist. Um nun alle Glieder der Gleichung (18) aufführen zu können, seien noch folgende Bezeichnungen in Anwendung gebracht.

Bedeutet wie früher

$$A^{(t)},\quad B^{(t)},\quad C^{(t)},\ldots.\;L^{(t)}$$

ein solches System von Coefficienten, für welches $S_1$ den Werth $n$ hat, ferner $\mathfrak{A}_v$, $\mathfrak{B}_v$, $\mathfrak{C}_v, \dots \mathfrak{L}_v$ eine beliebige Combination von Exponenten, welche der Congruenz

$$a^{\mathfrak{A}_v} b^{\mathfrak{B}_v} c^{\mathfrak{C}_v} \dots l^{\mathfrak{L}_v} \equiv x_v \pmod{M}$$

genügt, und setzt man:

$$-\frac{m}{a'} A^{(t)} \mathfrak{A}_v - \frac{m}{b'} B^{(t)} \mathfrak{B}_v - \dots - \frac{m}{l'} L^{(t)} \mathfrak{L}_v = \mathfrak{x}_v^{(t)},$$

so nimmt (18) folgende Gestalt an:

$$(M, x) = \frac{1}{f} \{ P^{\mathfrak{x}'} \Sigma' P^{\xi'} + P^{\mathfrak{x}''} \Sigma' P^{\xi''} + \dots + P^{\mathfrak{x}^{(f)}} \Sigma' P^{\xi^{(f)}} \}. \quad (19)$$

Zur Bestimmung der Anzahl derjenigen Theiler der Zahl $N$, welche nach dem Modul $M$ bezüglich die Reste $x_1$, $x_2$, $x_3, \dots x_f$ lassen, hat man daher folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
(M, x_1) &= \frac{1}{f} \{ P^{\mathfrak{x}_1'} \Sigma' P^{\xi'} + P^{\mathfrak{x}_1''} \Sigma' P^{\xi''} + \dots + P^{\mathfrak{x}_1^{(f)}} \Sigma' P^{\xi^{(f)}} \}, \\
(M, x_2) &= \frac{1}{f} \{ P^{\mathfrak{x}_2'} \Sigma' P^{\xi'} + P^{\mathfrak{x}_2''} \Sigma' P^{\xi''} + \dots + P^{\mathfrak{x}_2^{(f)}} \Sigma' P^{\xi^{(f)}} \}, \\
(M, x_3) &= \frac{1}{f} \{ P^{\mathfrak{x}_3'} \Sigma' P^{\xi'} + P^{\mathfrak{x}_3''} \Sigma' P^{\xi''} + \dots + P^{\mathfrak{x}_3^{(f)}} \Sigma' P^{\xi^{(f)}} \}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(M, x_f) &= \frac{1}{f} \{ P^{\mathfrak{x}_f'} \Sigma' P^{\xi'} + P^{\mathfrak{x}_f''} \Sigma' P^{\xi''} + \dots + P^{\mathfrak{x}_f^{(f)}} \Sigma' P^{\xi^{(f)}} \}.
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Die Formeln (20) nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man die Voraussetzung macht, dass $a$, $b$, $c, \dots l$, abgesehen von der Ordnung, mit den Zahlen $x_1$, $x_2$, $x_3$, .... $x_f$ übereinstimmen. Setzen wir in diesem Falle ausserdem noch voraus, es liege den Formeln (20) der ursprüngliche Ausdruck von $T$, nehmlich $T \equiv a^{\Sigma \mathfrak{a}} b^{\Sigma \mathfrak{b}} c^{\Sigma \mathfrak{c}} \dots l^{\Sigma \mathfrak{l}}$ zu Grunde, und bemerkt man, dass für $x_1 = a$, $\mathfrak{A}_1 = 1$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{D}_1 = \dots = \mathfrak{L}_1 = 0$, also $\mathfrak{x}_1 = -\frac{m}{a'} A$ gesetzt werden kann, so erhält man:

(21)

$$(M, a) = \frac{1}{f} \{ P^{-\frac{m}{a'} A'} \Sigma' P^{\xi'} + P^{-\frac{m}{a'} A''} \Sigma' P^{\xi''} + \dots + P^{-\frac{m}{a'} A^{(f)}} \Sigma' P^{\xi^{(f)}} \},$$

$$(M, b) = \frac{1}{f} \{ P^{-\frac{m}{b'} B'} \Sigma' P^{\xi'} + P^{-\frac{m}{b'} B''} \Sigma' P^{\xi''} + \dots + P^{-\frac{m}{b'} B^{(f)}} \Sigma' P^{\xi^{(f)}} \},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(M, l) = \frac{1}{f} \{ P^{-\frac{m}{l'} L'} \Sigma' P^{\xi'} + P^{-\frac{m}{l'} L''} \Sigma' P^{\xi''} + \dots + P^{-\frac{m}{l'} L^{(f)}} \Sigma' P^{\xi^{(f)}} \},$$

oder, wenn blos das allgemeine Glied geschrieben wird,

$$\left.\begin{aligned}
(M, a) &= \ldots + \frac{1}{f} P^{-\frac{m}{a'}A} \Sigma' P^{\frac{m}{a'}A\Sigma\mathfrak{a}+\frac{m}{b'}B\Sigma\mathfrak{b}+\ldots+\frac{m}{l'}L\Sigma\mathfrak{l}} + \ldots, \\
(M, b) &= \ldots + \frac{1}{f} P^{-\frac{m}{b'}B} \Sigma' P^{\frac{m}{a'}A\Sigma\mathfrak{a}+\frac{m}{b'}B\Sigma\mathfrak{b}+\ldots+\frac{m}{l'}L\Sigma\mathfrak{l}} + \ldots, \\
(M, c) &= \ldots + \frac{1}{f} P^{-\frac{m}{c'}C} \Sigma' P^{\frac{m}{a'}A\Sigma\mathfrak{a}+\frac{m}{b'}B\Sigma\mathfrak{b}+\ldots+\frac{m}{l'}L\Sigma\mathfrak{l}} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(M, l) &= \ldots + \frac{1}{f} P^{-\frac{m}{l'}L} \Sigma' P^{\frac{m}{a'}A\Sigma\mathfrak{a}+\frac{m}{b'}B\Sigma\mathfrak{b}+\ldots+\frac{m}{l'}L\Sigma\mathfrak{l}} + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

In den Formeln (20), (21), (22) wollen wir diejenigen Glieder, welche dem einfachsten Systeme $A = B = C = \ldots = L = 0$ entsprechen, als erste Glieder dieser Gleichungen bezeichnen, dieselben sind alle einander gleich, und zwar: $\frac{1}{f}\Sigma 1$.

Ebenso sieht man, dass in der Formel für $(M, 1)$ in dem Gleichungensystem (22) alle Coefficienten gleich $+1$ sind. Setzt man in (22) statt $f$ die Zahl $\mu = \varphi(M)$, und bedeuten $a, b, c, d, \ldots l$ die sämmtlichen Zahlen, welche $< M$ sind und mit $M$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind dieses die allgemeinsten Formeln zur Bestimmung der Anzahl congruenter Theiler irgend einer Zahl.

## §. 41.

In den Formeln (20), (21), (22) sind $m$ und $P$ nicht absolut bestimmt, man kann nehmlich für $m$ eine beliebige Zahl wählen, die durch die Exponenten $a', b', c', \ldots l'$ theilbar ist und für $P$ irgend eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$. Bedeutet $m'$ die kleinste Zahl, die durch $a', b', c', \ldots l'$ theilbar ist, und setzt man $m = \nu m'$ und $P^\nu = P'$, so ist $P'$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{m'} - 1 = 0$, und die erwähnten Gleichungen werden durch diese Substitutionen in ganz ähnliche verwandelt, in welchen $m$ durch $m'$ ersetzt ist und die primitive Wurzel sich auf die Gleichung $x^{m'} - 1 = 0$ bezieht (siehe §. 19.). Die Unbestimmtheit von $m$ gibt also zu keinem andern Systeme von Gleichungen Veranlassung. Nimmt man an, es sei $t$ zu $m$ relative Primzahl, so ist auch $P^t$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m - 1 = 0$. Erinnert man sich an die in §. 24. aufgeführten Eigenschaften derjenigen Systeme $A, B, C, \ldots L$, welche der Bedingung $S_1 = n$ genügen, so schliesst man daraus, dass eine an-

dere Wahl der primitiven Wurzel nur die Anordnung der Glieder in den Gleichungen (20), (21), (22), nicht aber jene selbst verändert.

§. 42.

Lässt man in den Formeln (21), (22) die Coefficienten unverändert, während man in dem allgemeinen Gliede der Summen $P$ durch $P^t$ ersetzt, so geben die neuen Formeln die Anzahl derjenigen Theiler der Zahl $N$ an, deren $t$te Potenz bezüglich von der Form

$$\begin{aligned} &Mx + a, \\ &Mx + b, \\ &\dots\dots \\ &Mx + l \end{aligned}$$

ist, wie man leicht findet, wenn man die seitherigen Entwickelungen unter der modificirten Voraussetzung noch einmal sich vergegenwärtigt.

§. 43.

Die Gleichungen (22) haben verschiedene Eigenschaften, von welchen die einfachsten jetzt entwickelt werden sollen.

1) Die Summe der gleichnamigen Coefficienten, nehmlich:

$$s = P^{-\frac{m}{a'}A} + P^{-\frac{m}{b'}B} + \dots + P^{-\frac{m}{l'}L}$$

ist im Allgemeinen gleich Null, den einzigen Fall ausgenommen, wo alle Coefficienten $A$, $B$, $C$, .... $L$ verschwinden und man $s = f$ erhält. Zum Beweise bilde man das Produkt $S_1 s$, dem wir folgende Form:

$$\begin{aligned} &\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A(\alpha+1) - \frac{m}{b'}B\beta - \frac{m}{c'}C\gamma - \dots - \frac{m}{l'}L\lambda} \\ &+ \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B(\beta+1) - \frac{m}{c'}C\gamma - \dots - \frac{m}{l'}L\lambda} \\ &+ \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \frac{m}{c'}C(\gamma+1) - \dots - \frac{m}{l'}L\lambda} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \frac{m}{c'}C\gamma - \dots - \frac{m}{l'}L(\lambda+1)} \end{aligned}$$

geben können, wo der Umfang jeder Summe durch die Ungleichheiten

$$a' > \alpha \geqq 0,$$

$$b' > \beta \geqq 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$l' > \lambda \geqq 0$$

und die Congruenz

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots . l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$$

bestimmt wird. Da man aus letzterer ableitet:

$$\left.\begin{array}{l} a^{\alpha+1} b^\beta c^\gamma \ldots . l^\lambda \equiv a \\ a^\alpha b^{\beta+1} c^\gamma \ldots . l^\lambda \equiv b \\ a^\alpha b^\beta c^{\gamma+1} \ldots . l^\lambda \equiv c \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots . l^{\lambda+1} \equiv l \end{array}\right\} \pmod{M},$$

so erhält man nach §. 5.:

$$sS_1 = S_a + S_b + S_c + \ldots + S_l$$

oder einfach:

$$sS_1 = \Sigma P^{-\frac{m}{a'}A\alpha - \frac{m}{b'}B\beta - \ldots . - \frac{m}{l'}L\lambda},$$

wo die Summation jetzt auszudehnen ist über die $a'b'c' \ldots . l'$ Systeme der $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda$, welche den Ungleichheiten

$$a' > \alpha \geqq 0,$$

$$b' > \beta \geqq 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$l' > \lambda \geqq 0$$

genügen. Die so definirte Summe ist aber gleich Null (siehe §. 27.), den einzigen Fall ausgenommen, wo alle Coefficienten $A, B, C, \ldots . L$ Null werden und die Summe den Werth $a'b'c' \ldots . l' = nf$ annimmt. Es ist daher $ns = 0$ oder $ns = nf$, also im Allgemeinen $s = 0$, und in dem erwähnten speciellen Falle, welcher den ersten Coefficienten der Gleichungen (22) entspricht, $s = f$. Da man auch schreiben kann:

$$s = p_{x_1} + p_{x_2} + p_{x_3} + \ldots . + p_{x_f},$$

so ergibt sich diese Eigenschaft auch schon aus §. 27. Nach §. 24. kann man diesen Satz in folgender Weise verallgemeinern:

Ist $t$ zu $m$ relative Primzahl, so wird die Summe der $t$ten Potenzen der gleichnamigen Coefficienten in den Gleichungen (22) im Allgemeinen gleich Null, und ist $t$ durch $m$ theilbar, so erhält diese Summe den Werth $f$. Eine Ausnahme findet bei der Summe der $t$ten Potenzen der ersten Coefficienten in den Gleichungen (22) Statt, hier erhält man für jedes $t$ den Werth $f$.

Durch Addition der Gleichungen (22) findet man somit:

$$(M, a) + (M, b) + (M, c) + \dots + (M, l) = \Sigma 1,$$

wo die Summation über alle Divisoren der Zahl $N$ auszudehnen ist. Es ist daher $(M, a) + (M, b) + \dots + (M, l)$ gleich der Anzahl sämmtlicher Theiler von $N$, wie a priori klar ist.

## §. 44.

2) Das Produkt der gleichnamigen Coefficienten in dem Systeme der Gleichungen (22) ist gleich der positiven oder negativen Einheit. Denn als Werth dieses Produktes erhält man:

$$p^{-\frac{m}{a'}A - \frac{m}{b'}B - \frac{m}{c'}C - \dots - \frac{m}{l'}L}.$$

Es ist aber für jedes System $A, B, C, \dots L$, welches in die Gleichungen (22) eingeht, $S_1 = n$, also:

$$\frac{m}{a'}A\alpha + \frac{m}{b'}B\beta + \dots + \frac{m}{l'}L\lambda \equiv 0 \pmod{m}.$$

Da nun nach dem verallgemeinerten Wilson'schen Satze (siehe §. 15.) nothwendig eine der zwei Congruenzen

$$abc \dots l \equiv 1 \pmod{M},$$
$$a^2b^2c^2 \dots l^2 \equiv 1 \pmod{M}$$

Statt findet, so ist im ersten Falle:

$$\frac{m}{a'}A + \frac{m}{b'}B + \frac{m}{c'}C + \dots + \frac{m}{l'}L \equiv 0 \pmod{m},$$

und im zweiten:

$$2\left(\frac{m}{a'}A + \frac{m}{b'}B + \frac{m}{c'}C + \dots + \frac{m}{l'}L\right) \equiv 0 \pmod{m},$$

woraus die Richtigkeit des Satzes sich ergibt. Findet der zweite

Fall Statt, so wird das Produkt der gleichnamigen Coefficienten eben so oft $+1$ als $-1$.

Um dieses zu beweisen, bilde man die Summe

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A-\frac{m}{b'}B-\frac{m}{c'}C-\ldots-\frac{m}{l'}L}$$

wo die Summation über alle Systeme $A, B, C, \ldots L$ auszudehnen ist, welche der Bedingung $S_1 = n$ genügen. Dieselbe hat nach §. 25. den Werth 0 oder $f$. Da im letztern Falle jedes Glied der Summe gleich 1 ist, so muss der erste Fall Statt finden oder

$$\Sigma P^{-\frac{m}{a'}A-\frac{m}{b'}B-\ldots-\frac{m}{l'}L}$$

sich auf Null reduciren, woraus, da jedes Glied dieser Summe gleich $\pm 1$ ist, die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

## §. 45.

3) In jeder von den Gleichungen (22), mit Ausnahme derjenigen für $(M, 1)$, ist die Summe der Coefficienten gleich Null und für $(M, 1)$ wird dieselbe gleich $f$. Es ist dieses ein specieller Fall von dem allgemeinen Satze §. 25. Nach demselben ist z. B. $\Sigma P^{-\frac{m}{b'}B}$ im Allgemeinen gleich Null; soll diese Summe aber den Werth $f$ haben, so muss $0, 1, 0, 0, \ldots 0$ ein System für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ sein, welches der Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda \equiv 1 \pmod{M}$ genügt; hieraus ergibt sich aber $b \equiv 1 \pmod{M}$. Von der Richtigkeit des Satzes kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen:

Da nach §. 32. der Coefficient $B$ jeden Werth der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots b'-1$ so oft annimmt, als $\frac{f}{b'}$ Einheiten enthält, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\Sigma P^{-\frac{m}{b'}B} = \frac{f}{b'}(1 + P^{-\frac{m}{b'}} + P^{-2\cdot\frac{m}{b'}} + \ldots + P^{-(b'-1)\frac{m}{b'}}) = \frac{f}{b'}\frac{P^{-m}-1}{P^{-\frac{m}{b'}}-1},$$

welche zu denselben Folgerungen wie vorhin Veranlassung gibt.

Allgemeiner lässt sich der Satz auf folgende Weise ausdrücken: In jeder von den Gleichungen (22), mit Ausnahme derjenigen für $(M, 1)$, hat die Summe der $t$ten Potenzen aller Coefficienten den Werth Null, wenn $t$ zu $m$ relative Primzahl ist, und wird $t$ durch $m$ theilbar vorausgesetzt, so ist diese Summe gleich $f$. Da in

der Gleichung für $(M, 1)$ alle Coefficienten gleich 1 sind, so wird für ein beliebiges $t$ der Werth der entsprechenden Summe gleich $f$.

### §. 46.

4) In jeder von den Gleichungen (22) ist das Produkt der Coefficienten gleich $\pm 1$. Denn da z. B. $B$ jeden Werth der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots b'-1$ so oft annimmt, als $\frac{f}{b'}$ Einheiten enthält, so wird das Produkt der Coefficienten in $(M, b)$ gleich

$$P^{-\frac{m}{b'}(1+2+3+\ldots+b'-1)\frac{f}{b'}} = P^{-\frac{m}{2}(b'-1)\frac{f}{b'}},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

Die Eigenschaften §§. 43., 44., 45., 46., welche hier der Kürze halber für das System der Gleichungen (21), (22) bewiesen wurden, haben ganz unverändert auch in dem Systeme der Gleichungen (20) Giltigkeit, wovon man sich auf ähnliche Weise überzeugen kann.

### §. 47.

Was nun die Ausführung der Summationen betrifft, welche in den Gleichungen (20), (21), (22) vorzunehmen sind, so hat dieselbe keine Schwierigkeit. Wir führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

Ein Produkt von der Form

$$\frac{P^{k(\alpha_1+1)}-1}{P^k-1} \cdot \frac{P^{k(\alpha_2+1)}-1}{P^k-1} \cdot \frac{P^{k(\alpha_3+1)}-1}{P^k-1}, \ldots \quad (23)$$

wo $P$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m-1=0$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die frühere Bedeutung §. 37. (1) haben, und $k$ eine positive oder negative ganze Zahl ist, werde durch das Symbol $(k:\alpha)$ bezeichnet. Ist $k$ durch $m$ theilbar, so verwandelt sich (23) in:

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots = (m:\alpha),$$

welches der Ausdruck ist für die Anzahl sämmtlicher Theiler einer Zahl, welche, in Primfaktoren zerlegt, folgende Form hat:

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots\ldots$$

Statt $(m:\alpha)$, welches von $m$ unabhängig ist, werde die einfachere Bezeichnung $(\alpha)$ gebraucht.

Für einen konstanten Werth von $k$, der durch $m$ nicht theilbar ist, kann der Faktor $\frac{P^{k(\alpha+1)}-1}{P^k-1}$ von $(k:\alpha)$ nur $m$ verschiedene Werthe annehmen, jenachdem $\alpha$ einer Zahl der Reihe 0, 1, 2, 3, .... $m-1$ congruent ist. Oder in Zeichen ausgedrückt, es ist:

$$(k:\alpha)=(k':\alpha), \quad \text{sobald} \quad k\equiv k' \pmod{m}.$$

Ist insbesondere $\alpha\equiv m-1 \pmod{m}$, so erhält man Null, woraus hervorgeht, dass $(k:\alpha)$ verschwindet, sobald $k$ durch $m$ nicht theilbar und irgend einer der Exponenten in dem Symbole $(k:\alpha)$ die Congruenz $\alpha\equiv m-1 \pmod{m}$ erfüllt. Bedeutet z. B. $P$ die primitive Wurzel der Gleichung $x^2-1=0$ oder $-1$, und ist $k$ durch $m$ nicht theilbar, also ungerade, und somit $P^k=P$, so verwandelt sich $(k:\alpha)$ in folgendes Produkt:

$$\frac{1+(-1)^{\alpha_1}}{2}\cdot\frac{1+(-1)^{\alpha_2}}{2}\cdot\frac{1+(-1)^{\alpha_3}}{2}\cdots$$

und werde durch $[\alpha]$ bezeichnet. Das Symbol $[\alpha]$ ist daher gleich der positiven Einheit, wenn die Exponenten $\alpha$ alle gerade sind, und Null im anderen Falle. Die Formeln (22) nehmen dann folgende Gestalt an:

$$(M,\ a)=\ldots.+\frac{1}{f}P^{-\frac{m}{a'}A}\cdot\left(\frac{m}{a'}A:\alpha\right)\cdot\left(\frac{m}{b'}B:\beta\right)\ldots.\left(\frac{m}{l'}L:\lambda\right)+\ldots.,$$

$$(M,\ b)=\ldots.+\frac{1}{f}P^{-\frac{m}{b'}B}\cdot\left(\frac{m}{a'}A:\alpha\right)\cdot\left(\frac{m}{b'}B:\beta\right)\ldots.\left(\frac{m}{l'}L:\lambda\right)+\ldots.,$$

$$(M,\ c)=\ldots.+\frac{1}{f}P^{-\frac{m}{c'}C}\cdot\left(\frac{m}{a'}A:\alpha\right)\left(\frac{m}{b'}B:\beta\right)\ldots.\left(\frac{m}{l'}L:\lambda\right)+\ldots.,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(M,\ l)=\ldots.+\frac{1}{f}P^{-\frac{m}{l'}L}\cdot\left(\frac{m}{a'}A:\alpha\right)\cdot\left(\frac{m}{b'}B:\beta\right)\ldots.\left(\frac{m}{l'}L:\lambda\right)+\ldots.$$

Da für das erste Glied in diesen Formeln $A=B=C=\ldots.=L=0$ ist, so wird dasselbe gleich $\frac{1}{f}(\alpha)(\beta)(\gamma)\ldots.(\lambda)$.

## VI.

### Anwendung des Vorhergehenden auf einige Beispiele.

Wir wollen zum Schlusse die gefundenen Formeln noch auf einige specielle Fälle anwenden.

§. 48.

Die Zahl $N$ enthalte nur Primfaktoren von nachstehenden zwei Formen:

$$a \equiv 1 \pmod{M},$$
$$b \equiv (M-1) \pmod{M}.$$

Hier ist $a' = 1$, $b' = 2$, man setze daher $m = 2$ und nehme für $P$ die primitive Wurzel der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ oder $P = -1$. Nach §. 28. sind nun die Systeme $A$, $B$, welche der Bedingung $S_1 = n$ genügen, die folgenden zwei:

| $A$, | $B$ |
|---|---|
| 0, | 0 |
| 0, | 1. |

Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichungen (22), welche für diesen Fall folgende Gestalt annehmen:

$$(M, a) = \ldots + \tfrac{1}{2} P^{-2A} \Sigma' P^{2A\Sigma a + B\Sigma b} + \ldots,$$
$$(M, b) = \ldots + \tfrac{1}{2} P^{-B} \Sigma' P^{2A\Sigma a + B\Sigma b} + \ldots,$$

erhält man:

$$(M, 1) = \tfrac{1}{2}\{\Sigma 1 + \Sigma(-1)^{\Sigma b}\},$$
$$(M, M-1) = \tfrac{1}{2}\{\Sigma 1 - \Sigma(-1)^{\Sigma b}\},$$

und durch Ausführung der Summationen:

$$\left.\begin{aligned}(M, 1) &= \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta) + (\alpha)[\beta]\},\\ (M, M-1) &= \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta) - (\alpha)[\beta]\}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Hat der Modul $M$ einen der drei Werthe 3, 4, 6, und ist $N$ zu $M$ relative Primzahl, so lassen sich sämmtliche Divisoren von $N$ in zwei Gruppen anordnen, welchen nachstehende lineäre Formen entsprechen:

$$Mx + 1, \quad Mx + M - 1,$$

und es geben alsdann die Formeln (1) die Anzahl der in jeder Gruppe enthaltenen Divisoren der Zahl $N$.

§. 49.

Als zweites Beispiel werde angenommen, der Modul $M$ sei durch 4 theilbar und die Zahl $N$ enthalte nur Primfaktoren von folgenden vier Linearformen:

$$\begin{aligned} a &\equiv 1 \pmod{M}, \\ b &\equiv \frac{M}{2} - 1 \pmod{M}, \\ c &\equiv \frac{M}{2} + 1 \pmod{M}, \\ d &\equiv M - 1 \pmod{M}, \end{aligned}$$

woraus man ableitet:

$$b^2 \equiv c^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{M},$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} bc &\equiv d \\ bd &\equiv c \\ cd &\equiv d \\ bcd &\equiv 1. \end{aligned}\right\} \pmod{M}.$$

Daher ist $a' = 1$, $b' = c' = d' = 2$, also $m = 2$ und $P = -1$.

Die Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche der Congruenz $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \equiv 1 \pmod{M}$ genügen, sind nun die folgenden:

| $\alpha$, | $\beta$, | $\gamma$, | $\delta$, |
| --- | --- | --- | --- |
| 0, | 0, | 0, | 0, |
| 1, | 1, | 1, | 1, |

also $n = 2$. Die Summe $S_1$ oder $\Sigma P^{-2A\alpha - B\beta - C\gamma - D\delta}$ wird daher: $1 + P^{-(B+C+D)}$.

Zur Bestimmung derjenigen Combinationen $A, B, C, D$, welche der Bedingung $S_1 = n$ genügen, erhält man somit die Congruenz:

$$B + C + D \equiv 0 \pmod{2}$$

und leitet hieraus folgende 4 Systeme der Coefficienten $A, B, C, D$ ab:

| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| 0, | 0, | 0, | 0, |
| 0, | 1, | 0, | 1, |
| 0, | 1, | 1, | 0, |
| 0, | 0, | 1, | 1. |

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (22) ein, welche in diesem Falle sich auf nachstehende:

$$\begin{aligned} (M, a) &= \dots + \tfrac{1}{4} P^{-2A} \Sigma' P^{2A\Sigma\mathfrak{a} + B\Sigma\mathfrak{b} + C\Sigma\mathfrak{c} + D\Sigma\mathfrak{d}} + \dots, \\ (M, b) &= \dots + \tfrac{1}{4} P^{-B} \Sigma' P^{2A\Sigma\mathfrak{a} + B\Sigma\mathfrak{b} + C\Sigma\mathfrak{c} + D\Sigma\mathfrak{d}} + \dots, \\ (M, c) &= \dots + \tfrac{1}{4} P^{-C} \Sigma' P^{2A\Sigma\mathfrak{a} + B\Sigma\mathfrak{b} + C\Sigma\mathfrak{c} + D\Sigma\mathfrak{d}} + \dots, \\ (M, d) &= \dots + \tfrac{1}{4} P^{-D} \Sigma' P^{2A\Sigma\mathfrak{a} + B\Sigma\mathfrak{b} + C\Sigma\mathfrak{c} + D\Sigma\mathfrak{d}} + \dots \end{aligned}$$

reduciren, so erhält man:

$$(M, a) = \tfrac{1}{4}\{\Sigma 1 + \Sigma P^{\Sigma b + \Sigma b} + \Sigma P^{\Sigma b + \Sigma c} + \Sigma P^{\Sigma c + \Sigma b}\},$$
$$(M, b) = \tfrac{1}{4}\{\Sigma 1 - \Sigma P^{\Sigma b + \Sigma b} - \Sigma P^{\Sigma b + \Sigma c} + \Sigma P^{\Sigma c + \Sigma b}\},$$
$$(M, c) = \tfrac{1}{4}\{\Sigma 1 + \Sigma P^{\Sigma b + \Sigma b} - \Sigma P^{\Sigma b + \Sigma c} - \Sigma P^{\Sigma c + \Sigma b}\},$$
$$(M, d) = \tfrac{1}{4}\{\Sigma 1 - \Sigma P^{\Sigma b + \Sigma b} + \Sigma P^{\Sigma b + \Sigma c} - \Sigma P^{\Sigma c + \Sigma b}\};$$

oder durch Ausführung der Summationen:

(2)

$$(M, a) = \tfrac{1}{4}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) + (\alpha)[\beta](\gamma)[\delta] + (\alpha)[\beta][\gamma](\delta) + (\alpha)(\beta)[\gamma][\delta]\},$$
$$(M, b) = \tfrac{1}{4}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) - (\alpha)[\beta](\gamma)[\delta] - (\alpha)[\beta][\gamma](\delta) + (\alpha)(\beta)[\gamma][\delta]\},$$
$$(M, c) = \tfrac{1}{4}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) + (\alpha)[\beta](\gamma)[\delta] - (\alpha)[\beta][\gamma](\delta) - (\alpha)(\beta)[\gamma][\delta]\},$$
$$(M, d) = \tfrac{1}{4}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) - (\alpha)[\beta](\gamma)[\delta] + (\alpha)[\beta][\gamma](\delta) - (\alpha)(\beta)[\gamma][\delta]\}.$$

Durch Addition von je zwei dieser erhält man folgende Paare von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(M, a) + (M, d) &= \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) + (\alpha)[\beta][\gamma](\delta)\},\\ (M, b) + (M, c) &= \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) - (\alpha)[\beta][\gamma](\delta)\};\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}(M, a) + (M, c) &= \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) + (\alpha)[\beta](\gamma)[\delta]\},\\ (M, b) + (M, d) &= \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) - (\alpha)[\beta](\gamma)[\delta]\};\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}(M, a) + (M, b) &= \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) + (\alpha)(\beta)[\gamma][\delta]\},\\ (M, c) + (M, d) &= \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) - (\alpha)(\beta)[\gamma][\delta]\};\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und hieraus ergeben sich durch Subtraction der zwei Gleichungen eines jeden Paares die nachstehenden:

$$(M, a) + (M, d) - (M, b) - (M, c) = (\alpha)[\beta][\gamma](\delta), \quad (6)$$
$$(M, a) + (M, c) - (M, b) - (M, d) = (\alpha)[\beta](\gamma)[\delta], \quad (7)$$
$$(M, a) + (M, b) - (M, c) - (M, d) = (\alpha)(\beta)[\gamma][\delta]. \quad (8)$$

Setzt man voraus, dass die Zahl $N$ von der Form $b$ oder $c$ ist, so können nicht alle $\beta$ und alle $\gamma$ gerade sein, weil sonst $N$ die Form $a$ oder $d$ hätte, es ist daher $[\beta][\gamma] = 0$, und aus (6) ergibt sich folgender Satz:

1) Für jede Zahl $N$ von der Form $b$ oder $c$ ist

$$(M, a) + (M, d) - (M, b) - (M, c) = 0.$$

Und ebenso leitet man vermittelst (7) und (8) die nachstehenden Folgerungen ab.

2) Für jede Zahl von der Form $b$ oder $d$ findet die Gleichung

$$(M, a) + (M, c) - (M, b) - (M, d) = 0,$$

und ebenso

3) für jede Zahl der Form $c$ oder $d$ die Gleichung

$$(M, a) + (M, b) - (M, c) - (M, d) = 0$$

Statt.

Ist $M = 8$ oder 12, so geben die Formeln (2) die Anzahl aller congruenten Theiler einer Zahl $N$ an, welche zu $M$ relative Primzahl ist.

Aehnliche Formeln wie für $M = 8$ und 12 erhält man auch für $M = 24$, so wie überhaupt für diejenigen Fälle, wo die Zahl $N$ nur solche Primfaktoren enthält, welche zum Exponenten 1 oder 2 gehören.

## §. 50.

Schliesslich wollen wir noch die Formeln für $M = 5$ ableiten. In diesem Falle ist:

$$\begin{aligned} a &= 1, & a' &= 1, \\ b &= 2, & b' &= 4, \\ c &= 3, & c' &= 4, \\ d &= 4, & d' &= 2; \end{aligned}$$

also $m = 4$, $P = i$ oder $-i$.

Die Systeme, für welche $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \equiv 1 \pmod{M}$, sind die folgenden:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|
| 0, | 0, | 0, | 0 |
| 0, | 1, | 1, | 0 |
| 0, | 2, | 2, | 0 |
| 0, | 3, | 3, | 0 |
| 0, | 0, | 2, | 1 |
| 0, | 1, | 3, | 1 |
| 0, | 2, | 0, | 1 |
| 0, | 3, | 1, | 1. |

Es ist daher $n=8$, $f=4$, und für das allgemeinste System $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kann man setzen:

$$\begin{aligned}&\alpha=0,\\&\beta\equiv x \pmod{4},\\&\gamma\equiv x+2y \pmod{4},\\&\delta\equiv y \pmod{2};\end{aligned}$$

wo für $x$ die Zahlen 0, 1, 2, 3 und für $y$ 0 und 1 zu nehmen ist. Durch Substitution dieser Werthe nimmt die Summe $S_1$ oder

$$\Sigma P^{-4A\alpha-B\beta-C\gamma-2D\delta}$$

folgende Gestalt an:

$$\sum_0^3 P^{-x(B+C)} \sum_0^1 P^{-2y(C+D)},$$

oder durch Ausführung der Summationen:

$$\frac{P^{-4(B+C)}-1}{P^{-(B+C)}-1}\cdot\frac{P^{-4(C+D)}-1}{P^{-2(C+D)}-1}.$$

Als Bedingungen, damit $S_1=8$ wird, erhält man daher die zwei Congruenzen:

$$B+C\equiv 0 \pmod{4},\quad C+D\equiv 0 \pmod{2},$$

und hieraus ergeben sich nachstehende Systeme von

| $A$, | $B$, | $C$, | $D$: |
|---|---|---|---|
| 0, | 0, | 0, | 0 |
| 0, | 2, | 2, | 0 |
| 0, | 3, | 1, | 1 |
| 0, | 1, | 3, | 1. |

Die Gleichungen (22), welche sich für $M=5$ auf folgende:

$$\begin{aligned}(M,a)&=\ldots.+\tfrac{1}{4}P^{-4A}\Sigma' P^{B\Sigma b+C\Sigma c+2D\Sigma b}+\ldots.,\\(M,b)&=\ldots.+\tfrac{1}{4}P^{-B}\Sigma' P^{B\Sigma b+C\Sigma c+2D\Sigma b}+\ldots.,\\(M,c)&=\ldots.+\tfrac{1}{4}P^{-C}\Sigma' P^{B\Sigma b+C\Sigma c+2D\Sigma b}+\ldots.,\\(M,d)&=\ldots.+\tfrac{1}{4}P^{-2D}\Sigma' P^{B\Sigma b+C\Sigma c+2D\Sigma b}+\ldots.\end{aligned}$$

reduciren, werden alsdann:

$$\left.\begin{aligned}(M,a)&=\tfrac{1}{4}\{\Sigma 1+\Sigma''+\Sigma'''+\Sigma^{IV}\},\\(M,b)&=\tfrac{1}{4}\{\Sigma 1+P^{-2}\Sigma''+P^{-3}\Sigma'''+P^{-1}\Sigma^{IV}\},\\(M,c)&=\tfrac{1}{4}\{\Sigma 1+P^{-2}\Sigma''+P^{-1}\Sigma'''+P^{-3}\Sigma^{IV}\},\\(M,d)&=\tfrac{1}{4}\{\Sigma 1+\Sigma''+P^{-2}\Sigma'''+P^{-2}\Sigma^{IV}\};\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

wo der Kürze halber

$$\begin{aligned}\Sigma'' &= \Sigma' P^{2\Sigma\mathfrak{b}+2\Sigma\mathfrak{c}},\\ \Sigma''' &= \Sigma' P^{3\Sigma\mathfrak{b}+\Sigma\mathfrak{c}+2\Sigma\mathfrak{d}},\\ \Sigma^{IV} &= \Sigma' P^{\Sigma\mathfrak{b}+3\Sigma\mathfrak{c}+2\Sigma\mathfrak{d}}\end{aligned}$$

gesetzt wurde. Es ist aber:

$$\Sigma' = (\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta), \quad \Sigma'' = \Sigma(-1)^{\Sigma\mathfrak{b}+\Sigma\mathfrak{c}} = (\alpha)[\beta][\gamma](\delta).$$

Um $\Sigma'''$ und $\Sigma^{IV}$ zu finden, bemerke man, dass für $P=i$ und $k=1$ der allgemeine Faktor des Symbols $(k:\alpha)$, nehmlich $\frac{P^{k(\alpha+1)}-1}{P^k-1}$, die Werthe $1, 1+i, i, 0$ annimmt, jenachdem $\alpha \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$.

Versteht man daher unter $\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ die positive oder negative Einheit, jenachdem die Congruenz $x^2 \equiv \alpha \pmod{4}$ möglich oder unmöglich ist, so kann man setzen:

$$\frac{i^{\alpha+1}-1}{i-1} = \frac{1+\left(\frac{\alpha}{4}\right)}{2} + i\,\frac{1-\left(\frac{-\alpha}{4}\right)}{2} \quad \ldots\ldots; \qquad (10)$$

für $P=i$ und $k=3$, also $P^3=-P$, nimmt derselbe Faktor den zu (10) conjugirten Werth an, nehmlich:

$$\frac{(-i)^{\alpha+1}-1}{(-i)-1} = \frac{1+\left(\frac{\alpha}{4}\right)}{2} - i\,\frac{1-\left(\frac{-\alpha}{4}\right)}{2} \quad \ldots\ldots \qquad (11)$$

Für $P=i$ und $k=2$ geht der allgemeine Faktor von $(k:\alpha)$ hingegen über in $\frac{1+(-1)^\alpha}{2}$, so dass $(2:\alpha)=[\alpha]$ erhalten wird. Bezeichnet man nun $(1:\alpha)$ und $(3:\alpha)$, d. h. die zu einander conjugirten Produkte

$$\left\{\frac{1+\left(\frac{\alpha_1}{4}\right)}{2} + i\,\frac{1-\left(\frac{-\alpha_1}{4}\right)}{2}\right\}\left\{\frac{1+\left(\frac{\alpha_2}{4}\right)}{2} + i\,\frac{1-\left(\frac{-\alpha_2}{4}\right)}{2}\right\}\ldots,$$

$$\left\{\frac{1+\left(\frac{\alpha_1}{4}\right)}{2} - i\,\frac{1-\left(\frac{-\alpha_1}{4}\right)}{2}\right\}\left\{\frac{1+\left(\frac{\alpha_2}{4}\right)}{2} - i\,\frac{1-\left(\frac{-\alpha_2}{4}\right)}{2}\right\}\ldots$$

durch $\{\alpha\}$ und $\{\alpha\}'$, so sind dieselben gleich Null, wenn irgend einer von den Exponenten $\alpha$ nach dem Modul 4 den Rest 3 lässt. Sind aber alle Exponenten $\equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$, und nennt man die

Anzahl derer, welche $\equiv 1, 2 \pmod{4}$ sind, bezüglich $m'$ und $m''$, so erhält man:

$$\{\alpha\} = (1+i)^{m'} i^{m''},$$
$$\{\alpha\}' = (1-i)^{m'} (-i)^{m''}.$$

Die Gleichungen (9) gehen daher in die folgenden über:

$$(M, a) = \tfrac{1}{4}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) + (\alpha)[\beta][\gamma](\delta) + (\alpha)\{\beta\}'\{\gamma\}[\delta] + (\alpha)\{\beta\}\{\gamma\}'[\delta]\},$$
$$(M, b) = \tfrac{1}{4}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) - (\alpha)[\beta][\gamma](\delta) + i(\alpha)\{\beta\}'\{\gamma\}[\delta] - i(\alpha)\{\beta\}\{\gamma\}'[\delta]\},$$
$$(M, c) = \tfrac{1}{4}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) - (\alpha)[\beta][\gamma](\delta) - i(\alpha)\{\beta\}'\{\gamma\}[\delta] + i(\alpha)\{\beta\}\{\gamma\}'[\delta]\},$$
$$(M, d) = \tfrac{1}{4}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) + (\alpha)[\beta][\gamma](\delta) - (\alpha)\{\beta\}'\{\gamma\}[\delta] - (\alpha)\{\beta\}\{\gamma\}'[\delta]\};$$

und hieraus ergeben sich die einfacheren:

$$(M, a) + (M, d) = \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) + (\alpha)[\beta][\gamma](\delta)\},$$
$$(M, b) + (M, c) = \tfrac{1}{2}\{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta) - (\alpha)[\beta][\gamma](\delta)\},$$
$$(M, a) + (M, d) - (M, b) - (M, c) = (\alpha)[\beta][\gamma](\delta);$$

woraus ähnliche Folgerungen wie in §. 49. abgeleitet werden können.

# XIV.

## Zum Apollonischen Problem.

Von

Herrn Prof. Dr. *A. Kurz*

in Zug.

---

Wendet man den Begriff der Aehnlichkeitspolare und der Potenzlinie zweier Kreise auch auf den Kreis in Verbindung mit einer Geraden oder mit einem Punkte an, so gewinnt man eine einheitliche direkte Lösung der Aufgaben des Apollonischen Problems, welche vom konstruktiven Standpunkte ganz empfehlenswerth erscheint.

Zu dem Ende sollen in Kürze jene Zusätze angeführt und nach einer engen Zusammenfassung sämmtlicher, das Construktionsverfahren begründender Sätze auf eine der genannten Aufgaben beispielsweise angewendet werden.

1. *α*) Der Kreis in Verbindung mit einem Punkte hat diesen als Aehnlichkeitspunkt. Die Polare desselben ist die Aehnlichkeitspolare.

*β*) Der Kreis in Verbindung mit einer Geraden hat als Aehnlichkeitspunkte die Endpunkte des auf jener Geraden senkrechten Durchmessers. Der entferntere derselben ist der äussere, der nähere der innere Aehnlichkeitspunkt. Die durch dieselben gelegten Tangenten sind die äussere und innere Aehnlichkeitspolare des Kreises mit der Geraden *).

2. *α*) Die Potenzlinie — der geometrische Ort aller Punkte gleicher äusserer Potenzen für zwei Kreise — eines Kreises in Verbindung mit einem Punkte ist die zur Axe Senkrechte, deren

---

*) Sehr instruktiv hierüber der algebraische Nachweis.

Abstand vom Punkte das geometrische Mittel ist zwischen ihren Abständen vom nächsten und fernsten Punkte der Peripherie.

Man findet leicht einen Punkt dieser Potenzlinie, wenn man durch den fraglichen Punkt einen Kreisbogen legt, der den fraglichen Kreis schneidet (oder berührt); die betreffende Sekante (beziehungsweise Tangente) und die durch jenen Punkt gelegte Tangente des Kreisbogens schneiden sich in einem Punkte der Potenzlinie.

*β*) Die Potenzlinie eines Kreises in Verbindung mit einer Geraden ist diese selbst. (S. die Note auf vorsteh. Seite.)

3. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichnamig wie in Taf. II. Fig. 10. oder ungleichnamig berührt, so bilden die beiden gemeinschaftlichen Tangenten $DP$ und $dp$ die Potenzlinien der sich berührenden Kreise; der Durchschnittspundt $P_1$ der beiden Tangenten ist daher der Potenzpunkt der drei Kreise und die zur Axe $Cc$ Senkrechte $P_1G_1F_1$ die Potenzlinie der beiden berührten Kreise ($C$, $c$).

Zieht man von einem der Durchschnittspunkte ($G_1$) dieser Linie mit dem Berührungskreise die Geraden nach den Berührungspunkten $D$ und $d$, so erhält man die Punkte $G$ und $g$, deren Radien $CG$ und $cg$ mit dem Radius $C_1G_1$ parallel sind. Durch die Perpendikel $PGF$ und $pgf$ auf die Axe $Cc$ werden ferner die beiden berührten Kreise in ähnliche Segmente getheilt, den Segmenten des Berührungskreises durch $P_1G_1F_1$.

Diese Senkrechten $FG$ und $fg$ sind aber die äusseren Aehnlichkeitspolaren der beiden Kreise aus $C$ und $c$ (im Falle ihrer ungleichnamigen Berührung die inneren), d. h. es ist $R^2 = CF.CA$ und $r^2 = cf.cA$, wenn $R$ und $r$ die Radien und $A$ der betreffende Aehnlichkeitspunkt ist. [Zum Beweise ziehe man die äussere, beziehungsweise die innere Aehnlichkeitslinie $AdD$, d. i. die sogenannte Aehnlichkeitsaxe, und die Verbindungslinien $CNP$, $cnp$, $C_1N_1P_1$, so ist zunächst $C_1N_1P_1$ senkrecht auf $AD$, und dass $CNP$ ebenfalls senkrecht auf $AD$ ist, folgt aus der leicht zu erweisenden Aehnlichkeit der Dreiecke $CGP$ und $C_1G_1P_1$. Somit ist $R^2 = CN.CP$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $CPF$ und $CNA$ auch $R^2 = CF.CA$; analog $r^2 = cf.cA$].

Wenn daher ein Kreis drei andere berührt und man zieht je nach der gleichnamigen oder ungleichnamigen Berührung — gleichgültig also, ob es äussere oder innere Berührung sei — die äusseren oder inneren Aehnlichkeitspolaren je zweier der berührten Kreise, sowie deren Potenzlinien: so werden der Berührungskreis durch diese und die berührten Kreise durch jene in beziehungs-

weise ähnliche Segmente zerschnitten. Taf. II. Fig. 11. zeigt den Berührungskreis ($C$) und einen der drei berührten Kreise ($C_1$) mit seinen Aehnlichkeitspolaren $M_1N_1$ und $R_1S_1$ in Bezug auf die beiden anderen berührten Kreise; die dazu parallelen und gleichen Centriwinkeln angehörenden Sehnen $MN$ und $RS$ sind sonach die betreffenden Potenzlinien. Daraus ist leicht zu ersehen, dass die Verbindungslinie des Potenzpunktes $O$ mit dem Durchschnittspunkte $O_1$ der beiden Aehnlichkeitspolaren durch den Berührungspunkt $E$ geht, resp. durch die beiden Berührungspunkte $E$ und $E_1$, welche den beiderlei Berührungen eines und desselben Kreises durch den vierten Kreis entsprechen.

4. Hierauf beruht die direkte Lösung der allgemeinsten Aufgabe des Apollonischen Problemes:

Sollen drei Kreise von einem vierten berührt werden, so konstruire man den Potenzpunkt der ersteren und je nach der gleichnamigen oder ungleichnamigen Berührung je zweier derselben die äusseren oder inneren Aehnlichkeitspolaren. Die Verbindungslinie des Potenzpunktes mit dem Durchschnittspunkte je zweier einem Kreise angehöriger Aehnlichkeitspolaren liefert die beiden Berührungspunkte des fraglichen Kreises (für äussere oder innere Berührung).

5. Wie passend nun dieses direkte Construktionsverfahren auf die übrigen Aufgaben des Apollonischen Problems sich anwenden lässt, zeige endlich als Beispiel die Aufgabe:

Es sollen die beiden Kreise gesucht werden, welche durch den gegebenen Punkt $D$ (Taf. II. Fig. 12.) gehen und den gegebenen Kreis ($C$) und die gegebene Gerade $AB$ gleichnamig berühren. (Also äussere Berührung des gegebenen und gesuchten Kreises.)

Dazu konstruire man die (Aehnlichkeits-)Polare $EF$ des gegebenen Kreises für den Punkt $D$ und die äussere Aehnlichkeitspolare $GL$ desselben hinsichtlich der Geraden $AB$ (s. 1. $\alpha$) u. $\beta$)); dann ist $O$ der Durchschnittspunkt der Aehnlichkeitspolaren. Ferner konstruirt man die Potenzlinie $MN$ des Kreises ($C$) hinsichtlich des Punktes $D$ (s. 2. $\alpha$)), während die Potenzlinie des Kreises ($C$) und der $AB$ diese Gerade selbst ist (s. 2. $\beta$)); daher $M$ der Potenzpunkt des gegebenen Kreises, Punktes und der Geraden. Die Linie $MO$ giebt die beiden Berührungspunkte $R$ und $R_1$ der beiden gesuchten Kreise.

Der Forderung der ungleichnamigen Berührung, also der inneren Berührung des gegebenen Kreises, hätte statt der Tangente $GL$ in gleicher Weise die Tangente in $H$ entsprochen.

# XV.

## Methode zur Berechnung einer Transscendenten.

Von

Herrn *Eugen Lommel*,

Professor in Schwyz.

---

Vorerinnerung. Die Lichtstärke in irgend einem Punkte des Beugungsbildes, welches ein homogener Lichtpunkt, durch eine beliebige Oeffnung betrachtet, hervorbringt, wird ausgedrückt durch die Summe:

$$\left(\iint \cos(xv+yw)\,dv\,dw\right)^2+\left(\iint \sin(xv+yw)\,dv\,dw\right)^2,$$

worin $v$ und $w$ die Coordinaten irgend eines Punktes der Oeffnung vorstellen und die doppelten Integrationen sich über die Gesammtoberfläche der Oeffnung erstrecken, während die Grössen $x$ und $y$ den Coordinaten des Bildpunktes direkt, der Wellenlänge der einfallenden Strahlen aber umgekehrt proportional sind *). Die Werthe der beiden Doppelintegrale lassen sich leicht in geschlossener Form erhalten, so lange man mit geradlinig begrenzten Oeffnungen zu thun hat. Sobald es sich aber um krummlinig begrenzte Oeffnungen handelt, können jene Integrale nur in Form unendlicher Reihen angegeben werden. Unter allen krummlinig begrenzten Oeffnungen ist die kreisförmige für die Anwendungen die wichtigste. Schwerd verschaffte sich, in seinem bekannten Werke über die Beugungserscheinungen, die Werthe der für eine Kreisöffnung geltenden Intensitätsfunktion dadurch, dass er statt des Kreises das eingeschriebene 180-Eck berechnete; dabei musste jeder Werth der Funktion aus einem Ausdruck gefunden werden,

---

*) S. meine Abhandlung über die Beugung im Archiv Thl. XXXVI. S. 385. ff.

welcher aus 45 nicht sehr einfachen Gliedern besteht. Indem ich nun bestrebt war, die Werthe dieser transscendenten Funktion durch eine kürzere Methode aufzufinden, trachtete ich zugleich, auch noch andere verwandte Transscendenten mit dieser einmal berechneten in Verbindung zu bringen. Die Resultate dieser Bemühungen sind in den folgenden Zeilen enthalten.

---

§. 1. Werden die beiden obigen Doppelintegrale, deren Quadratsumme die Intensität des Beugungsbildes ausdrückt, über die ganze Oberfläche eines Kreises vom Radius 1 ausgedehnt, so dass die Veränderlichen $v$ und $w$ an die Bedingung $v^2+w^2 \overline{\overline{<}} 1$ gebunden erscheinen, so verschwindet das zweite derselben; führt man hierauf in das erste statt der Veränderlichen $v$ und $w$ mittelst der Gleichungen

$$v\sqrt{x^2+y^2}=xv'-yw', \quad w\sqrt{x^2+y^2}=yv'+xw'$$

die neuen Veränderlichen $v'$ und $w'$ ein, so erhält man zunächst:

$$\iint \cos(xv+yw)\,dv\,dw=\iint \cos(v'\sqrt{x^2+y^2}).dv'\,dw';$$

integrirt man jetzt rechts einmal blos nach $v'$, dann auch noch blos nach $w'$, und führt hierauf die der obigen Bedingung, welche jetzt in $v'^2+w'^2 \overline{\overline{<}} 1$ übergegangen ist, entsprechenden Grenzen ein, so erhält man:

1)

$$\iint \cos(xv+yw)\,dv\,dw=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}.\int_0^1 \sin(\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{1-v^2}).dv$$

$$=4.\int_0^1 \cos(v\sqrt{x^2+y^2}).\sqrt{1-v^2}.dv,$$

wo nur, in den beiden einfachen Integralen, zuletzt wieder $v$ an die Stelle des Integrationsbuchstabens gesetzt wurde.

§. 2. Daraus ergibt sich, dass die Kenntniss der gesuchten Intensitätsfunktion blos von der Berechnung des bestimmten Integrales

$$\int_0^1 \frac{\sin(x\sqrt{1-v^2})}{x}.dv$$

oder des ihm gleichen

$$\int_0^1 \cos xv . \sqrt{1-v^2} . dv$$

abhängt. Entwickelt man aber in dem letzteren den Cosinus in eine unendliche Reihe und integrirt alsdann, so findet man:

2)

$$\int_0^1 \cos xv . \sqrt{1-v^2} . dv = \frac{\pi}{4} . \left(1 - \frac{x^2}{2^{1:2} . 4^{1:2}} + \frac{x^4}{2^{2:2} . 4^{2:2}} - \frac{x^6}{2^{3:2} . 4^{3:2}} + - \ldots\right),$$

welche unendliche Reihe für jeden Werth von $x$ convergirt.

§. 3. Bezeichnen wir jetzt das allgemeinere Integral

$$\int_0^1 \cos xv . (1-v^2)^\mu . dv, \text{*)}$$

in welchem $\mu$ beliebig reell und positiv gedacht wird, durch $J(\mu, x)$, und differenziiren dasselbe nach $x$, so kommt:

$$3) \qquad \frac{dJ(\mu, x)}{dx} = -\int_0^1 \sin xv . v . (1-v^2)^\mu . dv .$$

Integrirt man zur Rechten theilweise, indem man $v(1-v^2)^\mu$ als integrirten Faktor betrachtet, so erhält man:

$$\int \sin xv . v . (1-v^2)^\mu . dv$$

$$= -\tfrac{1}{2} . \sin xv . \frac{(1-v^2)^{\mu+1}}{\mu+1} + \frac{x}{2(\mu+1)} . \int \cos xv . (1-v^2)^{\mu+1} . dv,$$

also nach Einführung der Grenzen:

$$\int_0^1 \sin xv . v(1-v^2)^\mu . dv = \frac{x}{2(\mu+1)} . \int_0^1 \cos xv . (1-v^2)^{\mu+1} . dv.$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung 3), so ergibt sich:

4)

$$\frac{dJ(\mu, x)}{dx} = -\frac{x}{2(\mu+1)} . J(\mu+1, x) \text{ oder } J(\mu+1, x) = -\frac{2(\mu+1)}{x} . \frac{dJ(\mu, x)}{dx},$$

---

*) Auch dieses Integral hat seine Bedeutung in der Theorie der Beugung. Sein Quadrat drückt nämlich die Intensität auf der Abscissenaxe des Beugungsbildes aus, welches durch eine Oeffnung, deren Begrenzungscurve die Ordinate $(1-v^2)^\mu$ hat, hervorgebracht wird.

also namentlich auch:

$$J(\tfrac{3}{2}, x) = -\frac{3}{x}\cdot\frac{dJ(\tfrac{1}{2}, x)}{dx}.$$

Nach dieser Gleichung kann man die für $J(\frac{3}{2}, x)$ geltende unendliche Reihe aus derjenigen ableiten, welche wir oben (§. 2.) für $J(\frac{1}{2}, x)$ gefunden haben. Man erhält so:

$$5)\quad J(\tfrac{3}{2}, x) = \frac{\pi}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2^{1|2}.6^{1|2}} + \frac{x^4}{2^{2|2}.6^{2|2}} - \frac{x^6}{2^{3|2}.6^{3|2}} + - \ldots\right).$$

Durch fortgesetzte Anwendung der Formel 4) erhält man allgemein:

$$6)\quad J\left(\frac{2n+1}{2}, x\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3^{n|2}}{4^{n|2}}\cdot\left\{\left(1 - \frac{x^2}{2^{1|2}.(2n+4)^{1|2}} + \frac{x^4}{2^{2|2}.(2n+4)^{2|2}} - \frac{x^6}{2^{3|2}.(2n+4)^{3|2}} + - \ldots\right)\right\}.$$

Alle diese Reihen convergiren für jeden Werth von $x$ und können für kleinere Werthe von $x$ bequem zur Berechnung der Funktionen $J\left(\frac{2n+1}{2}, x\right)$ gebraucht werden.

§. 4. Integrirt man

$$\int \cos xv.(1 - v^2)^{\mu}.dv$$

theilweise, indem man $\cos xv$ zum integrirten Faktor macht, so findet man:

$$\int \cos xv.(1-v^2)^{\mu}.dv = (1-v^2)^{\mu}.\frac{\sin xv}{x} + \frac{2\mu}{x}\cdot\int \sin xv.(1-v^2)^{\mu-1}.v dv,$$

also nach Einsetzung der Grenzen:

$$7)\quad \int_0^1 \cos xv.(1-v^2)^{\mu}.dv = \frac{2\mu}{x}\cdot\int_0^1 \sin xv.(1-v^2)^{\mu-1}.v.dv \quad {}^{*}).$$

Dann ist aber ferner:

$$\int \sin xv.(1-v^2)^{\mu-1}.v.dv$$

$$= -v.(1-v^2)^{\mu-1}.\frac{\cos xv}{x} + \int \frac{\cos xv}{x}.d[v.(1-v^2)^{\mu-1}].$$

*) Die nämliche Gleichung ist bereits in §. 3. aufgestellt worden.

Wird nun $\mu$ grösser als 1 gedacht, und ist $x$ nicht Null, so erhält man hieraus:

$$\int_0^1 \sin xv.(1-v^2)^{\mu-1}.v.dv = \frac{1}{x}.\int_0^1 \cos xv.(1-v^2)^{\mu-1}.dv$$

$$-\frac{2(\mu-1)}{x}.\int_0^1 \cos xv.v^2.(1-v^2)^{\mu-2}.dv.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Formel 7), so findet sich:

$$\int_0^1 \cos xv.(1-v^2)^{\mu}.dv = \frac{2\mu}{x^2}.\int_0^1 \cos xv.(1-v^2)^{\mu-1}.dv$$

$$-\frac{2\mu(2\mu-2)}{x^2}.\int \cos xv.v^2.(1-v^2)^{\mu-2}.dv,$$

wo man nur noch rechts

$$\frac{2\mu(2\mu-2)}{x^2}.\int_0^1 \cos xv.(1-v^2)^{\mu-2}.dv$$

zu addiren und abzuziehen braucht, um die Reduktionsformel

$$\int_0^1 \cos xv.(1-v^2)^{\mu}.dv = \frac{2\mu(2\mu-1)}{x^2}.\int_0^1 \cos xv.(1-v^2)^{\mu-1}.dv$$

$$-\frac{2\mu(2\mu-2)}{x^2}.\int_0^1 \cos xv.(1-v^2)^{\mu-2}.dv$$

oder

$$8)\quad J(\mu, x) = \frac{2\mu(2\mu-1)}{x^2}.J(\mu-1, x) - \frac{2\mu(2\mu-2)}{x^2}.J(\mu-2, x)$$

zu erhalten, welche gilt, so lange $\mu > 1$ und $x$ nicht Null ist. Daraus ergibt sich speziell:

$$8\text{ a.})\quad \left\{\begin{aligned} J(\tfrac{5}{2}, x) &= \frac{5.4}{x^2}.J(\tfrac{3}{2}, x) - \frac{5.3}{x^2}.J(\tfrac{1}{2}, x), \\ J(\tfrac{7}{2}, x) &= \frac{7.6}{x^2}.J(\tfrac{5}{2}, x) - \frac{7.5}{x^2}.J(\tfrac{3}{2}, x), \\ J(\tfrac{9}{2}, x) &= \frac{9.8}{x^2}.J(\tfrac{7}{2}, x) - \frac{9.7}{x^2}.J(\tfrac{5}{2}, x); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

und auch noch für $\mu = \frac{3}{2}$:

$$8\text{ b.})\quad J(-\tfrac{1}{2}, x) = 2.J(\tfrac{1}{2}, x) - \frac{x^2}{3}.J(\tfrac{3}{2}, x).$$

§. 5. Mit Hilfe der Formel 8) kann also $J(\mu, x)$ auf $J(\mu-1, x)$ und $J(\mu-2, x)$ reduzirt werden. Drückt man alsdann mittelst der nämlichen Formel $J(\mu-1, x)$ in $J(\mu-2, x)$ und $J(\mu-3, x)$ aus und setzt diesen Werth in 8), so erscheint jetzt $J(\mu, x)$ in $J(\mu-2, x)$ und $J(\mu-3, x)$ ausgedrückt. Eliminirt man sodann aus dieser Gleichung, durch wiederholte Anwendung der Formel 8), $J(\mu-2, x)$, so erhält man $J(\mu, x)$ auf $J(\mu-3, x)$ und $J(\mu-4, x)$ zurückgeführt. Fährt man so weiter fort, so erkennt man, dass die aufeinanderfolgenden Formeln, welche man dadurch erhält, das Gesetz

9)

$$J(\mu, x) = \frac{2\mu^{m-1|-2}}{x^{m-1}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{(m-1-\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!} \cdot \frac{(2\mu-1-2\mathfrak{a})^{m-1-2\mathfrak{a}|-2}}{x^{m-1-2\mathfrak{a}}}\right] \times J(\mu+1-m, x)$$

$$- \frac{2\mu^{m|-2}}{x^{m}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{(m-2-\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!} \cdot \frac{(2\mu-1-2\mathfrak{a})^{m-2-2\mathfrak{a}|-2}}{x^{m-2-2\mathfrak{a}}}\right] \times J(\mu-m, x)$$

befolgen, wo die hinter den Summenzeichen eingeklammerten Ausdrücke die allgemeinen Glieder zweier endlichen Reihen vorstellen, deren einzelne Glieder erhalten werden, wenn man in den allgemeinen statt des deutschen Buchstabens $\mathfrak{a}$ nach und nach 0, 1, 2,.... und alle positiven ganzen Zahlen einsetzt; in der ersten Summe ist $\mathfrak{a}$ stets kleiner oder höchstens $=\frac{m-1}{2}$ zu nehmen, weil für grössere Werthe von $\mathfrak{a}$ die Binomialcoefficienten $\frac{(m-1-\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!}$ und mit ihnen die folgenden Glieder der Reihe verschwinden; ebenso kann in der zweiten Reihe $\mathfrak{a}$ den Werth $\frac{m-2}{2}$ nie übersteigen.

Die allgemeine Geltung der Formel 9) ist erwiesen, sobald man gezeigt hat, dass dieselbe, wenn sie für irgend einen Werth von $m$ zutrifft, auch noch für den nächstfolgenden Werth $m+1$ richtig ist. Man erhält aber aus 8):

$$J(\mu+1-m, x)$$

$$= \frac{(2\mu+2-2m)(2\mu+1-2m)}{x^2} \cdot J(\mu-m, x)$$

$$- \frac{(2\mu+2-2m)(2\mu-2m)}{x^2} \cdot J(\mu-m-1, x);$$

setzt man diesen Werth in 9), so ergibt sich:

$$J(\mu, x)$$

$$= \frac{2\mu^{m|-2}}{x^m} \cdot S\left[(-1)^{a} \cdot \frac{(m-1-a)^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2\mu+1-2m).(2\mu-1-2a)^{m-1-2a|-2}}{x^{m-2a}}\right] \times J(\mu-m, x)$$

$$- \frac{2\mu^{m+1|-2}}{x^{m+1}} \cdot S\left[(-1)^{a} \cdot \frac{(m-1-a)^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2\mu-1-2a)^{m-1-2a|-2}}{x^{m-1-2a}}\right] \times J(\mu-m-1, x)$$

$$- \frac{2\mu^{m|-2}}{x^m} \cdot S\left[(-1)^{a} \cdot \frac{(m-2-a)^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2\mu-1-2a)^{m-2-2a|-2}}{x^{m-2-2a}}\right] . J(\mu-m, x),$$

wo jetzt noch die beiden Summen, welche mit $\frac{2\mu^{m|-2}}{x^m} . J(\mu-m, x)$ multiplicirt sind, in eine einzige zusammengefasst werden müssen. Sondert man zu dem Ende von der ersteren Summe das erste Glied ab, indem man zuerst 0, dann $a+1$ an die Stelle von $a$ setzt, so erhält man:

$$\frac{(2\mu-1)^{m|-2}}{x^m}$$

$$+ S\left[(-1)^{a+1} \cdot \frac{(m-2-a)^{a+1|-1}}{(a+1)!} \cdot \frac{(2\mu+1-2m).(2\mu-3-2a)^{m-3-2a|-2}}{x^{m-2-2a}}\right]$$

$$- S\left[(-1)^{a} \cdot \frac{(m-2-a)^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2\mu-1-2a)^{m-2-2a|-2}}{x^{m-2-2a}}\right]$$

$$= \frac{(2\mu-1)^{m|-2}}{x^m} + S\left[(-1)^{a+1} \cdot \frac{(m-2-a)^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2\mu-3-2a)^{m-3-2a|-2}}{x^{m-2-2a}} \times \left(\frac{m-2-2a}{a+1} . (2\mu+1-2m) + (2\mu-1-2a)\right)\right]$$

$$= \frac{(2\mu-1)^{m|-2}}{x^m} + S\left[(-1)^{a+1} \cdot \frac{(m-2-a)^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2\mu-3-2a)^{m-3-2a|-2}}{x^{m-2-2a}} \times \frac{(m-1-a).(2\mu-2m+2a+3)}{a+1}\right]$$

$$= \frac{(2\mu-1)^{m|-2}}{x^m} + S\left[(-1)^{a+1} \cdot \frac{(m-1-a)^{a+1|-1}}{(a+1)!} \cdot \frac{(2\mu-3-2a)^{m-2-2a|-2}}{x^{m-2-2a}}\right]$$

$$= S\left[(-1)^{a} \cdot \frac{(m-a)^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2\mu-1-2a)^{m-2a|-2}}{x^{m-2a}}\right],$$

welche letztere Umformung dadurch bewerkstelligt wird, dass man statt der vorausgehenden Summe die Differenz zweier anderen setzt, deren erste aus jener hervorgeht, wenn man $a-1$ an die

Stelle von $a$ setzt, und deren zweite, blos aus dem Gliede $\frac{(2\mu-1)^{m|-2}}{x^m}$ bestehende, aus der ersten erhalten wird, wenn man daselbst $a=0$ nimmt. Wir haben demnach gefunden die Gleichung

$$J(\mu,x)=\frac{2\mu^{m|-2}}{x^m}\,.\,S\left[(-1)^a.\frac{(m-a)^{a|-1}}{a!}.\frac{(2\mu-1-2a)^{m-2a|-2}}{x^{m-2a}}\right].J(\mu-m,x)$$

$$-\frac{2\mu^{m+1|-2}}{x^{m+1}}\,.\,S\left[(-1)^a.\frac{(m-1-a)^{a|-1}}{a!}.\frac{(2\mu-1-2a)^{m-1-2a|-2}}{x^{m-1-2a}}\right]$$

$$\times J(\mu-m-1,x),$$

welche auch aus der Formel 9) hervorgeht, wenn man daselbst $m+1$ statt $m$ setzt. Die allgemeine Giltigkeit der Formel 9) ist demnach ausser Zweifel gesetzt. Für $\mu=\frac{2n+1}{2}$ und $m=n$ nimmt die Formel 9) folgende Gestalt an:

9 a.) $$J\left(\frac{2n+1}{2},x\right)$$

$$=\frac{(2n+1)^{n-1|-2}}{x^{n-1}}\,.\,S\left[(-1)^a.\frac{(n-1-a)^{a|-1}}{a!}.\frac{(2n-2a)^{n-1-2a|-2}}{x^{n-1-2a}}\right].J(\tfrac{3}{2},x)$$

$$-\frac{(2n+1)^{n|-2}}{x^n}\,.\,S\left[(-1)^a.\frac{(n-2-a)^{a|-1}}{a!}.\frac{(2n-2a)^{n-2-2a|-2}}{x^{n-2-2a}}\right].J(\tfrac{1}{2},x).$$

Sind demnach $J(\frac{1}{2},x)$ und $J(\frac{3}{2},x)$ für irgend einen Werth von $x$ bekannt, so kann man mittelst dieser Formel $J\left(\frac{2n+1}{2},x\right)$ unmittelbar berechnen.

§. 6. In §. 1. haben wir gefunden:

$$\int_0^1 (\cos(v\sqrt{x^2+y^2}).\sqrt{1-v^2}.dv=\tfrac{1}{4}\iint\cos(xv+yw).dvdw.$$

Integrirt man rechts nach $w$, so erhält man:

$$\int_0^1 \cos(v\sqrt{x^2+y^2}).\sqrt{1-v^2}.dv$$

$$=\tfrac{1}{4}.\int_{-1}^{+1}\frac{dv}{y}.[\sin(xv+y\sqrt{1-v^2})-\sin(xv-y\sqrt{1-v^2})]$$

$$=\tfrac{1}{2}.\int_{-1}^{+1}\cos xv.\frac{\sin(y\sqrt{1-v^2})}{y}.dv=\int_0^1\cos xv.\frac{\sin(y\sqrt{1-v^2})}{y}.dv.$$

Entwickelt man in dem letzteren Integral den Sinus in eine nach Potenzen von $y$ fortschreitende Reihe, so gelangt man zu der Gleichung:

10)

$$J(\tfrac{1}{2}, \sqrt{x^2+y^2}) = J(\tfrac{1}{2}, x) - \frac{y^2}{3!}\cdot J(\tfrac{3}{2}, x) + \frac{y^4}{5!}\cdot J(\tfrac{5}{2}, x) - \frac{y^6}{7!}\cdot J(\tfrac{7}{2}, x) + - \ldots$$

Differenziirt man diese Gleichung nach $y$ unter Berücksichtigung der Gleichung 4), so erhält man:

11) $$J(\tfrac{3}{2}, \sqrt{x^2+y^2}) = J(\tfrac{3}{2}, x) - \frac{y^2}{2^{1|2}.5^{1|2}}\cdot J(\tfrac{5}{2}, x)$$

$$+ \frac{y^4}{2^{2|2}.5^{2|2}}\cdot J(\tfrac{7}{2}, x) - \frac{y^6}{2^{3|2}.5^{3|2}}\cdot J(\tfrac{9}{2}, x) + - \ldots$$

Ueberhaupt findet man durch fortgesetztes Differenziiren unter Anwendung der Gleichung 4) die allgemeine Formel:

12) $$J\left(\frac{2n+1}{2}, \sqrt{x^2+y^2}\right) = J\left(\frac{2n+1}{2}, x\right)$$

$$- \frac{y^2}{2^{1|2}.(2n+3)^{1|2}}\cdot J\left(\frac{2n+3}{2}, x\right) + \frac{y^4}{2^{2|2}.(2n+3)^{2|2}}\cdot J\left(\frac{2n+5}{2}, x\right) - + \ldots$$

Sind demnach $J\left(\frac{2n+1}{2}, x\right)$, $J\left(\frac{2n+3}{2}, x\right)$, $J\left(\frac{2n+5}{2}, x\right) \ldots$ für irgend einen bestimmten Werth von $x$ bekannt, so kann man mittelst dieser Formeln $J\left(\frac{2n+1}{2}, x+h\right)$ berechnen, wenn nur statt $y^2$ der aus der Gleichung $\sqrt{x^2+y^2} = x+h$ gezogene Werth

13) $$y^2 = 2hx + h^2$$

genommen wird. Die Reihen 10), 11), 12) convergiren übrigens für jeden Werth von $y$.

§. 7. Die Gleichungen 10) und 11) geben nun, im Verein mit den früher entwickelten Formeln, folgende Methode zur Berechnung der Werthe von $J(\tfrac{1}{2}, x)$, $J(\tfrac{3}{2}, x)$,.... an die Hand. Man bediene sich hiezu, für die kleineren Werthe von $x$, der unendlichen Reihen 2), 5) und 6), bis die Handhabung derselben unbequem wird. Aus den beiden letzten auf diese Weise für $J(\tfrac{1}{2}, x)$ und $J(\tfrac{3}{2}, x)$ berechneten Werthen findet man alsdann mittelst der Formeln 8a.) oder 9a.) die Werthe von $J(\tfrac{5}{2}, x)$, $J(\tfrac{7}{2}, x)$ .... Diese, nebst $y^2$ aus 13), in 10) und 11) substituirt, liefern $J(\tfrac{1}{2}, x+h)$

und $J(\frac{3}{2}, x+h)$, worauf wieder die Formeln 8 a.) angewendet werden u. s. f. Indem man auf diese Weise eine Tabelle der Werthe von $J(\frac{1}{2}, x)$ und $J(\frac{3}{2}, x)$ herstellt, erhält man die Werthe von $J(\frac{5}{2}, x)$, $J(\frac{7}{2}, x)$.... gleichsam als Nebenprodukt.

Man erhält z. B. für $x=5$, indem man zehn Glieder der Reihen 2) und 5) berechnet, auf 5 Dezimalen genau:

$$\frac{4}{\pi}.J(\tfrac{1}{2}, 5) = -\,0.13103$$

$$\frac{4}{\pi}.J(\tfrac{3}{2}, 5) = +\,0.01117$$

Die Formeln 8 a.) liefern sodann:

$$\frac{4}{\pi}.J(\tfrac{5}{2}, 5) = +\,0.08756$$

$$\frac{4}{\pi}.J(\tfrac{7}{2}, 5) = +\,0.13145$$

$$\frac{4}{\pi}.J(\tfrac{9}{2}, 5) = +\,0.15794$$

$$\frac{4}{\pi}.J(\tfrac{11}{2}, 5) = +\,0.17436$$

während sich, für $h=\frac{1}{10}$, $y^2=1,01$ ergibt. Setzt man diese Werthe in die Formeln 10) und 11), so erhält man aus ihnen durch Berechnung von nur vier Gliedern die Werthe:

$$\frac{4}{\pi}.J(\tfrac{1}{2}, 5.1) = -\,0.13219$$

$$\frac{4}{\pi}.J(\tfrac{3}{2}, 5.1) = +\,0.00280$$

welche genau mit denjenigen übereinstimmen, die sich direkt aus den Reihen 2) und 5) ergeben.

Man muss nun allerdings, je weiter man in der Rechnung fortschreitet, desto mehr Glieder der Reihen 10) und 11) berechnen, weil bei wachsendem $x$ auch $y^2$ zunimmt. Aber selbst für $x=100$ (und $h=\frac{1}{10}$) würde man höchstens zehn Glieder zu berechnen haben; für ein kleineres $h$ natürlich weniger.

Bequemer noch gestaltet sich die Rechnung, wenn man nicht $J\left(\frac{2n+1}{2}, x\right)$, sondern $J\left(\frac{2n+1}{2}, \sqrt{x}\right)$ zu berechnen sich vornimmt, weil alsdann $y$ stets constant bleibt.

Für alle positiv ganzen Werthe von $\mu$ ist $J(\mu, x)$ in endlicher Form herstellbar. Hat man

$$J(0, x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad J(1, x) = \frac{2}{x^2}\cdot\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

gefunden, so erhält man $J(\mu, x)$ für $\mu = 2, 3, 4, \ldots.$ leicht mit Hilfe der Reduktionsformeln 8) oder 9).

Für die übrigen reellen und positiven Werthe von $\mu$ findet man $J(\mu, x)$, wenn man, $J(\mu, x)$ als Funktion von $\mu$ betrachtend, für jeden bestimmten Werth von $x$ die Reihe

$$J(0, x),\quad J(\tfrac{1}{2}, x),\quad J(1, x),\quad J(\tfrac{3}{2}, x), \ldots.$$

interpolirt; man braucht diess nur für diejenigen Werthe von $\mu$ zu thun, welche zwischen 0 und 2 liegen, für alle folgenden macht man dann von den Formeln 8) oder 9) Gebrauch. Auch wenn $\mu$ negativ, aber an sich kleiner als 1 ist, findet man $J(\mu, x)$ durch Anwendung der Formel 8).

§. 8. Zum Schlusse mögen noch einige Formeln hier stehen, welche sich durch geeignete Substitutionen aus No. 12) ergeben. Setzt man nämlich daselbst $y\sqrt{-1}$ oder $yi$ statt $y$, so kommt:

14)

$$J\left(\frac{2n+1}{2}, \sqrt{x^2-y^2}\right) = J\left(\frac{2n+1}{2}, x\right) + \frac{y^2}{2^{1|2}.(2n+3)^{1|2}} \cdot J\left(\frac{2n+3}{2}, x\right)$$
$$+ \frac{y^4}{2^{2|2}.(2n+3)^{2|2}} \cdot J\left(\frac{2n+5}{2}, x\right) + \ldots.$$

Setzt man in dieser Gleichung $y = x$, so ergibt sich:

15)

$$J\left(\frac{2n+1}{2}, x\right) + \frac{x^2}{2^{1|2}.(2n+3)^{1|2}} \cdot J\left(\frac{2n+3}{2}, x\right)$$
$$+ \frac{x^4}{2^{2|2}.(2n+3)^{2|2}} \cdot J\left(\frac{2n+5}{2}, x\right) + \ldots. = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3^{n|2}}{4^{n|2}}.$$

Setzt man endlich $y^2 i$ statt $y^2$ und $\sqrt{x^2 + iy^2} = p + qi$, so erhält man:

16)

$$J\left(\frac{2n+1}{2}, p \pm qi\right) = J\left(\frac{2n+1}{2}, p^2-q^2\right)$$
$$- \frac{(2pq)^2}{2^{2|2}.(2n+3)^{2|2}} \cdot J\left(\frac{2n+5}{2}, p^2-q^2\right) + - \ldots.$$
$$\mp i. \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2pq}{2^{1|2}.(2n+3)^{1|2}} \cdot J\left(\dfrac{2n+3}{2}, p^2-q^2\right) \\ \qquad - \dfrac{(2pq)^3}{2^{3|2}.(2n+3)^{3|2}} \cdot J\left(\dfrac{2n+7}{2}, p^2-q^2\right) + \ldots \end{array} \right\}.$$

Durch diese letztere Formel sieht man sich aber in den Stand gesetzt, $J\left(\frac{2n+1}{2}, x\right)$ auch für jeden imaginären Werth von $x$ „auszurechnen.“

# XVI.

## Miscellen.

Von dem Herausgeber.

In einem Briefe (Göttingen, 28. November 1824) macht Gauss seinem Freunde Schumacher folgende Mittheilung *):

„Zur Reduction der ungleichen Schwingungen an Kater's Pendel ist erforderlich, dass die Entfernungen der beiden Aufhängungsaxen vom Schwerpunkt des ganzen Apparats bekannt sind. Nennen Sie dieselben $a$, $b$, und $A$, $B$ resp. die Dauer einer Schwingung, wenn die Aufhängung an jenen Axen geschieht, so ist die Dauer einer Schwingung eines einfachen Pendels, dessen Länge $= a + b$, d. i. gleich der Entfernung der beiden Aufhängungsaxen von einander ist,

$$= \sqrt{\frac{aAA-bBB}{a-b}} = \sqrt{(AA+\frac{b}{a-b}(AA-BB))}$$

$$= \sqrt{(BB+\frac{a}{a-b}(AA-BB))}.“$$

*) M. s. Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C Schumacher, durch dessen Herausgabe sich Herr Professor Peters in Altona so verdient macht, im zweiten Bande (Altona 1860) S. 3. Wir empfehlen bei dieser Gelegenheit diesen Briefwechsel, der auch manche sehr interessante Expectorationen der beiden berühmten und hochverdienten Männer über neuere Mathematiker enthält, in jeder Beziehung sehr zur Beachtung.

Diese Formel lässt sich auf folgende Art leicht beweisen.

Man bezeichne die Zeit der Schwingung eines einfachen Pendels von der Länge $a+b$ durch $t$, so ist bekanntlich:

$$1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad t=\pi\sqrt{\frac{a+b}{2g}}.$$

Bezeichnen wir nun ferner die Masse des ganzen Pendels durch $M$, seine Trägheitsmomente in Bezug auf die beiden Aufhängungsaxen respective durch $T_a$, $T_b$, und die Längen eines bei den beiden Aufhängungen seine Schwingungen mit dem materiellen oder physischen Pendel genau in derselben Weise vollendenden einfachen Pendels respective durch $L_a$, $L_b$; so ist nach dem Theoreme von Huygens *) bekanntlich:

$$2) \ldots\ldots\ldots \quad L_a=\frac{T_a}{aM}, \quad L_b=\frac{T_b}{bM};$$

nach der Theorie des einfachen Pendels ist aber in der von Gauss gebrauchten Bezeichnung:

$$3) \ldots\ldots \quad A=\pi\sqrt{\frac{L_a}{2g}}, \quad B=\pi\sqrt{\frac{L_b}{2g}};$$

folglich nach 2):

$$4) \ldots\ldots \quad A=\pi\sqrt{\frac{T_a}{2agM}}, \quad B=\pi\sqrt{\frac{T_b}{2bgM}};$$

woraus

$$aA^2=\frac{\pi^2 T_a}{2gM}, \quad bB^2=\frac{\pi^2 T_b}{2gM},$$

also:

$$aA^2-bB^2=\frac{\pi^2(T_a-T_b)}{2gM}$$

folgt. Nennen wir nun aber $\mathfrak{T}$ das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende, den beiden Aufhängungsaxen parallele Axe, so ist nach einem bekannten Satze von den Trägheitsmomenten **):

$$T_a=\mathfrak{T}+a^2M, \quad T_b=\mathfrak{T}+b^2M;$$

also:

$$T_a-T_b=(a^2-b^2)M,$$

---

*) M. s. Archiv. Thl. XXIV. S. 26. Nr. 8).

**) M. s. Archiv. Thl. XXIV. S. 28.

und folglich nach dem Obigen:

$$aA^2 - bB^2 = \frac{\pi^2(a^2-b^2)}{2g} = \frac{\pi^2(a-b)(a+b)}{2g},$$

also:

$$a+b = \frac{2g(aA^2-bB^2)}{\pi^2(a-b)},$$

woraus sogleich

$$\sqrt{\frac{a+b}{2g}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{aA^2-bB^2}{a-b}}$$

folgt. Also ist nach 1):

$$5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad t = \sqrt{\frac{aA^2-bB^2}{a-b}},$$

welches die von Gauss an Schumacher geschriebene Formel ist, von welcher die beiden anderen, von Gauss angegebenen Ausdrücke:

$$6) \quad t = \sqrt{A^2 + \frac{b}{a-b}(A^2-B^2)} = \sqrt{B^2 + \frac{a}{a-b}(A^2-B^2)}$$

natürlich nur ganz einfache arithmetische Transformationen sind.

Gauss fügt seiner Mittheilung noch Folgendes bei:

„Diese Formel ist nach aller Schärfe richtig, es mögen $A$ und $B$ beinahe gleich sein oder nicht. Wesentlich aber ist es, wenn das Resultat auf Genauigkeit Anspruch haben soll, dass $a$ und $b$ weit von der Gleichheit entfernt sind. Kommen sie der Gleichheit sehr nahe, so ist durchaus kein genaues Resultat zu erwarten, man möge nun sich der obigen Formel bedienen oder durch Probiren gleichzeitige Schwingungen zu erhalten suchen. Der Vortheil, wenn $A$ und $B$ gleich sind, liegt darin, dass es dann nicht nöthig ist, $a$ und $b$ einzeln eben so scharf zu kennen wie ihre Summe $a+b$, wie dies schon die Betrachtung der zweiten und dritten Form obiger Formel lehrt."

Dies ist natürlich Alles ganz richtig; nur bemerken wir in Bezug auf die Worte: „Diese Formel ist nach aller Schärfe richtig", dass freilich die aus der Lehre vom einfachen Pendel entnommenen Formeln 1) und 3) bekanntlich blosse Näherungsformeln sind, die völlig richtig nur für den Fall auf der Cycloide sein würden; nun, das sind so bekannte Dinge, dass es sich kaum der Mühe verlohnt, darauf noch besonders aufmerksam zu machen.

Wenn die Schwingungszeiten $A$ und $B$ einander gleich sind, so geben die Formeln 5) oder 6):

$$t = A = B,$$

also nach 1):

$$A = B = \pi\sqrt{\frac{a+b}{2g}},$$

woraus

$$7) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a+b = \frac{2gA^2}{\pi^2}$$

folgt, so dass also $a+b$ die Länge des einfachen Pendels ist, welches seine Schwingungen in gleichen Zeiten mit dem physischen Pendel vollendet, worin bekanntlich das Princip des Kater'schen oder vielmehr Bohnenberger'schen Reversionspendels eigentlich liegt.

---

Von dem Herausgeber.

Das oft in Anwendung kommende Integral

$$\int \partial x \sqrt{a^2 - x^2}$$

lässt sich sehr leicht auf folgende Art finden. Man setze

$$\sqrt{a^2 - x^2} = ux, \quad a^2 - x^2 = u^2 x^2, \quad x^2 = \frac{a^2}{1+u^2};$$

so ist:

$$\int \partial x \sqrt{a^2 - x^2} = \int ux\partial x = u\int x\partial x - \int \partial u \int x\partial x = \tfrac{1}{2}ux^2 - \tfrac{1}{2}\int x^2\partial u.$$

Nun ist aber

$$ux^2 = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x^2\partial u = \frac{a^2\partial u}{1+u^2};$$

also:

$$\int \partial x \sqrt{a^2 - x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{\partial u}{1+u^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Arctg} u,$$

folglich:

$$\int \partial x \sqrt{a^2 - x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Arctang}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

---

Durch dieselbe Substitution kann man auch

$$\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

finden. Es ist nämlich:

$$\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int\frac{x\partial x}{u} = \frac{1}{u}\int x\partial x + \int\frac{\partial u}{u^2}\int x\partial x = \frac{x^2}{2u} + \tfrac{1}{2}\int\frac{x^2\partial u}{u^2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2}{2u(1+u^2)}+\frac{a^2}{2}\int\frac{\partial u}{u^2(1+u^2)}$$

$$=\frac{a^2}{2u(1+u^2)}+\frac{a^2}{2}\int\left(\frac{\partial u}{u^2}-\frac{\partial u}{1+u^2}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2u(1+u^2)}+\frac{a^2}{2}\int\frac{\partial u}{u^2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{\partial u}{1+u^2}$$

$$=\frac{a^2}{2u(1+u^2)}-\frac{a^2}{2u}-\frac{a^2}{2}\operatorname{Arctang} u$$

$$=-\frac{a^2u}{2(1+u^2)}-\frac{a^2}{2}\operatorname{Arctang} u$$

$$=-\frac{a^2ux}{2x(1+u^2)}-\frac{a^2}{2}\operatorname{Arctang} u$$

$$=-\frac{a^2\sqrt{a^2-x^2}}{\frac{2a^2}{x}}-\frac{a^2}{2}\operatorname{Arctang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

also:

$$\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-\tfrac{1}{2}a^2\operatorname{Arctang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

---

Nun kann man auch leicht

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

finden. Es ist nämlich:

$$\int\partial x\sqrt{a^2-x^2}=\int\frac{(a^2-x^2)\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

also:

$$a^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\partial x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\operatorname{Arctang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x};$$

und von der Richtigkeit dieser auch sonst natürlich bekannten Formel überzeugt man sich leicht durch Differentiation.

# XVII.

# Weitere Ausführung der politischen Arithmetik.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

(Fortsetzung von Nr. V. Thl. XXXVII.)

---

## Fünftes Kapitel.

## Ueber die Berechnung der Kapitalwerthe bei verschiedenen Haupt- und Zinseszinsen und über Terminrechnung.

### §. 66.

### Anwachsen der Kapitalwerthe bei verschiedenen Haupt- und Zinseszinsen.

In der neueren Zeit wurde in die politische Arithmetik eine besondere Methode eingeführt, die Werthe der Kapitalien zu berechnen, wenn dieselben grössere Hauptzinse, die Zinse selbst aber kleinere Zinse abwerfen.

Diese Methode wurde und wird angewendet bei Summen, deren fällige Zinsen nicht zum Kapital geschlagen werden können, oder so unbedeutend sind, dass sie nicht sogleich wieder als Kapital in gleichem Zinsfuss angelegt werden können, wobei sich aber Gelegenheit bietet, auch kleinere Summen zu niedrigerem Zins und Zinseszins, wie bei Sparkassen, unterzubringen. Ferner in solchen Fällen, wenn der Werth von Grundstücken oder Waldungen berechnet werden soll, die in regelmässigen oder unregelmässigen Zeitabschnitten Renten abwerfen, wobei ein niederer Zinsfuss für die Berechnung der Zinseszinsen anzuwenden ist.

Diese Rechnungsweise soll hier zu dem Zwecke untersucht werden, um die Frage zu beantworten: in wie fern diese Methode zur Vergleichung von Kapitalwerthen, die zu verschiedenen Zeiten fällig werden, brauchbar und zulässig ist?

Nennt man den Zinsfuss, in welchem das Kapital $K$ verzinst wird, $p$, denjenigen, in welchem die aus dem Kapital fälligen Zinse $Z$ verzinst werden, $q$, so ist der jährliche Zinsenertrag des Kapitals:

$$1)\qquad Z = K.0{,}0p,$$

und die Aufgabe stellt sich so:

Ein Kapital $K$ wird gegenwärtig zu $p$ Procent auf $n$ Jahre so angelegt, dass die jährlich fälligen Zinse $Z$ zu $q$ Procent verzinst werden. Wie gross ist der Werth ($S$) dieses so angelegten Kapitals sammt Haupt- und Zinseszinsen am Ende des $n$ten Jahres?

Betrachtet man jede so fällig werdende Zinssumme $Z$ für sich, so soll sie nach der Aufgabe zu $q$ Procent verzinst und mit Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden. Die Zinssumme des letzten Jahres trägt keinen Zins, die des zweitletzten einjährigen Zins und erwächst zu $Z.1{,}0q$, die des drittletzten Jahres trägt zweijährige Zinse und erwächst zu $Z.1{,}0q^2$ u. s. w.: die des ersten Jahres trägt $(n-1)$ einjährige und erwächst zu $Z.1{,}0q^{n-1}$. Zählt man diese Werthe zusammen, so erhält man:

$$2)\qquad S_1 = Z.1{,}0q^{n-1} + Z.1{,}0q^{n-2} + \ldots Z.1{,}0q^2 + Z.1{,}0q + Z$$

$$= Z.\frac{1{,}0q^n - 1}{0{,}0q}.$$

Nimmt man hiezu das angelegte Kapital, so bestimmt sich der gesuchte Werth durch

$$S = K + Z.\frac{1{,}0q^n - 1}{0{,}0q}$$

oder durch Einführung des Werthes aus No. 1):

$$3)\qquad S = K + K.0{,}0p.\frac{1{,}0q^n - 1}{0{,}0q} = K\left(1 + 0{,}0p.\frac{1{,}0q^n - 1}{0{,}0q}\right).$$

Werden die Hauptzinse halbjährlich fällig und geschieht die Verzinsung der Zwischenzinse auch halbjährlich, so bleiben die gemachten Schlüsse in Kraft, jedoch mit dem Unterschiede, dass sich der Zeitraum auf $2n$ Halbjahre erstreckt. Daher erhebt sich in diesem Falle die Summe auf:

$$4)\qquad S = K\left(1 + 0{,}0p_1.\frac{1{,}0q_1^{\,2n} - 1}{0{,}0q_1}\right).$$

Sind aber die Hauptzinse jährlich fällig und geschieht die Verzinsung der Zwischenzinse halbjährlich, so ändern sich die Schlüsse

hiernach. Die Zinssumme des zweitletzten Jahres erhebt sich dann auf $Z.1{,}0q_1{}^2$, die des drittletzten auf $Z.1{,}0q_1{}^4$ u. s. w., und man erhält folgende Reihe:

$$5)\quad S_1 = Z.1{,}0q_1{}^{2n-2} + Z.1{,}0q_1{}^{2n-4} + \ldots Z.1{,}0q_1{}^4 + Z.1{,}0q_1{}^2 + Z$$
$$= Z.\frac{1{,}0q_1{}^{2n}-1}{1{,}0q_1{}^2-1}.$$

Hieraus entsteht durch Zuzählung des Kapitalwerthes:

$$6)\qquad S = K + Z.\frac{1{,}0q_1{}^{2n}-1}{1{,}0q_1{}^2-1} = K\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q_1{}^{2n}-1}{1{,}0q_1{}^2-1}\right).$$

Die Anwendung dieser Gleichungen ergibt sich leicht. Wird ein Kapital von 1000 zu 5 Procent Haupt- und 3 Procent Zwischenzinsen angelegt, so erhebt sich sein Werth am Ende des 10ten Jahres bei jährlicher Anlage und Verzinsung nach No. 3), wenn die angegebenen Werthe eingeführt werden auf:

$$7)\qquad S = 1000\left(1+0{,}05.\frac{1{,}03^{10}-1}{0{,}03}\right)$$
$$= 1000(1+0{,}05.11{,}4638793) = 1000.1{,}5731939\ldots. = 1573{,}1939.$$

Sind die Hauptzinse jährlich fällig und geschieht die Verzinsung halbjährlich, so ergibt sich aus No. 6) die fragliche Summe:

$$8)\quad S_1 = 1000\left(1+0{,}05.\frac{1{,}015^{20}-1}{1{,}015^2-1}\right) = 1000\left(1+0{,}05.\frac{0{,}3468550}{0{,}030225}\right)$$
$$= 1000.1{,}5737882 = 1573{,}7882.$$

Geschieht die Verzinsung halbjährlich bei Haupt- und Zwischenzinsen, so erwächst die Summe nach No. 4) auf:

$$9)\qquad S_2 = 1000.\left(1+0{,}025.\frac{1{,}015^{20}-1}{0{,}015}\right)$$
$$= 1000(1+0{,}025.23{,}1236671) = 1000.1{,}5780917 = 1578{,}091.$$

Bei gleichen Haupt- und Zwischenzinsen sind nur zwei Arten für das Anwachsen der Kapitalien möglich, und zwar nur die jährliche oder halbjährliche Verzinsung. Für diese Fälle ergeben sich folgende Werthe, die der Vergleichung wegen hier stehen sollen:

$$10)\qquad S = 1000.1{,}05^{10} = 1628{,}8946,$$

$$11)\qquad S = 1000.1{,}025^{20} = 1638{,}6164.$$

Man kann von den in No. 3) und No. 4) erhaltenen Gleichungen

auf die schon bekannten, für gleiche Haupt- und Zwischenzinse geltenden übergehen, wenn man $p=q$ setzt. Es entsteht dann:

12) $$S=K\left(1+0{,}0p\,.\,\frac{1{,}0p^n-1}{0{,}0p}\right)=K.1{,}0p^n,$$

13) $$S=K\left(1+0{,}0p_1.\frac{1{,}0p_1{}^{2n}-1}{0{,}0p_1}\right)=K.1{,}0p_1{}^{2n}.$$

Die Gleichung No. 6) gestattet diesen Uebergang nicht, wenn man $p=q$ setzt. Es entsteht:

14) $$S=K\left(1+0{,}0p\,.\,\frac{1{,}0p_1{}^{2n}-1}{1{,}0p_1{}^2-1}\right),$$

und man kann ihr keine analoge, elementare Bestimmung zur Seite stellen.

## §. 67.

### Gegenwärtiger Werth einer künftig fälligen Summe, wenn verschiedene Haupt- und Zwischenzinse gerechnet werden.

Die in §. 66. aufgestellten Gleichungen zeigen, wie man von dem Werth einer gegenwärtig fälligen Summe bei verschiedenen Haupt- und Zwischenzinsen auf ihren künftigen übergehen kann. Hiemit ist zugleich das Mittel angegeben, wie man umgekehrt von dem Werthe einer künftig fälligen Summe unter dieser Voraussetzung auf ihren gegenwärtigen übergehen kann. Diess führt zur Beantwortung folgender Frage:

Eine Summe $K$ ist am Ende des $n$ten Jahres unverzinslich fällig. Welches ist ihr gegenwärtiger Werth $R$, wenn die Zinse des Kapitals zu $p$, die Zinse der Zinse zu $q$ Procent gerechnet werden?

a. Geschieht die Rabattirung bei Haupt- und Zwischenzinsen jährlich, so ergibt sich die Antwort aus der Gleichung No. 3) §. 66., wenn man $K$ statt $S$ und $R$ statt $K$ setzt. Es ist dann:

$$K=R\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^n-1}{0{,}0q}\right)$$

und hieraus:

1) $$R=\frac{K}{1+0{,}0p.\dfrac{1{,}0q^n-1}{0{,}0q}}.$$

b. Geschieht die Rabattirung der Haupt- und Zwischenzinse halbjährlich, so erhält man auf die gleiche Weise aus No. 4) §. 66. für den fraglichen Werth folgende Gleichung:

2)
$$R = \frac{K}{1 + 0{,}0p_1 \cdot \frac{1{,}0q_1{}^{2n} - 1}{0{,}0q_1}}.$$

c. Geschieht die Rabattirung der Hauptzinse jährlich, die der Zwischenzinse aber halbjährlich, so ergibt sich für den gesuchten Werth folgende Bestimmung aus No. 6) §. 66.:

3)
$$R = \frac{K}{1 + 0{,}0p \cdot \frac{1{,}0q_1{}^{2n} - 1}{1{,}0q_1{}^2 - 1}}.$$

Auch hier kann man von den in No. 1) und No. 2) gefundenen Gleichungen auf die Formeln übergehen, welche die Grundlage der Rabattrechnung bilden, übergehen, wenn man die Haupt- und Zwischenzinse gleich und $p = q$ setzt. Man erhält:

4)
$$R = \frac{K}{1 + 0{,}0p \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}} = \frac{K}{1{,}0p^n},$$

5)
$$R = \frac{K}{1 + 0{,}0p_1 \cdot \frac{1{,}0p_1{}^{2n} - 1}{0{,}0p_1}} = \frac{K}{1{,}0p_1{}^{2n}}.$$

Die Gleichung No. 3) lässt diesen Uebergang nicht zu.

Die Werthbestimmung der besondern Fälle bietet keine Schwierigkeit, erfordert aber etwas mehr Arbeit, als die gewöhnliche Rabattirung.

Ein Kapital von 1000 ist am Ende des 10ten Jahres unverzinslich fällig. Wie gross ist sein gegenwärtiger Werth, wenn bei 5 Procent Haupt- und 3 Procent Zwischenzinsen rabattirt wird?

a. Geschieht die Rabattirung der Haupt- und Zwischenzinse jährlich, so ist aus No. 1):

6)
$$R = \frac{1000}{1 + 0{,}05 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03}} = \frac{1000}{1{,}5731939} = 635{,}6498,$$

$$\begin{aligned} \lg 1000 &= 3{,}0000000 \\ \lg 1{,}5731939 &= 0{,}1967822 \\ \text{N. } \overline{2{,}8032178} &= 635{,}6498. \end{aligned}$$

b. Geschieht dieselbe halbjährlich, so ist aus No. 2):

$$7)\qquad R = \frac{1000}{1+0{,}025 \cdot \frac{1{,}015^{20}-1}{0{,}015}} = \frac{1000}{1{,}5780917} = 633{,}6768,$$

$$\begin{aligned} \lg 1000 &= 3{,}0000000 \\ \lg 1{,}5780917 &= 0{,}1981323 \\ \text{N. } 2{,}8018677 &= 633{,}6768. \end{aligned}$$

c. Geschieht die Rabattirung der Hauptzinse jährlich, der Zwischenzinse halbjährlich, so ist aus No. 3):

$$8)\qquad R = \frac{1000}{1+0{,}05 \cdot \frac{1{,}015^{20}-1}{1{,}015^{2}-1}} = \frac{1000}{1{,}5737882} = 635{,}4097,$$

$$\begin{aligned} \lg 1000 &= 3{,}0000000 \\ \lg 1{,}5737882 &= 0{,}1969462 \\ \text{N. } 2{,}8030538 &= 635{,}4097. \end{aligned}$$

Bei gleichen Haupt- und Zwischenzinsen zu 5 Procent ist bei jährlicher und halbjährlicher Rabattirung der gegenwärtige Werth

$$9)\qquad R = \frac{1000}{1{,}05^{10}} = 613{,}9133,$$

$$10)\qquad R = \frac{1000}{1{,}025^{20}} = 610{,}2709.$$

### §. 68.

**Werthbestimmung der Kapitalien bei wiederholter Anlage und verschiedenen Haupt- und Zwischenzinsen.**

Die bisher aufgefundenen Gleichungen führen zur Beantwortung folgender Frage:

**Die Summe $K$ wird wiederholt in $n$ Jahren, je am Ende der Jahre angelegt. Wie gross ist der Werth sämmtlicher Anlagen im Augenblicke der letzten, wenn $p$ Haupt- und $q$ Zwischenzinse gerechnet werden?**

a. Geschieht die Verzinsung und Anlage jährlich, so hat man die Gleichung No. 3) §. 66. auf jede dieser Anlagen anzuwenden. Die letzte Anlage trägt keinen Zins. Ihr Werth ist $K$. Die zweitletzte Anlage trägt einjährigen Zins. Ihr We

$K\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q-1}{0{,}0q}\right)$. Die drittletzte Anlage trägt zweijährige Zinse. Ihr Werth ist daher $K\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^2-1}{0{,}0q}\right)$ u. s. f. Die erste Anlage trägt $(n-1)$ Jahre lang Zins, daher ist ihr Werth im Augenblicke der letzten Anlage $K\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^{n-1}-1}{0{,}0q}\right)$. Diess führt zu folgender Darstellung:

1)
$$S=K\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^{n-1}-1}{0{,}0q}\right)$$
$$+K\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^{n-2}-1}{0{,}0q}\right)+\ldots.K\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^2-1}{0{,}0q}\right)$$
$$+K\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q-1}{0{,}0q}\right)+K.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet die Glieder, so entsteht:

2)
$$S=K+K.0{,}0p.\frac{1{,}0q^{n-1}}{0{,}0q}-\frac{K.0{,}0p}{0{,}0q},$$
$$K+K.0{,}0p.\frac{1{,}0q^{n-2}}{0{,}0q}-\frac{K.0{,}0p}{0{,}0q},$$
$$K+K.0{,}0p.\frac{1{,}0q^{n-3}}{0{,}0q}-\frac{K.0{,}0p}{0{,}0q},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K+K.0{,}0p.\frac{1{,}0q^2}{0{,}0q}-\frac{K.0{,}0p}{0{,}0q},$$
$$K+K.0{,}0p.\frac{1{,}0q}{0{,}0q}-\frac{K.0{,}0p}{0{,}0p},$$
$$K.$$

Hierin erscheint $K$ $n$mal. Die beiden letzten Reihen haben nur $(n-1)$ Glieder. Zählt man, um die Reihen vollständig zu machen, $K.\frac{0{,}0p}{0{,}0p}$ zu und ab, wodurch der Werth von No. 2) unverändert bleibt, so geht No. 2) über in:

$$S=nK+nK.\frac{0{,}0p}{0{,}0q}+K.\frac{0{,}0p}{0{,}0q}(1+1{,}0q+1{,}0q^2+\ldots.1{,}0q^{n-1}).$$

Der gesuchte Werth bestimmt sich also durch folgende Gleichung:

3)
$$S=K\left(n-\frac{np}{q}+\frac{p}{q}\cdot\frac{1{,}0q^n-1}{0{,}0q}\right).$$

b. Geschieht die Anlage und Verzinsung halbjährlich, so führen die zu a. gemachten Schlüsse gleichfalls zum Ziele. Der Zeitraum erstreckt sich aber auf $2n$ Halbjahre, und man hat in den vorstehenden Gleichungen $2n$ statt $n$, $p_1$ statt $p$ und $q_1$ statt $q$ zu schreiben. Es ergibt sich daher für die Werthbestimmung sämmtlicher Anlagen unter dieser Voraussetzung:

$$4) \qquad S = K\left(2n - \frac{2np_1}{q_1} + \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{1{,}0q_1^{2n} - 1}{0{,}0q_1}\right).$$

c. Geschieht die Anlage der Summen und Hauptzinse jährlich, die Verzinsung halbjährlich, so hat man die Gleichung No. 6) §. 66. wiederholt anzuwenden und darin allmälig die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ statt $n$ zu setzen. Geschieht diess und löst man die sich ergebenden Ausdrücke auf, so erhält man folgende Zusammenstellung:

$$5) \qquad \begin{aligned} S = {} & K + K.0{,}0p.\frac{1{,}0q_1^{2n-2}}{1{,}0q_1^2 - 1} - K.\frac{0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1}, \\ & K + K.0{,}0p.\frac{1{,}0q_1^{2n-4}}{1{,}0q_1^2 - 1} - K.\frac{0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1}, \\ & K + K.0{,}0p.\frac{1{,}0q_1^{2n-6}}{1{,}0q_1^2 - 1} - K.\frac{0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & K + K.0{,}0p.\frac{1{,}0q_1^{4}}{1{,}0q_1^2 - 1} - K.\frac{0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1}, \\ & K + K.0{,}0p.\frac{1{,}0q_1^{2}}{1{,}0q_1^2 - 1} - K.\frac{0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1}, \\ & K + K.0{,}0p.\frac{1}{1{,}0q_1^2 - 1} - K.\frac{0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1}, \end{aligned}$$

wenn im letzten Gliede der Vervollständigung wegen $K.\frac{0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1}$ zu- und abgezählt wird. Durch Summirung ergibt sich aus No. 5) folgende Gleichung für den gesuchten Werth:

$$6) \qquad S = K\left(n - \frac{n.0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1} + \frac{0{,}0p}{1{,}0q_1^2 - 1} \cdot \frac{1{,}0q_1^{2n} - 1}{1{,}0q_1^2 - 1}\right).$$

Die Gleichungen No. 3) und No. 4) lassen sich auf die schon bekannten zurückführen, wenn man Haupt- und Zwischenzinse ($q = p$) gleichsetzt. Bei No. 6) ist diese Reduction nicht durchführbar.

Die Anwendung der aufgefundenen Gleichungen bietet gleichfalls keine Schwierigkeit, wie sich aus Folgendem zeigt:

Ein Kapital von 2000 wird in den 10 folgenden Jahren wiederholt zu 4procentigen Haupt- und 2procentigen Zwischenzinsen angelegt. Zu welcher Summe sind diese Anlagen im Augenblicke der letzten angewachsen?

a. Geschieht die Anlage und Verzinsung jährlich, so entsteht aus No. 3), wenn $K=2000$, $n=10$, $p=4$, $q=2$ gesetzt wird:

$$7)\qquad S=2000\left(10-\frac{10.4}{2}+\frac{4}{2}\cdot\frac{1{,}02^{10}-1}{0{,}02}\right)$$

$$=2000(-10+2.10{,}9497210)=2000.11{,}8994420=23798{,}8840.$$

b. Wird die Hälfte der Summe (1000) halbjährlich angelegt und geschieht die Verzinsung halbjährlich, so ist der Werth aus No. 4), wenn $p_1=2$, $q_1=1$, $K=1000$ gesetzt wird:

$$8)\qquad S=1000\left(20-20.2+2.\frac{1{,}01^{20}-1}{0{,}01}\right)$$

$$=1000(-20+2.22{,}0190040)=1000.24{,}0380080=24038{,}008.$$

c. Geschieht die Anlage jährlich, die Verzinsung der Zwischenzinse halbjährlich, so ergibt sich der gesuchte Werth aus No. 6), wenn $K=2000$, $p=4$, $q_1=1$ gesetzt wird:

$$9)\qquad S=2000\left(10-\frac{10.0{,}04}{1{,}01^2-1}+\frac{0{,}04}{1{,}01^2-1}\cdot\frac{1{,}01^{20}-1}{1{,}01^2-1}\right)$$

$$=2000\left(10-\frac{40}{2{,}01}+\frac{4}{2{,}01}\cdot\frac{0{,}2201900}{0{,}0201}\right)$$

$$=2000(-9{,}9004975+21{,}8004544)$$

$$=2000.11{,}8999569=23799{,}9138.$$

Sind verschiedene Kapitalwerthe $K_1$, $K_2$, $K_3$, .... $K_n$ am Ende der folgenden $n$ Jahre fällig und soll ihr Werth für den Zeitpunkt der letzten Anlage bestimmt werden, so ergibt sich derselbe, wenn dieselben Schlüsse, wie bisher, gemacht werden durch folgende Darstellung:

$$10)\quad S=K_1\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^{n-1}-1}{0{,}0q}\right)+K_2\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^{n-2}-1}{0{,}0q}\right)$$

$$+\ldots.K_{n-2}\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^2-1}{0{,}0q}\right)+K_{n-1}\left(1+0{,}0p.\frac{1{,}0q-1}{0{,}0q}\right)+K_n,$$

und es muss der Werth eines jeden Gliedes für sich bestimmt und alle in eine Summe vereinigt werden.

Auf gleiche Weise ergibt sich die Werthbestimmung, wenn die Anlage und Verzinsung halbjährlich, oder wenn die Anlage und Zahlung der Hauptzinse jährlich und Verzinsung der Zwischenzinse halbjährlich geschieht.

## §. 69.

## Gegenwärtiger Werth künftig fälliger Summen bei verschiedenen Haupt- und Zwischenzinsen.

Der Gang der Untersuchung führt auf die Beantwortung folgender Frage:

Am Ende der $n$ folgenden Jahre ist die Summe $K$ fällig. Welches ist der gegenwärtige Werth dieser Summen, wenn $p$ Haupt- und $q$ Zwischenzinse gerechnet werden?

### Erste Auflösung.

a. Sind die Summen am Ende der Jahre fällig und geschieht die Verzinsung jährlich, so hat man die Formel No. 1) §. 67. wiederholt anzuwenden und allmälig $1, 2, 3, \ldots. n$ statt $n$ zu setzen. Hiernach ist der gegenwärtige Werth:

1)

$$R = \frac{K}{1+0{,}0p.\dfrac{1{,}0q-1}{0{,}0q}} + \frac{K}{1+0{,}0p.\dfrac{1{,}0q^2-1}{0{,}0q}} + \ldots. \frac{K}{1+0{,}0p.\dfrac{1{,}0q^n-1}{0{,}0q}}.$$

b. Geschieht die Anlage und Verzinsung halbjährlich, so kommt die Gleichung No. 2) §. 67. zur Anwendung, und man hat allmälig $1, 2, 3, \ldots. 2n$ statt $2n$ zu schreiben. Der fragliche Werth ist:

2)

$$R = \frac{K}{1+0{,}0p_1.\dfrac{1{,}0q_1-1}{0{,}0q_1}} + \frac{K}{1+0{,}0p_1.\dfrac{1{,}0q_1{}^2-1}{0{,}0q_1}} + \ldots. \frac{K}{1+0{,}0p_1.\dfrac{1{,}0q_1{}^{2n}-1}{0{,}0q_1}}.$$

c. Geschieht die Anlage und Zahlung der Hauptzinse jährlich, die Verzinsung der Zwischenzinse halbjährlich, so kommt No. 3) §. 67. zur Anwendung und man erhält für den gesuchten Werth:

3)

$$R = \frac{K}{1+0{,}0p.\dfrac{1{,}0q_1{}^2-1}{1{,}0q_1{}^2-1}} + \frac{K}{1+0{,}0p.\dfrac{1{,}0q_1{}^4-1}{1{,}0q_1{}^2-1}} + \ldots. \frac{K}{1+0{,}0p.\dfrac{1{,}0q_1{}^{2n}-1}{1{,}0q_1{}^2-1}}.$$

Sind verschiedene Summen gegeben, so bleiben die vorstehenden Gleichungen in Kraft, und man hat der Reihe nach $K_1$, $K_2$, $K_3$, .... $K_n$ in den entsprechenden Gliedern einzusetzen.

### Zweite Auflösung.

Diese beruht auf der Anwendung des in §. 10. aufgestellten Lehrsatzes in Verbindung mit den in §. 68. aufgefundenen Gleichungen No. 3), 4) und 6). Diese Gleichungen führen den Werth sämmtlicher Anlagen auf den Zeitpunkt der letzten zurück. Bringt man nun den so erhaltenen Werth nach den in §. 67. aufgestellten Sätzen auf den Anfang des ersten Jahres zurück und setzt statt $K$ den für $S$ angezeigten Werth ein, so ist die Aufgabe gelöst. Bezeichnet man nun den gegenwärtigen Werth durch $R$, so hat man

a. wenn die Summen jährlich fällig sind bei jährlicher Verzinsung aus No. 3) §. 68. und No. 1) §. 67.:

$$4) \qquad R = \frac{K\left(n - \frac{np}{q} + \frac{p}{q} \cdot \frac{1{,}0q^n - 1}{0{,}0q}\right)}{1 + 0{,}0p \cdot \frac{1{,}0q^n - 1}{0{,}0q}},$$

b. wenn die Summen halbjährlich fällig sind bei halbjährlicher Verzinsung aus No. 4) §. 68. und No. 2) §. 67.:

$$5) \qquad R = \frac{K\left(2n - \frac{2np_1}{q_1} + \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{1{,}0q_1{}^{2n} - 1}{0{,}0q_1}\right)}{1 + 0{,}0p_1 \cdot \frac{1{,}0q_1{}^{2n} - 1}{0{,}0q_1}},$$

c. wenn die Summen und Hauptzinse jährlich fällig sind bei halbjährlicher Verzinsung der Zwischenzinse aus No. 6) §. 68. und No. 3) §. 67.:

$$6) \qquad R = \frac{K\left(n - \frac{n \cdot 0{,}0p}{1{,}0q_1{}^2 - 1} + \frac{0{,}0p}{1{,}0q_1{}^2 - 1} \cdot \frac{1{,}0q_1{}^{2n} - 1}{1{,}0q_1{}^2 - 1}\right)}{1 + 0{,}0p \cdot \frac{1{,}0q_1{}^{2n} - 1}{1{,}0q_1{}^2 - 1}}.$$

Bei Vergleichung der in No. 1)—6) entwickelten Gleichungen macht sich die Bemerkung geltend, dass die correspondirenden No. 1) und 4), No. 2) und 5), No. 3) und 6) auf gleiche Werthe führen müssen, wenn sie zusammen bestehen und gleichzeitig Gültigkeit haben sollen. Aus der Form und dem Inhalte derselben dürfte sich aber dieser Nachweis schwer führen lassen. Es tritt

daher ein gerechtes Bedenken gegen das Zusammenbestehen dieser Gleichungen auf.

## §. 70.

### Anwendungen.

Um die eben gemachte Bemerkung zu verdeutlichen, soll der nachstehende Fall betrachtet werden.

Am Ende eines jeden der folgenden 10 Jahre ist die Summe 10000 unverzinslich fällig. Wie gross ist der gegenwärtige Werth sämmtlicher Zahlungen, wenn 4 Procent Haupt- und 2 Procent Zwischenzinse gerechnet werden?

Erste Auflösung. Man kann die Frage nach der Gleichung No. 1) §. 69. beantworten, indem man jede fällige Summe nach der Zeitdauer rabattirt und zu dem Ende dort $K = 10000$, $p = 4$, $q = 2$ und $n = 10$ setzt. Hiernach entsteht:

$$R = \frac{10000}{1+0{,}04\frac{1{,}02-1}{0{,}02}} + \frac{10000}{1+0{,}04\frac{1{,}02^2-1}{0{,}02}} + \frac{10000}{1+0{,}04\frac{1{,}02^3-1}{0{,}02}}$$

$$+ \ldots \frac{10000}{1+0{,}04\frac{1{,}02^{10}-1}{0{,}02}}.$$

Setzt man nun die angezeigten Werthe für die verschiedenen Potenzen von 1,02 aus den Tafeln ein und multiplicirt, wie angezeigt ist, so erhält man:

$$1)\quad R = \frac{10000}{1{,}04} + \frac{10000}{1{,}0808} + \frac{10000}{1{,}122416} + \frac{10000}{1{,}1648643} + \frac{10000}{1{,}2081616}$$

$$+ \frac{10000}{1{,}2523248} + \frac{10000}{1{,}2973713} + \frac{10000}{1{,}3433188} + \frac{10000}{1{,}3901851} + \frac{10000}{1{,}4379888}.$$

Man wird am besten thun, diese etwas mühevolle Rechnung durch Logarithmen auszuführen. Der Werth des ersten Gliedes ergibt sich aus den Tafeln. Hiernach erhält man:

$$\frac{10000}{1{,}04} = 9615{,}385,$$

$$\lg \frac{10000}{1{,}0808} = 3{,}9662547 = \lg 9252{,}406,$$

$$\lg \frac{10000}{1,122416} = 3,949851 = \lg 8909,496,$$

$$\lg \frac{10000}{1,1648643} = 3,9337247 = \lg 8584,692,$$

$$\lg \frac{10000}{1,2081616} = 3,9178750 = \lg 8277,038,$$

$$\lg \frac{10000}{1,2523248} = 3,9022831 = \lg 7985,130,$$

$$\lg \frac{10000}{1,2973713} = 3,8869357 = \lg 7707,893,$$

$$\lg \frac{10000}{1,3433188} = 3,8718210 = \lg 7444,250.$$

$$\lg \frac{10000}{1,3901851} = 3,8569274 = \lg 7193,286,$$

$$\lg \frac{10000}{1,4379888} = 3,8422445 = \lg 6954,156.$$

Die Zahlen der dritten Reihe sind die zugehörigen Werthe. Zählt man sie zusammen, so erhält man den gegenwärtigen Werth sämmtlicher Zahlungen:

2) $$R = 81923,732.$$

Zweite Auflösung. Man kann aber auch die Aufgabe nach der Gleichung No. 4) §. 69. lösen, wenn der Werth sämmtlicher Zahlungen auf den Zeitpunkt der letzten zurückgebracht und dann der so gefundene Gesammtwerth auf die Gegenwart bei 4 Procent Haupt- und 2 Procent Zwischenzinsen reducirt wird. Durch Einführung der entsprechenden Werthe in die genannte Formel entsteht:

3)

$$R = \frac{10000\left(10 - \frac{4.10}{2} + \frac{4}{2}.\frac{1,02^{10}-1}{0,02}\right)}{1 + 0,04.\frac{1,02^{10}-1}{0,02}} = \frac{10000(-10 + 21,8994420)}{1,4379888}$$

$$= \frac{118994,420}{1,4379888} = 82681,02,$$

$$\lg 118994,4 = 5,0751613$$
$$\lg 1,4379888 = 0,1577555$$
$$\text{N. } 4,9174058 = 82681,02.$$

Man erhält in No. 2) und No. 3) zwei Werthe, als Auflösung für eine und dieselbe Aufgabe, deren Unterschied nicht unbeträchtlich 757,29 ist und in den Gleichungen des §. 69., wie oben bemerkt wurde, gegründet ist. Zwei verschiedene Antworten auf die gleiche Frage können nicht zusammen bestehen. Welches ist der richtige Werth, oder sind etwa beide unrichtig?

Versucht man nun nach der früher öfters angewendeten Weise sich dadurch Aufklärung in der Sache zu verschaffen, dass man die in No. 2) und No. 3) gefundenen Summen zu Grunde legt, die fälligen Zinse Schritt für Schritt zuzählt und die jeweils schuldigen Summen der Reihe nach abzieht, so misslingt dieser Versuch. Durch eine ziemlich verwickelte Rechnung kann man zwar in dem unter No. 2) gefundenen Resultate zum Ziele gelangen, wenn man jede der dort erhaltenen Summen für sich getrennt behandelt, die Haupt- und Zwischenzinse für sich, getrennt von der betreffenden Kapitalsumme, verfolgt und dadurch einzeln die jeweils fälligen Summen von 1000 erzeugt. Diese Methode ist aber so künstlich und zusammengesetzt, dass sie sich, abgesehen von der beschwerlichen Arbeit, nicht zur Prüfung empfiehlt. Sie leidet offenbar an der erforderlichen Klarheit und Einfachheit und ist nicht auf das in No. 3) gefundene Resultat anwendbar, das sich nicht in solche Einzelsummen zerlegen lässt. Ausserdem würde man hiedurch nicht viel gewinnen und höchstens zu dem Schlusse gelangen, dass die in No. 2) angewendete Methode vor der andern zulassbar wäre, wenn man kein anderes Mittel zur Entscheidung dieser Frage hätte.

## §. 71.

### Kritik dieser Methode.

Dieses Mittel gewinnt man dadurch, dass man von einem Falle ausgeht, worin die Resultate, worauf die Anwendung dieser Methode führen muss, zum Voraus bekannt sind. Wir wählen hiezu folgenden:

1) A schuldet an B ein Kapital von 2500, das am Ende des 10ten Jahres unverzinslich fällig ist und das er bis zur Auszahlung zu 4 Procent Zinsen benutzen kann. Schuldner und Gläubiger kommen überein, dass sogleich gezahlt und dass bei der Vertheilung 4procentige Haupt- und 2procentige Zwischenzinse gerechnet werden. Welche Summe hat jeder anzusprechen?

Zur Beantwortung dieser Frage sind vorerst die Werthe festzustellen, welche jedem der beiden Interessenten im Laufe der Zeit zufallen und sie nach den Bedingungen der Aufgabe auf die Gegenwart zurückzubringen. Die 4procentigen Zinse des Kapitals betragen $2500 \times 0{,}04 = 100$. Der Schuldner hat also am Ende eines jeden der folgenden 10 Jahre 100 anzusprechen. Dem Gläubiger fällt am Ende des 10ten Jahres die Summe 2500 baar zu.

Nun ist klar, dass die Summen, welche dem Schuldner und Gläubiger aus der verfügbaren Summe von 2500 zuzuweisen sind, zusammen nicht mehr und nicht weniger als die vorhandene Summe betragen können, denn die vorliegende Aufgabe verlangt, dass die im Laufe der Zeit den beiden Personen zufallenden Summen in gleichzeitige umgesetzt werden, um darauf hin das vorhandene Kapital, ihren Ansprüchen und Forderungen nach Recht und Billigkeit entsprechend als Aequivalent zu vertheilen.

Bringt man nun den Werth der Forderung des Schuldners auf die Gegenwart bei 4 Procent Haupt- und 2 Procent Zwischenzinsen zurück, so erhält man nach No. 1) und No. 2) §. 70.:

2)

$$R_1 = \frac{100}{1+0{,}04.\frac{1{,}02-1}{0{,}02}} + \frac{100}{1+0{,}04.\frac{1{,}02^2-1}{0{,}02}} + \dots \frac{100}{1+0{,}04.\frac{1{,}02^{10}-1}{0{,}02}}$$

$$= 819{,}23732.$$

Bringt man den Werth der Forderung des Gläubigers auf dieselbe Weise auf die Gegenwart zurück, so erhält man:

$$3)\qquad R_2 = \frac{2500}{1+0{,}04.\frac{1{,}02^{10}-1}{0{,}02}} = \frac{2500}{1{,}4379888} = 1738{,}539,$$

$$\begin{aligned} \lg 2500 &= 3{,}3979400 \\ \lg 1{,}437988 &= 0{,}1577555 \\ \text{N. } \overline{3{,}2401845} &= 1738{,}539. \end{aligned}$$

Hiernach fordert Schuldner und Gläubiger gleichzeitig

$$4)\qquad S = R_1 + R_2 = 819{,}2373 + 1738{,}539 = 2557{,}776,$$

also zusammen eine grössere Summe, als die vorhandene, und mehr, als vertheilt werden kann. Diess ist ein Widerspruch in der Sache.

Würde man die Vertheilung nach der zweiten Methode No. 4) §. 69. durchführen, so hätte der Schuldner zu fordern:

$$5) \qquad R_1 = \frac{100\left(10 - \frac{4.10}{2} + \frac{4}{2}.\frac{1{,}02^{10}-1}{0{,}02}\right)}{1+0{,}04.\frac{1{,}02^{10}-1}{0{,}02}} = 826{,}8102$$

nach No. 3) §. 70., der Gläubiger wie oben No. 3). Die Forderungen beider würden daher betragen:

$$6) \qquad S = R_1 + R_2 = 826{,}8102 + 1738{,}539 = 2565{,}449.$$

Diess Resultat führt auf die gleiche Ungereimtheit wie vorhin.

Da nun die in §§. 66.—69. entwickelten Gleichungen formell richtig sind, denn die bei ihrer Begründung gemachten Schlüsse ruhen ganz auf denselben Grundsätzen, wie die früheren Methoden, welche zu richtigen Resultaten führten, so kann der Grund der Unrichtigkeit nur in der Anlage des Calculs, hier die Annahmen der verschiedenen Zinsfüsse liegen. Hiedurch wird man zu folgendem Schlusse geführt.

7) Sollen Kapitalwerthe, die zu verschiedenen Zeiten fällig sind, unter einander verglichen, oder ihrem Werthe nach in gleichzeitige verwandelt werden, so ist hiebei die Rechnung mit verschiedenen Haupt- und Zwischenzinsen nicht zulässig. Wird sie dennoch angewendet, so führt sie auf unrichtige Resultate.

Will man also richtige und verlässliche Resultate bei Vergleichung der Kapitalwerthe erhalten, so darf die Rechnung nur mit gleichen Haupt- und Zwischenzinsen geführt werden.

Bestimmt man, um diess zu zeigen, die gegenseitigen Forderungen des Schuldners und Gläubigers bei gleichen Haupt- und Zwischenzinsen (4), so ist die des Schuldners:

$$8) \qquad R_1 = 100.\frac{1-1{,}04^{-10}}{0{,}04} = 811{,}08957,$$

die des Gläubigers:

$$9) \qquad R_2 = \frac{2500}{1{,}04^{10}} = 1688{,}9104.$$

Sie fordern zusammen:

$$10) \qquad S = R_1 + R_2 = 811{,}0895 + 1688{,}9104 = 2500.$$

Bestimmt man die Forderungen beider durch die Rechnung mit einfachen Zinsen, also bei 4 Procent Haupt- und 0 Procent Zwischenzinsen, so ist die des Schuldners:

$$R_1 = \frac{100}{1,04} + \frac{100}{1,08} + \frac{100}{1,12} + \dots \frac{100}{1,40}$$

| | |
|---|---|
| = 96,1538 + | 80,6452 |
| 92,5925 | 78,1250 |
| 89,2857 | 75,7576 |
| 86,2069 | 73,5294 |
| 83,3333 | 71,4285 |
| 447,5723 | 379,4857 |

11) $$R_1 = 447,5723 + 379,4857 = 827,0580;$$

die des Gläubigers ist:

12) $$R_2 = \frac{2500}{1,40} = 1785,7142;$$

die Forderungen beider betragen zusammen:

13) $$S = R_1 + R_2 = 827,0580 + 1785,7142 = 2612,772\dots.$$

Vergleicht man die in diesem Paragraphen gefundenen Resultate, so ergibt sich, dass die Rechnung mit gleichen Haupt- und Zwischenzinsen auf ein richtiges, die übrigen Methoden auf unrichtige Resultate führen, dass die Rechnung mit einfachen Zinsen sich am weitesten von dem richtigen Resultate entfernt, dagegen die mit verschiedenen Haupt- und Zwischenzinsen, diesen Fehler verbessernd, sich dem richtigen Resultate nähert, und zwar um so mehr, je weniger die Haupt- und Zwischenzinse von einander abweichen, dennoch aber unrichtig bleibt. Die Richtigkeit der im ersten Kapitel aufgestellten Lehrsätze erhalten hiedurch eine weitere Bestätigung.

## §. 72.

### Allgemeiner Beweis über die Unrichtigkeit der Rechnung mit verschiedenen Haupt- und Zwischenzinsen.

Um diesen Beweis im Allgemeinen zu führen, gehen wir von den im ersten und dritten Kapitel aufgestellten Grundsätzen aus. Dort wurde gezeigt, dass wenn ein Kapital $K$ bei dem Zinsfuss $p$ in $n$ Jahren zurückgezahlt (getilgt und verzinst) werden soll, diess so zu geschehen habe, dass in den einzelnen Jahren folgende Summen gezahlt werden müssen:

$$1)\quad \begin{aligned} L_1 &= A_1 + K.0{,}0p, \\ L_2 &= A_2 + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p, \\ L_3 &= A_3 + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p - A_2.0{,}0p, \\ L_4 &= A_4 + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p - A_2.0{,}0p - A_3.0{,}0p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n &= A_n + K.0{,}0p - A_1.0{,}0p - A_2.0{,}0p - \ldots - A_{n-1}.0{,}0p, \end{aligned}$$

worin $L_1$, $L_2$, $L_3$, .... $L_n$ die in den einzelnen Jahren zu zahlenden Summen und $A_1$, $A_2$, $A_3$, .... $A_n$ die Tilgungssummen bedeuten, so dass

$$2)\qquad K = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n$$

ist. Bei dieser Anordnung werden zwei Dinge einander gegenüber gestellt: der gegenwärtige Betrag der Schuld $K$ und die im Laufe der Zeit allmälig zu zahlenden Summen $L_1$, $L_2$, .... $L_n$. Beide Dinge sind ihrem Werthe oder Inhalte nach, nicht aber in der Grösse der Summen einander gleich.

Jede Methode, welche so geeigenschaftet ist, dass sie die allmälig fällig werdenden Summen auf den ihnen gleichkommenden Werth $K$ zurückbringt, wird, wie diess in der Natur der Sache liegt, ein richtiges Resultat bedingen und deswegen zulässig sein. Diese Bemerkung wird nun auch zur Prüfung für die in Frage stehende Rechnungsmethode dienen. Genügt sie dieser Bedingung, so ist sie als richtig anzuerkennen; genügt sie nicht, so muss sie als unrichtig zurückgewiesen werden.

In §§. 3., 6. und 42. wurde auf drei verschiedenen Wegen der Beweis geliefert, dass die Gleichung

$$3)\qquad K = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_2}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p^n}$$

der genannten Bedingung genügt, und den richtigen Kapitalwerth angibt, wenn die einzelnen Glieder in dem Zinsfuss rabattirt werden, worin das Kapital verzinst wird.

Wendet man nun die Rechnung mit verschiedenen Haupt- ($p$) und Zwischenzinsen ($q$) auf die fälligen Summen in No. 1) an, so hat man dieselben der Reihe nach zu rabattiren und zu dem Ende 1, 2, 3, .... $n$ statt $n$ und $L_1$, $L_2$, $L_3$, .... $L_n$ statt $R$ in No. 1) §. 67. zu setzen. Hiedurch entsteht:

$$4)\qquad K = \frac{L_1}{1+0{,}0p.\frac{1{,}0q-1}{0{,}0q}} + \frac{L_2}{1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^2-1}{0{,}0q}} + \ldots \frac{L_n}{1+0{,}0p.\frac{1{,}0q^n-1}{0{,}0q}}.$$

Soll nun diese Gleichung genügen, so muss der Werth aller Glieder auf der rechten Seite dem gegebenen Werthe $K$ gleichkommen.

Um diess zu entscheiden, hat man die correspondirenden Glieder in No. 4) und No. 3) der Reihe nach unter einander zu vergleichen. Setzt man zu dem Ende der Kürze wegen $p$ statt $\frac{p}{100}$, so dass $1{,}0p^r = (1+p)^r$ und $q$ statt $\frac{q}{100}$, so dass $1{,}0q^r = (1+q)^r$ ist, und bezeichnet die Binomial-Coefficienten der Reihe nach mit $r_1, r_2, r_3, \ldots . r_r$, so hat man Folgendes:

5) $$(1+p)^r = 1 + r_1 p + r_2 p^2 + r_3 p^3 + \ldots . r_r p^r,$$
$$= 1 + r_1 p + r_2 p.p + r_3 p.p^2 + \ldots . r_r p.p^{r-1}$$
$$(1+q)^r = 1 + r_1 q + r_2 q^2 + r_3 q^3 + \ldots . r_r q^r$$
$$\frac{(1+q)^r - 1}{q} = r_1 + r_2 q + r_3 q^2 + r_4 q^3 + \ldots . r_r q^{r-1},$$

folglich:

6)
$$1+p.\frac{(1+q)^r-1}{q} = 1 + r_1 p + r_2 p.q + r_3 p.q^2 + r_4 p.q^3 + \ldots . r_r p.q^{r-1}$$

Vergleicht man nun den Werth der Reihe No. 5) mit dem von No. 6), so zeigt sich leicht, dass derjenige der erstern grösser, als der der zweiten ist, wenn $p > q$ und $r$ grösser als 1 ist, denn nur die beiden ersten Glieder in No. 5) und No. 6) sind einander gleich. Hieraus folgt, dass

$$(1+p)^r > 1 + p\frac{(1+q)^r - 1}{q}$$

oder in der ursprünglichen Form

7) $$1{,}0p^r > 1 + 0{,}0p.\frac{1{,}0q^r - 1}{0{,}0q}$$

ist für $p > q$ und $r > 1$. Ist $p = q$, so werden beide Reihen einander gleich, wie diess schon auf andere Weise in §. 66. und §. 67. gezeigt wurde. Aus No. 7) folgt umgekehrt, dass

8) $$\frac{L_r}{1{,}0p^r} < \frac{L_r}{1 + 0{,}0p.\frac{1{,}0q^r - 1}{0{,}0q}}$$

ist, für $r > 1$ und $p > q$.

Hieraus zeigt sich, dass der Werth der Reihe No. 4) nicht auf denselben Werth wie die Reihe No. 3), sondern auf einen grössern führen muss, weil alle Glieder in No. 4) mit Ausnahme des ersten grösser sind als die in No. 3), und dass also die Rechnung mit verschiedenen Haupt- und Zwischenzinsen auf unrich-

tige Werthe führt. Das Gleiche gilt, wenn die Rabattirung halbjährlich geschieht.

Hiernach ist der in No. 7) §. 71. aufgestellte Satz allgemein bewiesen.

Die Anwendung auf besondere Fälle bestätigt die Richtigkeit dieses Satzes. So ist z. B. der gegenwärtige Werth der Summe 10000, die am Ende eines jeden der folgenden 10 Jahre fällig ist, bei 4 Procent:

9) $$R = 10000 . \frac{1-1,04^{-10}}{0,04} = 81108,958,$$

während sich derselbe bei 4procentigen Haupt- und 2procentigen Zwischenzinsen nach No. 2) §. 70. (erste Methode) zu

10) $$R = 81923,732,$$

und nach No. 3) §. 70. (zweite Methode) zu

11) $$R = 82681,02,$$

und bei einfachen Zinsen (4 Proc. Haupt- und 0 Proc. Zwischenzinsen) nach No. 11) §. 71. zu

12) $$R = 82705,80$$

berechnet. Offenbar kann nur eines dieser vier Resultate das richtige sein. No. 9) gibt den richtigen Werth an. Die übrigen sind unrichtig.

Mit dem Gesagten ist allerdings die Benutzung der hier gezeigten Methode für subjective Zwecke nicht ausgeschlossen. Ihre Resultate mögen in manchen Fällen sogar erwünschte Anhaltpunkte bei Vergleichungen, als Annäherung an die richtigen Werthe, bieten. Objectiv betrachtet ist sie im Calcul unzulässig, und einer wissenschaftlichen Begründung der politischen Arithmetik liegt nach meiner Ansicht die Pflicht ob, hierauf aufmerksam zu machen und sie als unrichtig zu bezeichnen, nicht aber dem Leser die Wahl zwischen einer richtigen und unrichtigen Methode zu überlassen, ohne diess angedeutet zu haben. Wählt er ungeachtet dieser Hinweisung dennoch die unrichtige Methode, so mag er es auf seine Gefahr thun.

## Termin- oder Zeitrechnung.

### §. 73.

### Reduction mehrerer Zahlungssummen auf einen bestimmten Zeitpunkt.

Die sogenannte Termin- oder Zeitrechnung findet in den ver-

schiedenen Lehrbüchern eine besondere Stelle. Sie soll auch hier kurz erwähnt werden. Ich habe sie zwar schon in meiner Anleitung §. 15. und §. 40. angeführt und auf die richtige Berechnungsweise hingedeutet, die Sache selbst aber nicht näher erörtert, da ich es für genügend hielt, die Elemente eines richtigen Calculs im Allgemeinen gezeigt zu haben. Es wird übrigens sachgemäss sein, hier das Wesentliche der Sache hervorzuheben, um den hierher gehörigen Fragen die richtige Stelle anzuweisen, da auch hier die Ansichten schwanken und aus einander gehen.

Sind nämlich mehrere Summen (gleiche oder ungleiche) unverzinslich im Laufe der Zeit fällig und soll ihre Gesammtsumme auf einmal gezahlt und der hiefür erforderliche Zeitpunkt bestimmt werden, so nennt man die hiefür dienende Methode Termin-, auch Zeit-Rechnung.

Die meisten Lehrbücher, welche diese Frage behandeln, wenden zu ihrer Beantwortung die Rechnung mit einfachen Zinsen an. Nur wenige benutzen zu ihrer Lösung die Zinszinsrechnung, ohne jedoch den nöthigen Beweis für die Richtigkeit der einen oder der andern zu geben und die Frage zu entscheiden.

Die fälligen Summen können entweder unter sich verschieden oder einander gleich sein. Diess ändert im Entwicklungsgange nichts. Da die letztere eine einfachere Behandlung zulässt, so werde ich mich hierauf beschränken. Der Schluss in's Allgemeine ergibt sich dann leicht. Wir heben hauptsächlich folgende zwei hierher gehörige Probleme hervor.

1) Am Ende der folgenden $n$ Jahre ist jeweils die Summe $K$ unverzinslich fällig. Statt aller Zahlungen soll nur eine gemacht werden. Wie gross ist der bezügliche Werth, wenn die Gesammtzahlung sogleich oder am Ende des ersten, zweiten, u. s. w., oder des letzten Jahrs gemacht und $p$ Procent Zins gerechnet werden

a. bei der Rechnung mit Zinseszinsen?

b. bei der Rechnung mit einfachen Zinsen?

Auflösung zu a. Nennt man den Zeitpunkt, zu welchem die Gesammtzahlung gemacht werden soll, $x$, so hat man den Werth sämmtlicher Summen auf diesen Zeitpunkt zurückzubringen. Die Summen, welche bis zu diesem Zeitpunkte fällig sind, haben folgenden Werth:

2) $S_1 = K.1{,}0p^{x-1} + K.1{,}0p^{x-2} + \ldots K.1{,}0p + K = K.\dfrac{1{,}0p^x - 1}{0{,}0p}$,

die Summen, welche nach diesem Zeitpunkte fällig sind, folgenden:

$$3)\quad R_1 = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}0p^2} + \frac{K}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{K}{1{,}0p^{n-x}} = K \cdot \frac{1-1{,}0p^{-n+x}}{0{,}0p};$$

die Gesammt-Zahlung bestimmt sich daher durch folgende Gleichung:

$$4)\quad S = K \cdot \frac{1{,}0p^x - 1}{0{,}0p} + K \cdot \frac{1-1{,}0p^{-n+x}}{0{,}0p} = K \cdot \frac{1{,}0p^x - 1{,}0p^{-n+x}}{0{,}0p}$$

$$= K \cdot 1{,}0p^x \cdot \frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} = K \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^{n-x}}.$$

Auflösung zu b. Behandelt man die fälligen Summen wie unter a. mit einfachen Zinsen, so erhält man zur Bestimmung des Gesammtwerthes Folgendes:

$$S = K\left(1 + \frac{(x-1)p}{100}\right) + K\left(1 + \frac{(x-2)p}{100}\right) + \ldots K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + K$$

$$+ \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}02p} + \frac{K}{1{,}03p} + \ldots \frac{K}{1{,}0(n-x)p},$$

$$5)\quad S = K\left(x + \frac{x(x-1)p}{200}\right) + \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}02p} + \ldots \frac{K}{1{,}0(n-x)p}.$$

Wir wählen zur Verdeutlichung des Gesagten folgenden Fall, der einen etwas grössern Zeitraum umfasst, damit die abweichenden Resultate stärker hervortreten, was bei kleinern Zeiträumen nicht der Fall ist.

6) Am Ende der folgenden 15 Jahre sind je 1000 unverzinslich fällig. Statt aller Zahlungen soll nur eine gemacht werden. Wie gross ist der betreffende Werth, wenn die Gesammtzahlung sogleich oder am Ende des ersten, zweiten, u. s. w., oder letzten Jahres geleistet und 5 Procent Zins gerechnet werden

a. bei der Rechnung mit Zinseszinsen?

b. bei der Rechnung mit einfachen Zinsen?

Setzt man nun in No. 4) und 5) $K=1000$, $p=5$, $n=15$, und für $x$ allmälig die Werthe 0, 1, 2, .... 15, führt dann die erforderlichen Werthe aus den Tafeln §. 14. ein und die angezeigten Geschäfte aus, was ohne Schwierigkeit geschehen kann, so erhält man folgende Zusammenstellung, worin die Resultate der Rechnung angegeben sind:

7)

| Zeit. (Ende des Jahres.) | Gesammtleistung nach der Rechnung mit Zinseszinsen. | Gesammtleistung nach der Rechnung mit einfachen Zinsen. |
|---|---|---|
| Gegenwart. | 10379,6580 | 10980,8352 |
| 1 | 10898,6409 | 11409,4066 |
| 2 | 11443,5730 | 11871,1713 |
| 3 | 12015,7516 | 12365,1107 |
| 4 | 12616,8392 | 12890,1107 |
| 5 | 13247,3661 | 13444,9494 |
| 6 | 13908,7345 | 14028,2828 |
| 7 | 14605,2212 | 14638,6276 |
| 8 | 15335,4823 | 15274,3419 |
| 9 | 16102,2564 | 15933,6011 |
| 10 | 16907,3692 | 16614,3704 |
| 11 | 17752,7376 | 17314,3704 |
| 12 | 18640,3745 | 18031,0370 |
| 13 | 19572,3932 | 18701,4718 |
| 14 | 20551,0129 | 19502,3810 |
| 15 | 21578,5635 | 20250 |

Man sieht aus dieser Zusammenstellung die bedeutenden Abweichungen, worauf die Werthbestimmungen führen. Man kann nun die Gesammtsumme irgend eines Jahres herausheben und sie, wie früher geschah, Schritt für Schritt verfolgen und wird die bisher aufgestellten Sätze bestätigt finden, wornach die durch einfache Zinsrechnung ermittelten Werthbestimmungen unrichtig und die durch Zinszinsrechnung ermittelten richtig sind.

## §. 74.

### Bestimmung der Zahlungszeit (Termin) einer Gesammtsumme statt der einzeln fälligen Zahlungssummen.

Hier handelt es sich um Beantwortung folgender Frage:

Am Ende der folgenden $n$ Jahre ist jeweils am Ende der Jahre die Summe $K$ unverzinslich fällig. Die Gesammtsumme $S = nK$ soll auf einmal gezahlt werden. Wann muss die Zahlung geschehen, wenn $p$ Procent gerechnet werden

a. bei der Rechnung mit Zinseszinsen?

b. bei der Rechnung mit einfachen Zinsen?

### Erste Auflösung.

Zu a. Man nenne die Zahl der Jahre, nach deren Ablauf die Gesammtsumme gezahlt werden muss, $x$, und bringe dann den Werth aller Zahlungen auf die Gegenwart zurück. Dadurch entsteht:

1) $$R = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{K}{1{,}0p^n} = K . \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

Eben so bringe man den Werth der nach $x$ Jahren fälligen Gesammtsumme auf die Gegenwart zurück. Es entsteht:

2) $$R_1 = \frac{S}{1{,}0p^x} = \frac{nK}{1{,}0p^x}.$$

Beide Werthe müssen einander gleich sein. Man erhält daher:

3) $$R = \frac{S}{1{,}0p^x},$$

und hieraus nach den erforderlichen Umänderungen:

4) $$x = \frac{\lg S - \lg R}{\lg 1{,}0p} = \frac{\lg n - \lg \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p},}{\lg 1{,}0p}$$

wenn statt $S$ und $R$ die Werthe aus No. 1) und 2) eingeführt werden. Diese Auflösung findet sich in meiner Anleitung §. 40. in anderer Form vorgetragen.

Zu b. Wendet man dieselben Schlüsse auf die Rechnung mit einfachen Zinsen an, so hat man:

5) $$R = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}02p} + \frac{K}{1{,}03p} + \ldots \frac{K}{1{,}0np},$$

6) $$R_1 = \frac{S}{1{,}0xp} = \frac{S.100}{100 + xp} = \frac{nK.100}{100 + xp}.$$

Beide Werthe müssen einander gleich sein, und es ist:

7) $$R = \frac{100.S}{100 + xp} = \frac{nK.100}{100 + xp},$$

und hieraus:

8) $$x = \frac{100.S}{R.p} - \frac{100}{p}.$$

Ist nun, wie in dem Falle No. 6) §. 73. die Summe 1000 jeweils am Ende der 15 folgenden Jahre unverzinslich fällig, und fragt man: Wann muss die Gesammtsumme, von jetzt an gerechnet, gezahlt werden, wenn 5 Procent Zins gerechnet werden? so erhält man zur Bestimmung dieses Zeitpunkts durch Einführung der entsprechenden Werthe

a) bei der Rechnung mit Zinseszinsen aus No. 4):

9) $$x = \frac{\lg 15 - \lg 10{,}3796580}{\lg 1{,}05} = \frac{1{,}1760913 - 1{,}0161831}{0{,}0211893}$$

$$= \frac{0{,}1599082}{0{,}0211893} = 7{,}546647,$$

$$\lg 0{,}1599082 = 0{,}2038707 - 1$$
$$\lg 0{,}0211893 = 0{,}3261167 - 2$$
$$\text{N. } 0{,}8777540 \quad = 7{,}546647;$$

b) bei der Rechnung mit einfachen Zinsen, wenn man in No. 8) die entsprechenden Werthe mit Rücksicht auf No. 7) §. 73. $R = 10980{,}8352$ einsetzt:

10) $$x = \frac{15000.100}{5.10980{,}8352} - \frac{100}{5} = \frac{300000}{10980{,}8352} - 20 = 7{,}32032,$$

$$\lg 300000 = 5{,}4771213$$
$$\lg 10980{,}83 = 4{,}0406354$$
$$\text{N. } 1{,}4364859 = 27{,}32032.$$

## Zweite Auflösung.

Zu a. Man bringe den Werth sämmtlicher Summen auf den Zeitpunkt der letzten Zahlung zurück. Hiernach erhält man:

11) $$S_1 = K.1{,}0p^{n-1} + K.1{,}0p^{n-2} + K.1{,}0p^{n-3} + \ldots K.1{,}0p + K$$

$$= K.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}.$$

Nun beziehe man die Zeit, in welcher die Gesammtsumme gezahlt werden muss, auf denselben Zeitpunkt, nenne die Zeit, welche zwischen beiden Zeitpunkten liegt, $z$, und führe sodann den Werth der Gesammtzahlung auch auf den Zeitpunkt der letzten Zahlung zurück. Es entsteht:

12) $$S_2 = S.1{,}0p^z = nK.1{,}0p^z.$$

Aus No. 11) und 12) entsteht, da beide Werthe gleich sein müssen,

$$S.1{,}0pz = S_1 = K.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} = nK.1{,}0p^z,$$

und hieraus:

13) $$z = \frac{\lg S_1 - \lg S}{\lg 1{,}0p} = \frac{\lg \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} - \lg n}{\lg 1{,}0p}.$$

Zu b. Wendet man dieselben Schlüsse auf die Rechnung mit einfachen Zinsen an, so erhält man:

14)

$$K\left(n+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{p}{100}\right)=nK\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{p}{100}\right)=nK\left(1+\frac{zp}{100}\right),$$

und hieraus:

15) $$z=\frac{n-1}{2}.$$

Diess ist die Methode, welche gewöhnlich zur Auflösung dieser Aufgabe gegeben wird und auch in meiner Anleitung §. 15. in etwas allgemeinerer Form mitgetheilt ist.

Werden nun die entsprechenden Zahlenwerthe eingeführt, so ergibt sich im vorliegenden Falle aus No. 13):

16) $$z=\frac{\lg\frac{1{,}05^{15}-1}{0{,}05}-\lg 15}{\lg 1{,}05}=\frac{\lg 21{,}5785636-\lg 15}{\lg 1{,}05}$$

$$=\frac{1{,}3340225-1{,}1760913}{0{,}0211893}=\frac{0{,}1579312}{0{,}0211893}=7{,}453345,$$

$$\lg 0{,}1579312=0{,}1984679-1$$
$$\lg 0{,}0211893=0{,}3261167-2$$
$$\text{N. } 0{,}8723512 \quad =7{,}453345.$$

Aus No. 15) wird:

17) $$z=\frac{15-1}{2}=7.$$

### Dritte Auflösung.

Zu a. Man nehme an, dass die Gesammtsumme in $x$ Jahren von jetzt an gerechnet zu zahlen sei und bringe dann den Werth sämmtlicher Zahlungen, welche vor und nach diesem Zeitpunkte fällig sind, auf diesen Zeitpunkt zurück. Hiernach ist:

18) $$S_1=K.1{,}0p^{x-1}+K.1{,}0p^{x-2}+\ldots.K.1{,}0p+K$$
$$+\frac{K}{1{,}0p}+\frac{K}{1{,}0p^2}+\frac{K}{1{,}0p^3}+\ldots\frac{K}{1{,}0p^{n-x}}$$
$$=K.\frac{1{,}0p^x-1}{0{,}0p}+K.\frac{1-1{,}0p^{-n+x}}{0{,}0p}.$$

Diess führt zu der Gleichung:

19) $$S=nK=K.\frac{1{,}0p^x-1}{0{,}0p}+K.\frac{1-1{,}0p^{-n+x}}{0{,}0p}$$

Hieraus erhält man nach den nöthigen Umformungen:

20) $$x = \frac{\lg n - \lg \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}}{\lg 1{,}0p}.$$

Diess ist dieselbe Gleichung, welche in No. 4) gefunden wurde.

Zu b. Man kann nun, wie unter a., so auch für die Rechnung mit einfachen Zinsen eine Gleichung zur Auffindung dieses Zeitpunkts entwickeln. Ihre Aufstellung, noch mehr aber ihre Auflösung, ist aber mit solchen Weitläufigkeiten verbunden, dass es sich der Mühe nicht lohnt, zumal in Aussicht steht, dass sie auf ein von den bisher gefundenen verschiedenes Resultat führen wird.

Eine vierte Auflösung zu a. ergibt sich, wenn man wie bei der dritten verfährt und den Zeitpunkt der Gesammtleistung auf den der letzten Zahlung bezieht. Man erhält dann folgende Gleichung:

21) $$nK = K . \frac{1{,}0p^{n-z} - 1}{0{,}0p} + K . \frac{1 - 1{,}0p^{-z}}{0{,}0p} = K . 1{,}0p^{-z} . \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p},$$

und hieraus:

22) $$z = \frac{\lg \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} - \lg n}{\lg 1{,}0p}.$$

Diess ist die in No. 13) gefundene Bestimmung.

Vergleicht man nun die gefundenen Resultate, so stimmen die durch Zinszinsrechnung gefundenen unter sich genau überein. Der Werth von $x$ bezieht den Zeitpunkt der Gesammtzahlung auf die Gegenwart; der von $z$ auf denjenigen der letzten Zahlung. Beide Werthe ergänzen sich gegenseitig und es ist

$$x = n - z = 15 - 7{,}453345 = 7{,}546655,$$

wie denn $n = x + z$ sein muss. Die unbedeutende Differenz in der letzten Ziffer rührt von der Rechnung mit Logarithmen her, wobei die letzte Ziffer nicht immer zuverlässig ist. Es lässt sich nämlich aus No. 4) und No. 13) leicht nachweisen, dass $n = x + z$ sein muss, denn es ist:

$$n + z = \frac{\lg n - \lg \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}}{\lg 1{,}0p} + \frac{\lg \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} - \lg n}{\lg 1{,}0p}$$

$$= \frac{\lg \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} - \lg \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p . 1{,}0p^n}}{\lg 1{,}0p} = \frac{\lg \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} - \lg \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} + \lg 1{,}0p^n}{\lg 1{,}0p},$$

also:

$$23)\qquad x+z=\frac{\lg 1{,}0p^n}{\lg 1{,}0p}=\frac{n.\lg 1{,}0p}{\lg 1{,}0p}=n.$$

Diese Harmonie findet bei den durch die Rechnung mit einfachen Zinsen gefundenen Resultaten, wie man sieht, nicht statt. Sie widersprechen sich und den eben gemachten Bemerkungen, denn nach No. 10) soll die Gesammtzahlung in 7,320.... von jetzt an gerechnet, und nach No. 17) soll sie 7 Jahre vor der letzten Zahlung, also in 8 Jahren von jetzt an gerechnet, geschehen. Sie führen offenbar auf unrichtige Resultate.

Aus dem Gesagten geht unzweifelhaft hervor, dass bei der sogenannten Termin- oder Zeitrechnung die Rechnung mit einfachen Zinsen, wie überall, auf unrichtige Resultate führt und daher unzulässig ist, obgleich sie in verschiedenen Lehrbüchern als unbeanstandet vorgetragen wird.

Man kann die Richtigkeit der in No. 4) und No. 13) gefundenen Resultate durch den Thatbestand nachweisen, wenn man Schritt für Schritt die Zahlungsleistungen verfolgt, die Gesammtsumme an dem festgestellten Zeitpunkte verabfolgt und dann die Rechnung bis zur letzten Zahlung fortführt. Diess lässt sich in Kürze auf folgende Weise zeigen.

Hat Jemand in den folgenden 15 Jahren je 1000 zu zahlen und zahlt er die Gesammtsumme von 15000 erst in 7,5466.... Jahren auf einmal, so ist seine Schuld am Ende des 7ten Jahres bei 5 Procent auf

$$S=1000.\frac{1{,}05^7-1}{0{,}05}=8142{,}0085$$

angewachsen, weil er in der Zwischenzeit keine Zahlung leistete. Nimmt man der kürzern Rechnung wegen den Zeitpunkt der Gesammtzahlung zu 7,546 Jahren an, so betragen die Zinse dieser Schuld in 0,546 Jahr $8142{,}085.0{,}546.0{,}05=222{,}2768$. Daher erwächst seine Schuld bis zu dem bestimmten Zeitpunkt auf

$$S_1=8142{,}0085+222{,}2768=8364{,}2853.$$

Zahlt er nun die Gesammtsumme, so bleibt ein Ueberschuss von

$$R=15000-8364{,}2853=6635{,}7147.$$

Dieser wächst für den Ueberrest des Jahres von 0,454 um den Zinsbetrag von $6635{,}7147.0{,}454.0{,}05=150{,}6307$. Das disponible Kapital am Ende des 8ten Jahres ist daher:

$$S_2=6635{,}7147+150{,}6307=6786{,}3414.$$

Werden hievon die am Ende des 8ten Jahres fälligen 1000 abgezogen, so bleibt die Summe 5786,3414 übrig, welche genügt, um die am Ende der folgenden 7 Jahre fälligen Summen von 1000 zu decken, denn man hat hiezu ein Kapital von

$$R = 1000 \cdot \frac{1-1{,}05^{-7}}{0{,}05} = 5786{,}3734$$

nöthig, welches ganz nahe mit dem eben angegebenen Werthe zusammenfällt. Die kleine Differenz rührt von der Rechnung mit abgekürzten Zahlen her.

## §. 75.

### Schlussbemerkungen.

In allen bisher behandelten Fällen wurde vorausgesetzt, dass bei Heimzahlung der Kapitalien der vorgeschriebene Tilgungsplan richtig eingehalten, die fälligen Zinse pünktlich auf die bestimmte Zeit gezahlt und wieder nutzbringend angelegt werden oder werden können. Nur unter dieser Bedingung können die gefundenen Resultate in Geltung erhalten werden. Bei geordneten Verhältnissen wird diess auch zutreffen, wie bei Tilgung der Anleihen in Staaten mit geordneten Finanzen. Hier sind die Bedingungen des Calculs vollständig vorhanden.

In andern Verhältnissen, und namentlich bei Privaten, wird diese Voraussetzung nicht immer, und diess ist vielleicht der gewöhnliche Fall, zutreffen, und es werden sich manche Schwierigkeiten einer pünktlichen Erfüllung der Verpflichtungen und der Möglichkeit alsbaldiger Zinsanlage entgegenstellen, wie die Saumseligkeit der Schuldner, der Mangel eines Geldmarkts, die Ungunst der Verhältnisse, zu kleine Summen u. dergl.

Es wäre nun ganz ungeeignet, die Schwierigkeiten und Hindernisse, welche sich der genauen Durchführung der aufgefundenen Resultate entgegen stellen und sie in einzelnen Fällen oft zur Unmöglichkeit machen, läugnen oder ignoriren zu wollen. So wird nach den entwickelten Lehrsätzen die Summe 10, einmal angelegt und jährlich zu 5 Procent verzinst, in 20 Jahren zu der Höhe

$$S = 10 \,.\, 1{,}05^{20} = 26{,}5329$$

erwachsen; eben so wird die Summe 1, wiederholt jährlich angelegt und zu 5 Procent verzinst, in 50 Jahren sammt Zinseszins zu einem Kapitale von

$$S = \frac{1{,}05^{50}-1}{0{,}05} = 209{,}345$$

erwachsen, oder eine zu 5 Procent verzinsliche Schuld von 100 in 36—37 Jahren vollständig getilgt sein, wenn jährlich 6 Procent Zins statt 5 Procent gezahlt werden. Wenn aber diese Fälle im Einzelnen praktisch durchgeführt werden sollen, so wird es dem besten Willen und der grössten Thätigkeit kaum gelingen, die sich entgegenstellenden Schwierigkeiten und Hindernisse glücklich zu überwinden. Nur eine hiefür eingerichtete Annuitäten-Anstalt wird im letzten Falle da Hülfe bringend eintreten können, wo die einzelne Kraft nicht hinreicht.

Wollte man aber umgekehrt aus dem Umstand, dass die Sätze der politischen Arithmetik in einzelnen Fällen des praktischen Lebens nicht ihre volle Geltung finden können, die Folgerung für gerechtfertigt halten, dass ihre Sätze überhaupt nicht anwendbar und zulässig seien, so dürfte diess noch viel ungeeigneter erscheinen. Die politische Arithmetik hat diese Unvollkommenheit mit allen Zweigen der Mathematik gemein, welche sich mit der Anwendung auf das praktische Leben beschäftigen, da sie einen Theil derselben bildet. Die angewandte Mathematik stellt die Gesetze über den freien Fall der Körper, über die Bahn geworfener Körper, über den Ausfluss der Flüssigkeiten u. s. w. fest. So bald sie aber im einzelnen Falle zur Anwendung kommen sollen, zeigt sich in noch viel grösserem Maasse als hier die Undurchführbarkeit. Niemand wird sich aber beigehen lassen, aus diesem Grunde die Richtigkeit der von ihr aufgestellten Lehrsätze in Zweifel zu ziehen oder für unzulässig zu erklären, denn diese Beschränkung rührt nicht von der Theorie, sondern von der Einwirkung äusserer Ursachen her, welche keinenfalls der Theorie zur Last fallen können. Im Gegentheil wird Jedermann bemüht sein, durch Nachhülfe, Verbesserungen und Abwendung der störenden Ursachen die Praxis der Theorie anzupassen und zu nähern, wozu die Geschichte dieser Wissenschaft eine Menge von Belegen liefert.

In ganz gleicher Weise stehen die Lehrsätze der politischen Arithmetik dem praktischen Leben gegenüber. In mancher Beziehung befinden sie sich sogar in günstigerer Stellung, wie bei der Tilgung der Staats-Anleihen, bei solchen Anstalten, die mit grossen Geldsummen arbeiten, Hinterlegungs- und Versicherungskassen, Annuitäten u. s. w. Hier finden ihre Sätze volle und unverkürzte Geltung und Anwendung.

Anstatt aber, wie in den übrigen Zweigen der Mathematik, dahin zu streben, den von ihnen aufgestellten Sätzen nachzukommen und die Praxis der Theorie zu nähern, ist man auf den unerwarteten Ausweg gekommen, ihre Sätze, weil im einzelnen Falle

wegen äusserer Hindernisse oft undurchführbar, für unzulässig zu erklären. Diess ist namentlich von vielen Rechtslehrern geschehen, welche die Lehre von der Zinszins-Rechnung bei Berechnung des Interusuriums verwerfen und sich nicht mit dieser Negation begnügen, sondern die Lehre von der einfachen Zinsrechnung (die sogenannte **Hoffmann**'sche Methode) an ihre Stelle setzen, deren Unrichtigkeit in aller Strenge nachgewiesen wurde. Ganz ungerechtfertigt erscheint dieses Vorgehen. Denn an die Stelle einer richtigen Methode kann offenbar nicht eine im Princip durchaus unrichtige gesetzt werden, weil sie bei der Anwendung einige mögliche Collisionen umgeht.

Ein Punkt ist hier noch hervorzuheben, der sich auf die Benutzung der Kapitalwerthe bezieht und der, wie es scheint, nicht immer richtig gewürdigt wurde.

Die Benutzung eines Kapitals wird durch den Begriff Zins bezeichnet. Er ist relativ und wird gewöhnlich durch die Verhältnisse oder Uebereinkommen festgestellt. Werden nun Kapitalwerthe, die zu verschiedenen Zeiten fällig sind, nach einem bestimmten Zinsfusse auf einen und denselben Zeitpunkt zurückgebracht, so wird hiedurch immer nur eine Ausgleichung für vorhandene Forderungen und Ansprüche, welche sich gegenüber stehen (Schuldner und Gläubiger), ermittelt. Die Werthberechnung dieser Forderungen muss auf richtiger Grundlage und muss jedem Anspruch in vollem Maasse gerecht werden. Diese Grundlage ist, wie gezeigt wurde, einzig und allein die Rechnung mit Zinseszinsen, und zwar mit gleichen Haupt- und Zwischenzinsen. Sie muss unverrückt festgehalten werden. Jede andere führt zu unrichtigen Resultaten, also auf Beschädigung der einen oder andern Seite. Die Möglichkeit, wie Jemand die auf diesem Wege ihm zugewiesene Kapitalsumme benutzen kann, kommt vorerst gar nicht in Betrachtung und kann nicht in Betrachtung kommen, denn es hängt von seiner Geschicklichkeit, Thätigkeit, Gewissenhaftigkeit, Sparsamkeit, Zeitverhältnissen und verschiedenen äusseren Umständen ab, wie er die ihm zugewiesene Summe benutzen wird und kann. Dem Calcul sind alle diese Dinge unzugänglich und unanfassbar. Kann Jemand eine in einem Zinsfuss ihm zugewiesene Summe durch seine Geschicklichkeit oder wegen äusserer günstiger Verhältnisse in einem höhern Zinsfuss benutzen, so ist diess sein Vortheil, der aber in den Calcul nicht übertragen werden kann. Eben so wenig kann hiebei der Umstand in Betrachtung kommen, wenn Jemand eine ihm in einem bestimmten Zinsfuss zugewiesene Summe durch Ungeschicklichkeit, Nachlässigkeit oder Trägheit theilweise oder ganz verliert oder in einem niedrigern Zinsfuss benutzt. Die Basis der

Ausgleichung kann hierauf keine Rücksicht nehmen. Sie muss objectiv und vollwerthig sein und auf richtiger Rechnung beruhen. Diesen Punkt haben namentlich alle diejenigen Rechtslehrer ausser Acht gelassen, welche behaupten, dass bei der Werthberechnung der Forderung einzelner Personen die Möglichkeit der Benutzung nach der Zuweisung berücksichtigt werden soll, und haben hieraus ein Moment für die Rechnung mit einfachen Zinsen hergeholt, was nach meiner Ansicht durchaus unstatthaft und bei einer richtigen Kapitalberechnung unzulässig ist.

Hierzu liefern die in §. 71. und §. 72. behandelten Fälle einen eben so einfachen als überzeugenden Beleg.

Hat Jemand eine Summe von 250 nach 10 Jahren an seinen Gläubiger auszuzahlen, die unterdessen zu 4procentigen Zinsen benutzt werden kann, und soll sie sogleich unter dieser Voraussetzung unter beide vertheilt werden, so sind nach der Zinszins-Rechnung dem Nutzniesser 81,10895 und dem Eigenthümer 168,89104, zusammen 250, zuzuweisen. Kann nun der Eigenthümer die erhaltene Summe nicht sofort den Voraussetzungen entsprechend nutzbringend anlegen, so wird es der Nutzniesser noch weniger können. Beide sind dann in gleicher Lage und keiner ist bevorzugt. Wollte man nun, um diess zu vermeiden, nach der einfachen Zinsrechnung dem Gläubiger 178,57142 (No. 12) §. 71.) und dem Nutzniesser den Rest mit 71,42858 zuweisen, so käme letzterer offenbar in Schaden. Würde man aber dem Nutzniesser 82,7058 und dem Eigenthümer den Rest 167,2942 zuweisen, so käme dieser jedoch unbedeutender in Schaden. Würde die Vertheilung nach 4 Procent Haupt- und 2 Procent Zwischenzinsen ermittelt, so träte derselbe Fall ein. Nur eine Rechnungsweise beschädigt weder den Nutzniesser, noch den Eigenthümer und ist die objectiv richtige.

Dabei ist jedoch nach meiner Ansicht eine billige Berücksichtigung der Verhältnisse des praktischen Lebens nicht ausgeschlossen. Sie darf aber nicht auf einer offenbar falschen Grundlage beruhen.

## §. 76.

### Fortsetzung.

Dass eine strenge Durchführung des Calculs bei der Anwendung auf besondere Fälle, bei allem Streben, demselben gerecht zu werden, oft nicht möglich ist, kann nicht in Abrede gestellt werden. Man hat sich dann zu begnügen, möglichst annähernde Werthe an die Stelle der vorgeschriebenen zu setzen. Diess soll an folgendem Falle gezeigt werden.

1) **Ein Staat hat eine Schuld von 2000000 zu 5 Procent in 10 Jahren so zu tilgen, dass jährlich 200000 am Kapital nebst den Zinsen abgetragen werden. Die Schuld soll in eine gleichwerthige 4procentige umgewandelt und die erforderliche Anzahl von Schuldscheinen zu 100 ausgegeben werden. Wie viele Schuldscheine sind auszustellen? Wie geht die Rückzahlung vor sich?**

**Auflösung.** Die Summen, welche zur Heimzahlung der Schuld bei jährlicher Verzinsung in den folgenden 10 Jahren nöthig werden, ergeben sich aus No. 1) §. 32., wenn $A=200000$, $K=2000000$ und $p=5$ gesetzt wird, und sind der Reihe nach 300000, 290000, 280000, 270000, .... 220000, 210000. Diese Werthe hat man entweder einzeln in 4procentige umzusetzen oder nach §. 47. No. 2) zu verfahren. Wird dort $A=200000$, $K=2000000$, $p=5$, $q=4$, $n=10$ gesetzt, so entsteht:

2)

$$K_1=\left(200000+100000-\frac{200000.5}{4}\right).\frac{1-1.04^{-10}}{0,04}+\frac{200000.10.5}{4.1,04^{10}}$$

$$=50000.8,1108958+2500000.0,6755642$$

$$=405544,7889\ldots.+1688910,422$$

$$=2094455,21.$$

Der Staat hat hiernach eine nominelle Schuld von 2094455,21 statt 2000000 zu übernehmen und 20945 vierprocentige Schuldscheine zu je 100 auszustellen, wenn 55,42 zu einem vollen Schuldschein gerechnet wird, sie zu verzinsen und tilgen.

Da die Schuld nach dem oben aufgestellten Tilgungsplan zurückgezahlt werden muss, so sollten der Reihe nach in den folgenden 10 Jahren die oben angegebenen Summen 300000. 290000, 280000, .... 210000 gezahlt werden. Die strenge Einhaltung dieser Werthe wird nicht durchführbar sein. Der Tilgungsplan erleidet daher folgende Modification:

| | | |
|---|---|---|
| 1stes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . | 2094500 |
| | 4proc. Zins hinzu . . . . . . . . . . . | 83780 |
| | | 2178280 |
| | Zins mit 83780 und 2162 Schuldscheinen ab . | 299980 |
| 2tes „ | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . | 1878300 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . | 75132 |
| | | 1953432 |
| | Hievon Zins und 2149 Schuldscheine ab . . | 290032 |
| | | 1663400 |

| | | |
|---|---|---|
| 3tes Jahr. | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . . . | 1663400 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 66536 |
| | | 1729936 |
| | Hievon Zins und 2135 Schuldscheine ab . . | 280036 |
| 4tes „ | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . . . | 1449900 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 57996 |
| | | 1507896 |
| | Hievon Zins und 2120 Schuldscheine ab . . | 269996 |
| 5tes „ | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . . . | 1237900 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 49516 |
| | | 1287416 |
| | Hievon Zins und 2105 Schuldscheine ab . . | 260016 |
| 6tes „ | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . . . | 1027400 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 41096 |
| | | 1068496 |
| | Hievon Zins und 2089 Schuldscheine ab . . | 249996 |
| 7tes „ | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . . . | 818500 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 32740 |
| | | 851240 |
| | Hievon Zins und 2073 Schuldscheine ab . . | 240040 |
| 8tes „ | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . . . | 611200 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 24448 |
| | | 635648 |
| | Hievon Zins und 2056 Schuldscheine ab . . | 230048 |
| 9tes „ | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . . . | 405600 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 16224 |
| | | 421824 |
| | Hievon Zins und 2038 Schuldscheine ab . . | 220024 |
| 10tes „ | Stand der Schuld . . . . . . . . . . . . . . | 201800 |
| | Zins hinzu . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 8072 |
| | | 209872 |
| | Hievon Zins und 2018 Schuldscheine ab . . | 209872 |
| | | 000000 |

Man sieht, dass die Schuld als eine 4procentige mit der letzten Zahlung getilgt ist. Die zurückgezahlten Schuldscheine betragen zusammen 20945 und stellen daher eine vierprocentige nominelle Schuld von 2094500 in runder Summe vor. Der ursprüngliche Tilgungsplan konnte nicht in aller Strenge durchgeführt werden, denn statt der oben festgestellten Summen wurden folgende: 299980, 290032, 280036, 269996,.... 220024, 209872 ausbezahlt, welche bald etwas höher, bald etwas niederer als die genannten sind. Das oben Gesagte findet hiermit seine Bestätigung.

# XVIII.

## Beitrag zur Auflösung kubischer Gleichungen mittels kyklischer und hyperbolischer Functionen.

Von

Herrn Dr. *Wilh. Matzka*,

Professor der Mathematik an der Hochschule zu Prag.

---

Herr Oberlehrer J. F. W. Gronau in Danzig, welcher dem mathematischen Publikum bereits durch einige kritische Abhandlungen über algebraische Fragepunkte sich vortheilhaft bekannt gemacht hat, veröffentlichte in einer Abhandlung, betitelt: „Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Functionen des Kreises und der Hyperbel, nebst Tafeln für die letzteren"*), eine recht umständlich und folgerecht durchgeführte, dann von vielen Beispielen erläuterte und sonach sehr verdienstliche, Darstellung der Berechnung sämmtlicher drei Wurzelwerthe drittgradiger Gleichungen aller möglichen Formen, mit Hülfe der Kreis- und Hyperbelfunctionen. Bei Durchlesung des mir verehrten Exemplars dieser höchst beachtungswürdigen Abhandlung verfiel ich auf ein Paar andere Uebergänge von der zu Grunde gelegten, alle drei Wurzelwerthe der kubischen Gleichung in sich fassenden, cardanischen Formel zu den kyklometrischen und hyperbolischen Cosinus und Sinus, so wie auch auf dreideutige, sämmtliche drei Wurzelwerthe liefernde, Rechnungsausdrücke in derlei Functionen. Die öffentliche Beisteuer dieses geringen Scherfleins zur Auflösung der Gleichungen dritten Grades wolle nicht missfällig aufgenommen werden.

---

*) Separatabdruck aus den „Neuesten Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig", 6. Bandes 2. und 3. Heft. 4. Danzig 1861.

## I.

### Zurückleitung der allgemeinsten Form von Gleichungen dritten Grades auf eine leichter lösbare Hilfsform.

Die allgemeinste oder vollständige Form der algebraischen Gleichungen dritten Grades ist:

$$(1) \qquad Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0,$$

in welcher nothwendig die dritte Potenz der Unbekannten $y$ vorkommen muss, also $A$ nicht Null sein kann. Auch lässt sich voraussetzen, dass das völlig bekannte Glied $D$ nicht Null sei, weil sonst die Gleichung in die zwei

$$y = 0, \quad Ay^2 + By + C = 0$$

zerfallen und letztere nur mehr vom zweiten Grade sein würde. Sonach kann füglich blos eines der zwei Mittelglieder mit der zweiten oder ersten Potenz der Unbekannten fehlen, also $B = 0$ oder $C = 0$ sein. Da wo die zweite Potenz fehlt, erhält die Gleichung die Gestalt:

$$(2) \qquad Ay^3 + Cy + D = 0,$$

dagegen, wenn die erste Potenz mangelt, nimmt die Gleichung zwar die Gestalt

$$Ay^3 + By^2 + D = 0$$

an, kann jedoch dadurch, dass man durch die von Null verschiedene $y^3$ theilt, verwandelt werden in die

$$(3) \qquad D\left(\frac{1}{y}\right)^3 + B.\frac{1}{y} + A = 0,$$

wonach sie, für die Unbekannte $\frac{1}{y}$, mit der Gleichung (2) gleichgestaltet ist.

Schon hieraus liesse sich muthmassen, die Gleichungsform (2) könne eine für die Erleichterung der Lösung der Aufgabe geeignete Hilfsform sein; entschiedener tritt dies jedoch aus folgender Betrachtung hervor.

Die Unbekannte $y$ kann, wie jede andere Zahl, im allgemeinen zweitheilig dargestellt werden; nur frägt es sich dabei,

wann ihre beiden Theile, die wir hier $u$ und $v$ nennen wollen, sich bequem bestimmen lassen. Da wir so

$$(4) \qquad y = u + v$$

setzen, so haben wir

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = u^3 + v^3 + 3uv.y,$$

$$y^2 = (u+v)y$$

und verwandeln hiedurch die Gleichung (1) in

$$[3Auv + B(u+v) + C]y + A(u^3+v^3) + D = 0.$$

Da könnten wir nun $u$, $v$ uns so bemessen denken, dass der Factor der $y$, also auch das Uebrige verschwinde, mithin die Bestimmungsgleichungen

$$3Auv + B(u+v) + C = 0,$$

$$A(u^3+v^3) + D = 0$$

bestehen. Allein ein leichter Ueberblick würde uns belehren, dass aus ihnen, so lange $B$ nicht Null ist, nur mittels einer Gleichung dritten Grades, der wir ja eben ausweichen wollen, das Product $uv$ als zunächst auszuwerthende Unbekannte sich bestimmen lasse.

Hingegen für $B = 0$ oder für die Gleichungsform (2) werden diese beiden Bestimmungsgleichungen:

$$3Auv + C = 0,$$

$$A(u^3+v^3) + D = 0,$$

oder in Folge einer leichten und erlaubten Umänderung:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} Au.Av &= -\frac{AC}{3}, \\ \frac{(Au)^3 + (Av)^3}{2} &= -\frac{A^2D}{2}, \end{aligned} \right.$$

woraus man sofort ersieht, dass mittels einer Gleichung zweiten Grades vorerst die dritten Potenzen von $Au$, $Av$ und aus ihnen dann $u$, $v$ selbst unschwer bestimmt werden können.

Um nun, wie wir hieraus als nothwendig erkennen, die Gleichung (1) in eine andere, die zweite Potenz der Unbekannten nicht enthaltende, umzuwandeln; ertheilen wir ihr durch Multiplication mit der von Null verschiedenen $A^2$ die Gestalt:

$$(Ay)^3 + B(Ay)^2 + AC.Ay + A^2D = 0,$$

an der wir sogleich erkennen, dass ihre zwei ersten Glieder den Anfang von $(Ay + \frac{B}{3})^3$ bilden, folglich dass

$$(Ay)^3 + B(Ay)^2 = (Ay + \frac{B}{3})^3 - 3\left(\frac{B}{3}\right)^2 Ay - \left(\frac{B}{3}\right)^3$$

ist; demnach erhalten wir aus ihr:

$$(Ay + \frac{B}{3})^3 + (AC - \tfrac{1}{3}B^2)Ay + A^2D - \left(\frac{B}{3}\right)^3 = 0$$

und sehen uns hiedurch veranlasst zu setzen

(6) $$Ay + \frac{B}{3} = x \quad \text{oder} \quad y = (x - \frac{B}{3}) : A,$$

folglich diese Gleichung zu verwandeln in

(7) $$x^3 + (AC - \tfrac{1}{3}B^2)x + A^2D + 2\left(\frac{B}{3}\right)^3 - AC.\frac{B}{3} = 0.$$

Um nun diese Unbekannte $x$ **zweitheilig** darstellen, sohin

(8) $$x = u + v$$

setzen und ihre Theile $u$, $v$ einfach berechnen zu können, haben wir nach Obigem die in den Gleichungen (1) stehenden Zahlen

$$y, \quad A, \quad B, \quad C, \quad D$$

zu ersetzen beziehungsweise durch

$$x, \; 1, \; 0, \; AC - \tfrac{1}{3}B^2, \; A^2D + 2\left(\frac{B}{3}\right)^3 - AC.\frac{B}{3}$$

und erhalten so anstatt der Bestimmungsgleichungen (5) der $u$, $v$ die folgenden:

$$uv = -\tfrac{1}{3}(AC - \tfrac{1}{3}B^2),$$

$$\frac{u^3 + v^3}{2} = -\tfrac{1}{2}(A^2D + 2\left(\frac{B}{3}\right)^3 - AC.\frac{B}{3}).$$

Hier sehen wir uns aufgefordert, zur Abkürzung zu setzen:

$$AC - \tfrac{1}{3}B^2 = -3f, \quad A^2D + 2\left(\frac{B}{3}\right)^3 - AC.\frac{B}{3} = -2g,$$

damit wir für $u$, $v$ die möglich einfachsten Bestimmungsgleichungen

(9) $$uv = f,$$

(10) $$\frac{u^3+v^3}{2}=g\cdot$$

erhalten.

Berechnen wir demnach aus den Coefficienten der Gleichung (1) die Hilfszahleu $f$ und $g$ nach den Ausdrücken:

(11) $$f=\left(\frac{B}{3}\right)^2-\frac{AC}{3},\quad g=\frac{AC}{2}\cdot\frac{B}{3}-\left(\frac{B}{3}\right)^3-\frac{A^2D}{2},$$

so erhalten wir als zuvörderst aufzulösende Hilfsgleichung

(12) $$x^3-3fx-2g=0 \quad \text{oder} \quad x^3=3fx+2g.$$

Für die beiden Theile $u$, $v$ der $x$ liefern die Gleichungen (9) und (10) zunächst:

$$\left(\frac{u^3+v^3}{2}\right)^2-(uv)^3=\left(\frac{u^3-v^3}{2}\right)^2=g^2-f^3$$

und sohin

(13) $$u^3=g+\sqrt{g^2-f^3},\quad v^3=g-\sqrt{g^2-f^3},$$

welche Ausdrücke ich lese: $u$, $v$ sind die dritten Wurzeln der dem Gleichheitszeichen nachfolgenden Summen. Setzt man sonach aus den Werthen der $u$ und $v$ nach Gleichung (8) den Wurzelwerth $x$ der Gleichung (12) zusammen, so findet man die eigentlich in Frage gestellte Unbekannte $y$ aus der Gleichung (6).

Aus dieser ganzen Betrachtung erhellet nun, dass es sich hier eigentlich doch blos um die vollständige Auflösung der Hilfsgleichung

(12) $$x^3=3fx+2g$$

handelt, und dass deren Wurzelwerth $x$ durch den Ausdruck

(8) $$x=u+v$$

allgemein dargestellt wird, welcher unter der Voraussetzung, dass man $u$, $v$ den Ausdrücken

$$u^3=g+\sqrt{g^2-f^3},\quad v^3=g-\sqrt{g^2-f^3}$$

gemäss berechne, die Formel des Cardanus genannt zu werden pflegt.

Hier nun beabsichtige ich, mit der Einschränkung, dass die Coefficienten $f$, $g$ der Gleichung (12) nicht imaginär (complex), sondern jedenfalls reell seien, diesen allgemeinen Ausdruck (8)

mit Benutzung theils der Kreisfunctionen, theils der hyperbolischen Functionen dermassen umzugestalten, dass derselbe alle drei Wurzelwerthe $x$ der Gleichung (12) in sich begreife. Dabei müssen wir vor Allem unterscheiden, ob die in (13) stehende zweite Wurzel reell oder imaginär sei oder, um uns in altherkömmlicher Weise auszusprechen, ob bei der aufzulösenden kubischen Gleichung (12) der reducible oder der irreducible Fall vorkomme, die Gleichung also nur einen oder drei reelle Wurzelwerthe besitze; von welch beiden Fällen wir den letzteren zunächst behandeln wollen.

## II.

### Erste Verwandlungsweise der Formel Cardan's.

#### A. Irreducibler Fall,

wo die $\sqrt{g^2-f^3}$ imaginär also $f^3 \geqq g^2$ mithin $f$ positiv ist.

In diesem Fall setzen wir des (negativen) Radicands (positives) Gegentheil

$$f^3-g^2=h^2, \tag{14}$$

wobei wir die reelle Zahl $h$ für positiv ansehen wollen. Dann wird, wofern wir $\sqrt{-1}=i$ stellen,

$$u^3=g+ih, \quad v^3=g-ih.$$

Nun dürfen wir bekanntlich jedwede zwei reelle Zahlen $(g, h)$ beziehungsweis dem Cosinus und Sinus einer Zahl $(\varphi)$, welche den Zahlwerth entweder eines Winkels oder eines ihm entsprechenden Kreisbogens oder auch eines ihm angehörigen Kreissectors vorstellt, proportionirt und gleichstimmig setzen; folglich, wenn wir das positive Verhältniss jeder von jenen zwei Zahlen zu ihrer Proportionellen mit $r$ bezeichnen, dürfen wir aufstellen:

$$\frac{g}{\cos\varphi}=\frac{h}{\sin\varphi}=r;$$

dann ist dies auch

$$=\frac{\sqrt{g^2+h^2}}{\sqrt{\cos\varphi^2+\sin\varphi^2=1}}=\sqrt{g^2+h^2}.$$

Wir berechnen demnach vorerst die positive Verhältnisszahl $r$ aus

$$r^2 = g^2 + h^2$$

und dann die Masszahl $\varphi$ aus

$$\cos\varphi = \frac{g}{r} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{h}{r}$$

im Bereiche $\varphi = 0 \ldots . \pi$; dann ist umgekehrt:

$$g = r\cos\varphi, \quad h = r\sin\varphi$$

und sonach

$$g \pm ih = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi).$$

Es ist aber bekanntlich für jede reelle Zahl $\varphi$

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$$

und wenn man, für das obere Qualitätszeichen

$$\varphi = n\pi$$

setzt, unter $n$ eine positive oder negative Anzahl (ganze Zahl) verstehend, wobei

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0$$

ist, so erhält man

$$(-1)^n = e^{in\pi} \quad \text{und} \quad 1 = (-1)^n e^{in\pi};$$

mithin darf man auch verallgemeinernd schreiben:

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi} . (-1)^n e^{in\pi} = (-1)^n e^{\pm i\varphi + in\pi}$$

und es wird

$$\left.\begin{matrix} u^3 \\ v^3 \end{matrix}\right\} = g \pm h = (-1)^n r e^{\pm i\varphi + in\pi},$$

folglich

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = (-1)^n r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pm\varphi + n\pi}{3}}.$$

Hierin kann die Anzahl $n$ blos 3 natürlich nach einander folgende ganze Zahlen vorstellen; denn lässt man sie um ein Mehrfaches von drei wachsen, also in $n + 3m$ übergehen, so wird der Factor des $r^{\frac{1}{3}}$

$$(-1)^{n+3m}e^{i\frac{\pm\varphi+n\pi+3m\pi}{3}}=(-1)^n e^{i\frac{\pm\varphi+n\pi}{3}}.(-1)^m e^{im\pi}$$
$$=(-1)^n e^{i\frac{\pm\varphi+n\pi}{3}};$$

behält also seine vorige Grösse. Soll hiebei $n$ möglichst klein angenommen werden, damit der Winkel $\frac{n\pi}{3}$ den rechten Winkel $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreite, so kann man nur

$$n=-1,\ 0,\ +1$$

annehmen; was hier durchgehends geschehen soll.

In dem uns vorliegenden Falle ist

$$h^2=f^3-g^2,$$

also

$$r^2=g^2+h^2=f^3,\quad r=\sqrt{f^3},\quad r^{\frac{1}{3}}=f^{\frac{1}{2}};$$

daher hat man $\varphi$ zu berechnen aus

$$(15)\qquad \cos\varphi=g:f^{\frac{3}{2}}=\frac{g}{\sqrt{f^3}},\quad \varphi=0\ldots.\pi$$

und es ist

$$\left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\}=(-1)^n f^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pm\varphi+n\pi}{3}}.$$

Gegenwärtig kommt noch zu erwägen, dass der Gleichung (9) gemäss, das Product $uv=f$ ausfallen muss; folglich, wenn man für $u$ die Anzahl $n$, dagegen für $v$ die $n'$ gelten lässt, muss nothwendig

$$uv:f=1=(-1)^{n+n'}.e^{i\frac{n+n'}{3}\pi},$$

folglich die Summe $n+n'$ eine durch 3 theilbare Anzahl sein. Da sie willkürlich ist, so bleibt es das Einfachste sie gleich Null anzunehmen, also

$$n+n'=0$$

und sohin

$$n'=-n$$

zu machen. Demgemäss ist nunmehr:

$$u=(-1)^n f^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi+n\pi}{3}},$$
$$v=(-1)^n f^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\varphi+n\pi}{3}};$$

und nach der Gleichung (8), wenn man noch bedenkt, dass bekanntlich

$$e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2\cos\omega$$

ist, erhält man endlich den gesuchten vollständigen dreiwerthigen Ausdruck der fraglichen Uebekannten:

(16)

$$x = (-1)^n 2\sqrt{f}.\cos\frac{\varphi + n\pi}{3} = (-1)^n 2\sqrt{f}(\cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\varphi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{\varphi}{3})$$

$$(n = 0,\ +1,\ -1),$$

oder vereinzelt, wenn man $\pi$ durch $180^0$ ersetzt,

(17)

$$x = 2\sqrt{f}.\cos\frac{\varphi}{3};\ -2\sqrt{f}.\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^0\right);\ -2\sqrt{f}.\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^0\right).$$

Hier sind demnach alle drei Wurzelwerthe der Gleichung (12) reell und die sämmtlichen $\sqrt{f}$ hat man positiv zu nehmen.

## Sonderfälle.

1) Ist insbesondere $f^3 = g^2$, also die gegebene Gleichung

$$x^3 = 3fx \pm 2\sqrt{f^3},$$

so ist $g = \pm f\sqrt{f}$, $h = 0$, $r = \pm g$, daher $\cos\varphi = \frac{g}{r} = \pm 1$, $\sin\varphi = 0$ und $\varphi = 0$ für positive $g$, dagegen $\varphi = \pi$ für negative $g$. Sonach gehört zur Gleichung

$$x^3 = 3fx + 2\sqrt{f^3}$$

$\varphi = 0$ und der Wurzelwerth

$$x = (-1)^n 2\sqrt{f}.\cos\frac{n}{3}\pi$$

$$= 2\sqrt{f};\ -\sqrt{f};\ -\sqrt{f};$$

dagegen zur Gleichung

$$x^3 = 3fx - 2\sqrt{f^3}$$

$\varphi = \pi$ und der Wurzelwerth

$$x = (-1)^n 2\sqrt{f}.\cos\frac{n+1}{3}\pi$$

$$= \sqrt{f};\ \sqrt{f};\ -2\sqrt{f}.$$

Jede dieser zwei Gleichungen besitzt also zwei gleiche Wurzelwerthe.

2) Ist insbesondere $g=0$, also die aufzulösende Gleichung

$$x^3=3fx,$$

so ist $r=h=\sqrt{f^3}$; $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=1$; $\varphi=\frac{\pi}{2}$, mithin

$$x=(-1)^n 2\sqrt{f}\cos\frac{2n+1}{6}\pi$$
$$=-\sqrt{3f};\ \sqrt{3f};\ 0;$$

wie auch sonst leicht zu finden war.

### B. Reducibler Fall,

wo die $\sqrt{g^2-f^3}$ reell, also $f^3<g^2$ und sonach $f$ positiv oder negativ ist.

In diesem Falle setzen wir den positiven Radicand selbst

$$g^2-f^3=h^2, \tag{18}$$

wobei wir zugleich die reelle Zahl $h$ für positiv ansehen wollen. Dann wird

$$u^3=g+h,$$
$$v^3=g-h.$$

Wir versuchen nun, solche zwei reelle Zahlen, $g$ und $h$, beziehungsweis dem hyperbolischen Cosinus und Sinus einer Zahl, $\varphi$, der Masszahl eines hyperbolischen Sectors, proportional anzunehmen, und den Quotienten jeder von jenen zwei Zahlen durch ihre Proportionale mit $r$ zu bezeichnen, folglich zu setzen:

$$\frac{g}{\operatorname{Cos}\varphi}=\frac{h}{\operatorname{Sin}\varphi}=r;$$

dann ist dies noch

$$=\frac{\sqrt{g^2-h^2}}{\sqrt{\operatorname{Cos}\varphi^2-\operatorname{Sin}\varphi^2=1}}=\sqrt{g^2-h^2}.$$

Wir ersehen demnach hieraus, dass

α) hier $g^2>h^2$ sein müsse, daher von jenen beiden Zahlen $g$, $h$ diejenige dem hyperbolischen Cosinus proportional gesetzt werden müsse, welche unter ihnen den grösseren Zahlwerth besitzt;

β) dass, weil $\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2 = 1$ also nie Null ist, folglich $\mathrm{Cos}\,\varphi^2$ und $\mathrm{Sin}\,\varphi^2$ nie gleich sein können, diese Proportionalstellung ganz unstatthaft bleibt, wenn $g^2 = h^2$ ist; und

γ) dass, weil $\mathrm{Cos}\,\varphi$ nur positiver Werthe fähig ist, jedesmal $r$ mit $g$ gleichstimmig gewählt werden muss und sonach mit ihnen auch $\mathrm{Sin}\,\varphi$ und $\varphi$ gleichstimmig ausfällt, da $h$ für positiv festgestellt worden ist.

Sonach berechnet man hier zuvörderst die mit $g$ gleichstimmige Hilfszahl $r$ aus

$$r^2 = g^2 - h^2,$$

dann die ebenfalls mit $g$ einstimmige Masszahl $\varphi$ aus einer der zwei Gleichungen

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{g}{r}, \quad \mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{h}{r};$$

wonach man umgekehrt erhält:

$$g = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi, \quad h = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

daher

$$g \pm h = r(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi).$$

Es ist jedoch den bekannten Erklärungen gemäss:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \quad \mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2};$$

daher

$$\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi = e^{\pm\varphi} = e^{\pm\varphi}.(-1)^n e^{in\pi} = (-1)^n e^{\pm\varphi + in\pi}.$$

Demgemäss erhält man

$$\left.\begin{matrix} u^3 \\ v^3 \end{matrix}\right\} = g \pm h = (-1)^n r e^{\pm\varphi + in\pi},$$

folglich:

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = (-1)^n r^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pm\varphi + in\pi}{3}},$$

wo wieder wie oben die $n$, nur irgend welche drei nach einander folgende Glieder der natürlichen Zahlenreihe, am einfachsten $-1,\ 0,\ +1$ vorstellt.

In dem uns vorliegenden Falle ist

$$h^2 = g^2 - f^3,$$

folglich damit auch $g^2 > h^2$ ausfalle, muss

**1.** $f$ **positiv und oberhalb Null sein.** Dann haben wir

$$r^2 = g^2 - h^2 = f^3, \quad r = f^{\frac{3}{2}}, \; r^{\frac{1}{3}} = f^{\frac{1}{2}},$$

folglich berechnen wir die Zahl $\varphi$ aus

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{g}{\sqrt{f^3}} = +,$$

indem wir sie, weil $h$ stets positiv genommen werden soll, jedesmal mit der $g$ und der $\sqrt{f^3}$ gleichstimmig machen; und dann ist

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = (-1)^n f^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pm\varphi + in\pi}{3}}.$$

Auch hier muss das Product $uv = f$ sich ergeben, mithin müssen abermals wie oben die den $u$ und $v$ entsprechenden Anzahlen $n$ gleich gross aber entgegengesetzt sein; und man hat

$$u = (-1)^n f^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\varphi + in\pi}{3}},$$

$$v = (-1)^n f^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varphi + in\pi}{3}};$$

folglich den fraglichen Wurzelwerth

$$\text{(20)} \qquad x = (-1)^n 2\sqrt{f}.\operatorname{Cos}\frac{\varphi + in\pi}{3}.$$

Löst man diesen Cosinus zum besseren Verständnisse nach den leicht erweisbaren Formen:

$$\operatorname{Cos}(\varphi + \psi) = \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi + \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi,$$

$$\operatorname{Cos} i\omega = \cos\omega, \quad \operatorname{Sin} i\omega = i\sin\omega$$

auf; so erfolgt:

$$\text{21)} \quad \left\{\begin{aligned} x &= (-1)^n 2\sqrt{f}.(\cos\frac{n\pi}{3}\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{3}) \\ &= 2\sqrt{f}.\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{3}; \quad -\sqrt{f}.(\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}.\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{3}); \\ &\qquad\qquad -\sqrt{f}.(\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{3} - i\sqrt{3}.\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{3}). \end{aligned}\right.$$

In allen diesen Ausdrücken muss die $\sqrt{f}$ mit der $g$ einstimmig gewählt werden.

2. Ist dagegen $f$ negativ, und ebenfalls von der Null verschieden, so ist:

$$h^2 > g^2,$$

folglich haben wir die (absolut) grössere Zahl $h$ dem hyperbolischen Cosinus proportionirt zu setzen, nemlich

$$\frac{h}{\operatorname{Cos}\varphi} = \frac{g}{\operatorname{Sin}\varphi} = r,$$

daher auch

$$= \frac{\sqrt{h^2 - g^2}}{\sqrt{\operatorname{Cos}\varphi^2 - \operatorname{Sin}\varphi^2 = 1}} = \sqrt{h^2 - g^2}.$$

Hier ist $h$ positiv festgestellt, $\operatorname{Cos}\varphi$ an sich jederzeit positiv, mithin muss auch $r$ immer positiv gewählt werden und $\operatorname{Sin}\varphi$, also auch $\varphi$, dasselbe Vorzeichen wie $g$ erhalten. Sonach berechnen wir erstlich die positive Hilfszahl $r$ aus

$$r^2 = h^2 - g^2,$$

dann die mit $g$ einstimmige Hilfszahl $\varphi$ aus einer der beiden Gleichungen

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{h}{r}, \quad \operatorname{Sin}\varphi = \frac{g}{r}$$

und hiernach ist umgekehrt:

$$h = r \operatorname{Cos}\varphi, \quad g = r \operatorname{Sin}\varphi,$$

folglich:

$$g \pm h = \pm r(\operatorname{Cos}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi) = \pm(-1)^n r e^{\pm\varphi + in\pi}$$

und

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{g \pm h} = \pm(-1)^n r^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pm\varphi + in\pi}{3}},$$

wo $n$ gleichfalls nur die drei Werthe $-1$, $0$, $+1$ annimmt.

Im vorliegenden Falle ist zwar wie früher

$$h^2 = g^2 - f^3,$$

allein

$$r^2 = h^2 - g^2,$$

daher

$$r^2 = -f^3, \quad r = \sqrt{-f^3} = +, \quad r^{\frac{1}{3}} = \sqrt{-f};$$

folglich kommmt die mit $g$ einstimmige Zahl $\varphi$ zu berechnen aus

$$\text{(22)} \qquad \mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{g}{\sqrt{-f^3}}$$

und es wird

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \pm(-1)^n\sqrt{-f}\,.\,e^{\frac{\pm\varphi + in\pi}{3}}.$$

Damit auch hier $uv = f$ werde, muss wie früher, wenn zur $u$ die $n$ gehört, zur $v$ die $-n$ gehören, mithin findet man:

$$u = \pm(-1)^n\sqrt{-f}\,.\,e^{\frac{\varphi + in\pi}{3}},$$

$$v = \pm(-1)^n\sqrt{-f}\,.\,e^{-\frac{\varphi + in\pi}{3}}.$$

Es dürfte an dieser Stelle nicht überflüssig sein zu bemerken, dass man in allen bisher behandelten Fällen auch blos $u$ auszudrücken und dann $v$ der Gleichung (9) gemäss als

$$v = \frac{f}{u} = fu^{-1}$$

zu bestimmen brauchte.

Schreibt man nun diese Ausdrücke des $u$ und $v$ in die Gleichung (8) und berücksichtigt noch, dass $e^{\omega} - e^{-\omega} = 2\,\mathrm{Sin}\,\omega$ ist, so findet man den verlangten Wurzelwerth

$$\text{(23)} \qquad x = (-1)^n 2\sqrt{-f}\,.\,\mathrm{Sin}\frac{\varphi + in\pi}{3}.$$

Löst man zum besseren Verständniss und zur wirklichen Ausrechnung der $x$ den Sinus nach der leicht erweisbaren Formel

$$\mathrm{Sin}(\varphi + \psi) = \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\psi + \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\psi$$

auf, so erfolgt:

$$\text{(24)} \quad \left\{\begin{aligned} x &= (-1)^n 2\sqrt{-f}\left(\cos\frac{n\pi}{3}\,\mathrm{Sin}\,{}_3 + i\sin\frac{n\pi}{3}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{-f}\,.\,\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{3};\quad -\sqrt{-f}\left(\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}\,.\,\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{3}\right); \\ &\qquad\qquad\qquad\quad -\sqrt{-f}\left(\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{3} - i\sqrt{3}\,.\,\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{3}\right). \end{aligned}\right.$$

In all diesen Ausdrücken von $x$ ist die $\sqrt{-f}$ positiv einzustellen.

Als Sonderfall ist hier der zu betrachten, wo $g = 0$ ist

(versteht sich für negative $f$). Da ist die aufzulösende Gleichung

$$x^3 = 3fx,$$

und nach Gleichung (22) $\mathrm{Sin}\,\varphi = 0$, also $\varphi = 0$, und sohin allgemein

$$x = (-1)^n 2\sqrt{-f}.\mathrm{Sin}\frac{in\pi}{3} = (-1)^n i 2\sqrt{-f}.\sin\frac{n\pi}{3},$$

daher zerfällt:

$$x = 0; \quad -i\sqrt{-3f}; \quad +i\sqrt{-3f};$$

was mit den Ergebnissen der kürzeren gewöhnlichen Auflösung zusammenfällt.

3. Ist endlich $f$ gleich Null und $g^2 > 0$, so erfolgt $h^2 = g^2$; mithin können nach dem oben (in $\beta$) Erwiesenen $g$ und $h$ durchaus nicht dem (hyperbolischen) Cosinus und Sinus eines Hyperbelsectors proportionirt gesetzt werden; daher gilt hierfür auch keine der auf dieser Grundlage abgeleiteten Gleichungen (22), (23) und (24); sondern man muss die diesfällige Form der aufzulösenden Gleichung selbst, nämlich

$$x^3 = 2g$$

in Betracht ziehen. Nur um der Vollständigkeit halber mag noch erwähnt werden, dass man sie zuerst so schreiben kann:

$$x^3 = 2g.(-1)^n e^{in\pi}$$

und hiernach sofort erhält:

$$x = (-1)^n \sqrt[3]{2g}.e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

$$= (-1)^n \sqrt[3]{2g}(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})$$

$$= \sqrt[3]{2g}; \quad -\sqrt[3]{2g}(\tfrac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}); \quad -\sqrt[3]{2g}(\tfrac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

## III.

### Zweite Umwandlungsweise der Cardanischen Formel.

In einer andern, nach meinem Dafürhalten besseren, Weise **lässt** sich die der Gleichung (12) entsprechende Cardanische Formel (8) mit (13) wie folgt umwandeln.

Der in den Ausdrücken (13) der $u^3$, $v^3$ vorkommende Radicand $g^2-f^3$ ist entweder positiv oder negativ, je nachdem $g^2 \geqq f^3$ oder $g^2 < f^3$ ist; also gleicht er der (positiven) zweiten Potenz einer reellen, und (was unserem Belieben anheim gestellt bleibt) auch noch positiven, Zahl $h$ multiplicirt mit einer Potenz der Zahl $-1$ nach einem geraden oder ungeraden Exponenten $m$, nämlich

$$g^2 - f^3 = (-1)^m h^2. \tag{25}$$

Hieraus folgt nun:

$$\sqrt{g^2-f^3} = (\sqrt{-1})^m h = i^m h,$$

wobei jedoch $m$ auf die Anzahlen 0 und 1 eingeschränkt werden kann und hier auch soll; dadurch wird

$$u^3 = g + i^m h,$$

$$v^3 = g - i^m h.$$

Soll nun die dritte Wurzel dieser Binome vollständig (dreiwerthig) dargestellt werden, so multipliciren wir die Binome mit

$$1 = (-1)^n e^{in\pi}$$

und ziehen sofort die dritte Wurzel aus den Producten, wonach wir

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = (-1)^n \sqrt[3]{g \pm i^m h} . e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

erhalten, wofern wir unter dem Zeichen $\sqrt[3]{g \pm i^m h}$ irgend eine, wo thunlich die reelle Wurzel dieses Binoms verstehen.

Auch hier kann aus gleichen Gründen wie früher $n$ nur drei natürlich auf einander folgende Anzahlen, am einfachsten $-1$, $0$, $+1$, vorstellen. Tritt ferner beim Uebertritt von $u$ auf $v$ an die Stelle von $n$ die $n'$, so muss, weil $uv = f$ ist, werden:

$$uv:f = 1 = \sqrt[3]{g^2 - (-1)^m h^2} . (-1)^{n+n'} e^{i\frac{n+n'}{3}\pi} : f$$

$$= (-1)^{n+n'} e^{i\frac{n+n'}{3}\pi},$$

mithin kann auch da die Summe $n + n'$ eine beliebige durch 3 theilbare Zahl, am einfachsten die Null sein, wonach $n' = -n$ erfolgt und

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{g \pm i^m h} \cdot (-1)^n e^{\pm i \frac{n\pi}{3}}$$

wird.

Da nun die gegebenen Zahlen $g$ und $h$ reelle Zahlen sind, so können wir allgemein

$$(26) \qquad \sqrt[3]{g \pm i^m h} = p \pm i^m q$$

stellen, indem wir auch die beiden fraglichen Zahlen $p$ und $q$ als reell bedingen. Denn hieraus folgt, weil $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ ist,

$$g + i^m h = p^3 + i^m 3p^2 q + (-1)^m 3pq^2 + i^m (-1)^m q^3,$$

$$g - i^m h = p^3 - i^m 3p^2 q + (-1)^m 3pq^2 - i^m (-1)^m q^3;$$

daher, wenn man erst addirt, dann subtrahirt und beide Mal hälftet, erhält man für $p$ und $q$ die zwei Bestimmungsgleichungen:

$$(\alpha) \qquad p^3 + (-1)^m 3pq^2 = g,$$

$$(\beta) \qquad 3p^2 q + (-1)^m q^3 = h.$$

Von diesen Gleichungen multipliciren wir die erste mit $-q$, die zweite mit $+3p$ und bekommen zur Summe

$$8p^3 q = 3hp - gq,$$

mithin

$$q = \frac{3hp}{8p^3 + g} = hp : \frac{8p^3 + g}{3}.$$

Da sehen wir uns aufgefordert zur Abkürzung:

$$(\gamma) \qquad \frac{8p^3 + g}{3} = t$$

zu setzen und $t$ als Hilfsunbekannte zu betrachten; wonach wir erhalten:

$$(\delta) \qquad 8p^3 = (2p)^3 = 3t - g,$$

$$(\varepsilon) \qquad q = h\frac{p}{t}.$$

Stellen wir diese Ausdrücke in die achtfache Gleichung $(\alpha)$ ein, so lässt diese sich durch 3 theilen und wird sofort:

$$t + (-1)^m h^2 \frac{3t - g}{t^2} = 3g,$$

oder

$$(\zeta) \qquad t^3 - 3gt^2 + (-1)^m 3h^2 t - (-1)^m gh^2 = 0.$$

Da diese Bestimmungsgleichung der Hilfsunbekannten $t$ vom dritten Grade ist und lauter reelle Coefficienten besitzt, so liefert sie für $t$ sicher Einen reellen Werth. Zu diesem nun geben die Gleichungen ($\delta$) und ($\varepsilon$) je einen reellen Werth der in Frage stehenden Zahlen $p$ und $q$; somit bleibt es gestattet, nach dem Ausdrucke (26) die dritte Wurzel aus jenem Binom ähnlich binomisch darzustellen.

Durch Verwendung dieses Ausdruckes (26) verwandeln sich nunmehr die letzten Ausdrücke der $u$ und $v$ in

$$u = (p + i^m q)(-1)^n e^{i\frac{n\pi}{3}},$$

$$v = (p - i^m q)(-1)^n e^{-i\frac{n\pi}{3}}$$

und sohin ist ihre Summe als der verlangte Wurzelwerth

$$(27) \qquad x = (-1)^n 2(p \cos\frac{n}{3}\pi + i^{m+1} q \sin\frac{n}{3}\pi).$$

Dieser allgemeine Wurzelausdruck unserer Gleichung gibt zu erkennen, dass für $m = 1$ alle drei Wurzelwerthe reell, dagegen für $m = 0$ nur Ein Wurzelwerth reell, die beiden anderen dagegen conjugirt complex ausfallen; welche zwei Fälle wir als den irreducibeln und reducibeln unterscheiden, bei denen es sich jetzt nur noch um die angemessenere Ausdrucksweise der Hilfszahlen $p$ und $q$ handelt.

### A. Irreducibler Fall.

Hier ist $m = 1$, $g^2 - f^3 = -h^2$ also $f^3 \geqq g^2$ und sohin ist die positive Zahl $h = \sqrt{f^3 - g^2}$ und

$$\sqrt[3]{g + ih} = p + iq.$$

Wir setzen deshalb

$$\frac{g}{\cos\varphi} = \frac{h}{\sin\varphi}$$

und dies ist noch ferner:

$$= \frac{\sqrt{g^2 + h^2}}{\sqrt{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2}} = \sqrt{f^3},$$

$$= \frac{g + ih}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{g + ih}{e^{i\varphi}},$$

mithin haben wir

$$g+ih=e^{i\varphi}.\sqrt{f^3}$$

und

$$p+iq=\sqrt{f}.e^{i\frac{\varphi}{3}}=\sqrt{f}.(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}),$$

woraus wir sofort finden:

$$p=\sqrt{f}.\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$q=\sqrt{f}.\sin\frac{\varphi}{3}.$$

Nehmen wir demnach, da $f$ hier positiv sein muss, auch die $\sqrt{f}$ positiv, so berechnen wir zuvörderst $\varphi=0\ldots.\pi$ nach der Gleichung

(28) $$\cos\varphi=\frac{g}{\sqrt{f^3}}$$

und zufolge des Ausdruckes (27) den Wurzelwerth:

(29) $$\begin{cases} x=(-1)^n 2\sqrt{f}(\cos\frac{n}{3}\pi\cos\frac{\varphi}{3}-\sin\frac{n}{3}\pi\sin\frac{\varphi}{3}) \\ \quad =(-1)^n 2\sqrt{f}\cos\frac{\varphi+n\pi}{3}. \end{cases}$$

### B. Reducibler Fall.

Da ist $m=0$, $g^2-f^3=h^2$ also $f^3<g^2$, mithin ist die positive Zahl $h=\sqrt{g^2-f^3}$ und

$$\sqrt[3]{g\pm h}=p\pm q,$$

dabei ist jedoch zu unterscheiden, ob $f$ positiv oder negativ ist

1. Wenn $f$ positiv ist, so ist $g^2>h^2$, folglich setzen wir

$$\frac{g}{\operatorname{Cos}\varphi}=\frac{h}{\operatorname{Sin}\varphi}$$

und dies ist weiter

$$=\frac{\sqrt{g^2-h^2}}{\sqrt{\operatorname{Cos}\varphi^2-\operatorname{Sin}\varphi^2}}=\sqrt{f^3}$$

$$=\frac{g\pm h}{\operatorname{Cos}\varphi\pm\operatorname{Sin}\varphi}=\frac{g\pm h}{e^{\pm\varphi}},$$

sonach haben wir

$$g \pm h = e^{\pm\varphi} \sqrt{f^3}$$

und

$$p \pm q = \sqrt{f} . e^{\pm \frac{\varphi}{3}} = \sqrt{f} . (\mathrm{Cos} \frac{\varphi}{3} \pm \mathrm{Sin} \frac{\varphi}{3}),$$

woraus wir sogleich finden:

$$p = \sqrt{f} . \mathrm{Cos} \frac{\varphi}{3},$$

$$q = \sqrt{f} . \mathrm{Sin} \frac{\varphi}{3}.$$

Nehmen wir, da hier $h$ und $\mathrm{Cos}\varphi$ positiv sind, die $\sqrt{f}$ mit $g$ gleichstimmig, so muss mit ihnen auch $\mathrm{Sin}\,\varphi$ und also auch $\varphi$ einstimmig sich ergeben und zwar berechnen wir zunächst $\varphi$ nach der Gleichung:

(30) $$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{g}{\sqrt{f^3}}$$

und danach zufolge des Ausdruckes (27) den Wurzelwerth:

(31) $$x = (-1)^n 2\sqrt{f} (\cos \frac{n\pi}{3} \mathrm{Cos} \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \mathrm{Sin} \frac{\varphi}{3}).$$

Auch lässt sich hiefür schreiben:

$$x = (-1)^n 2\sqrt{f} (\mathrm{Cos} \frac{in\pi}{3} \mathrm{Cos} \frac{\varphi}{3} + \mathrm{Sin} \frac{in\pi}{3} \mathrm{Sin} \frac{\varphi}{3}),$$

oder zusammengezogen (wenngleich für eine directe Ausrechnung ungeeignet):

(32) $$x = (-1)^n 2\sqrt{f} . \mathrm{Cos} \frac{\varphi + in\pi}{3}.$$

2. Wenn $f$ negativ ist, so ist $g^2 < h^2$, daher setzen wir:

$$\frac{h}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{g}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \sqrt{h^2 - g^2} = \sqrt{-f^3}$$

$$= \frac{g \pm h}{\mathrm{Sin}\,\varphi \pm \mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{g \pm h}{\pm e^{\pm\varphi}},$$

und sonach ist

$$g \pm h = \pm e^{\pm\varphi} . \sqrt{-f^3},$$

also

$$p \pm q = \pm \sqrt{-f} \, . \, e^{\pm \frac{\varphi}{3}} = \sqrt{-f} . (\mathrm{Sin} \frac{\varphi}{3} \pm \mathrm{Cos} \frac{\varphi}{3}),$$

woraus wir sogleich finden:

$$p = \sqrt{-f} . \mathrm{Sin} \frac{\varphi}{3},$$

$$q = \sqrt{-f} . \mathrm{Cos} \frac{\varphi}{3}.$$

Mithin ist der in Frage gestellte Wurzelwerth

(33) $$x = (-1)^n 2 \sqrt{-f} . (\cos \frac{n\pi}{3} \mathrm{Sin} \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \mathrm{Cos} \frac{\varphi}{3}),$$

oder, wenn man ihn erst so umschreibt:

$$x = (-1)^n 2 \sqrt{-f} . (\mathrm{Cos} \frac{in\pi}{3} \mathrm{Sin} \frac{\varphi}{3} + \mathrm{Sin} \frac{in\pi}{3} \mathrm{Cos} \frac{\varphi}{3}),$$

auch zusammengezogen:

(34) $$x = (-1)^n 2 \sqrt{-f} . \mathrm{Sin} \frac{\varphi + in\pi}{3}.$$

Hiebei muss, weil $h$ und $\mathrm{Cos}\,\varphi$ positiv sind, auch $\sqrt{-f}$ positiv gewählt werden, und $\mathrm{Sin}\,\varphi$, also auch $\varphi$ muss mit $g$ gleichstimmig sein; zugleich berechnet man diese erforderliche Hilfszahl $\varphi$ aus

(35) $$\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{g}{\sqrt{-f^3}}.$$

## XIX.

# Ueber Eble's Stundenzeiger, ein Instrument zur Zeitbestimmung.

Von

dem Herausgeber.

---

Die Bestimmung der Zeit ist wegen der Berichtigung der Uhren für die Bedürfnisse des gemeinen Lebens von so grosser Wichtigkeit, dass man sich nicht wundern darf, dass schon vielfache Methoden und Instrumente angegeben worden sind, welche dazu bestimmt sind, dieses Geschäft auf möglichst leichte und einfache Weise zu verrichten, wobei es sich natürlich von selbst versteht, dass hiebei von den Methoden, deren sich der eigentliche Astronom bedient, und von den vielen Hülfsmitteln, die demselben zu Gebote stehen, nicht die Rede sein kann und soll. In neuester Zeit hat Herr M. Eble, Lehrer der Mathematik und Physik an der Realanstalt in Ellwangen in Würtemberg, unter dem Namen „Horoskop" oder „Stundenzeiger" ein Instrument zur Zeitbestimmung angegeben, welches mir besondere Beachtung zu verdienen scheint, und auch namentlich den Schulen zu empfehlen sein möchte, da sich nach meiner Meinung von demselben bei'm Unterrichte in mehrfacher Beziehung ein instructiver Gebrauch machen lässt, wobei ich zugleich bemerke, dass der Director der Sternwarte in Wien, Herr v. Littrow, der dortigen Akademie der Wissenschaften einen sehr vortheilhaften Bericht über diese sinnreiche Vorrichtung erstattet hat*). Es scheint

---

*) M. s. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Band XLII. Nr. 22. Sitzung vom 11. October 1860. S. 203.

mir daher zweckmässig, in dem Archiv eine etwas ausführlichere Nachweisung über die Erfindung des Herrn Eble zu ertheilen, und dieselbe dadurch namentlich auch den Schulen zum Gebrauche bei'm Unterrichte zu empfehlen.

Das Instrument hat und erfüllt auch, nach meiner Ueberzeugung, den doppelten Zweck: erstens eine leichte und schnelle Beobachtung der Sonne bei jedem Azimuth oder jedem Stundenwinkel zu ermöglichen; und zweitens jede Rechnung entbehrlich zu machen und auf die blosse Ablesung einer Scale zurückzuführen, welchem letzteren Erfordernisse natürlich nur dadurch genügt werden konnte, dass an die Stelle der Auflösung des bei der Zeitbestimmung zur Betrachtung kommenden sphärischen Dreiecks durch Rechnung eine graphische Construction gesetzt wurde.

Um nicht zu weitläufig zu werden, theile ich im Anhange zu diesem Aufsatze die Beschreibung des Instrumentes nebst Zeichnung, und die Anweisung zu dessen Gebrauche mit, welche Herr Eble selbst in seiner Schrift:

Das Horoskop oder der Stundenzeiger, erfunden von Mich. Eble (medaille d'honneur par l'Institut des Arts-unis de Londres etc.). Ellwangen, 1860. 4°.

gegeben hat, und bitte die Leser dieses Aufsatzes, sich damit vor allen Dingen genau bekannt zu machen, bevor sie zu der Theorie des Instrumentes übergehen, die ich im Folgenden entwickeln werde. Am Besten ist es natürlich, das Instrument selbst vor sich zu haben, welches zu sehr niedrigem Preise*) durch Herrn Eble oder die Buchhandlung des Herrn Rudolph Engler in Ellwangen bezogen werden kann.

Wenn die Polhöhe durch $\varpi$, die Declination, die Höhe und der Stundenwinkel der Sonne respective durch $\delta$, $h$, $\sigma$ bezeichnet werden; so hat man bekanntlich die Gleichung:

$$\sin h = \sin\delta \sin\varpi + \cos\delta \cos\sigma \cos\varpi,$$

oder, wenn an die Stelle der Polhöhe $\varpi$ die Aequatorshöhe $\varphi$ gesetzt wird, die Gleichung:

*) Etwa 2—3 Thaler (4 Fl. ö. W.). Herr Eble hat vielleicht die Güte, einmal die genauen Preise seiner Instrumente von verschiedenen Qualitäten zum Abdruck in dem Archiv einzusenden. Das mir gütigst zugesandte Instrument ist nur von Holz gearbeitet; wahrscheinlich giebt es mit noch mehr Genauigkeit und Sauberkeit angefertigte Exemplare.

$$\sin h = \sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\cos\sigma\sin\varphi,$$

auf welcher, wie sich von selbst versteht, das ganze Instrument beruht. Herr Eble wendet jedoch dieselbe nicht in dieser ihrer ursprünglichen Form an, sondern giebt ihr die Gestalt:

$$\sin h = \frac{\sin(\varphi+\delta)-\sin(\varphi-\delta)}{2} + \frac{\sin(\varphi+\delta)+\sin(\varphi-\delta)}{2}\cos\sigma,$$

auf welche er seine sämmtlichen weiteren Betrachtungen gründet. Ich muss aber gestehen, dass mir diese Transformation der obigen Gleichung für den vorliegenden Zweck ganz unnöthig zu sein und in die Betrachtung eine unnütze Verwickelung zu bringen scheint, weshalb ich von derselben im Folgenden ganz absehen und mich bloss an die obige Gleichung in ihrer ursprünglichen Form, also unmittelbar an die Gleichung

$$\sin h = \sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\cos\sigma\sin\varphi$$

anschliessen werde.

Wenn $H$ die Mittagshöhe der Sonne bezeichnet, so ist bekanntlich allgemein $\varphi = H - \delta$, und für jede Höhe $h$ ausserhalb des Meridians, wo also $h < H$ ist, ist folglich $\varphi > h - \delta$, demnach allgemein

$$\varphi \geqq h - \delta$$

für jede Höhe $h$, wobei wir jedoch bemerken, dass es für unseren hiesigen Zweck hinreichend ist, die Höhe $h$ als positiv anzunehmen, wie von jetzt an der Einfachheit wegen geschehen soll.

Wenn $\delta$ negativ ist, so ist hiernach immer:

$$\varphi \geqq h + (-\delta).$$

Wenn $\delta$ positiv und $h \geqq \delta$, also $h - \delta$ positiv ist, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\varphi \geqq h - \delta.$$

Wenn $\delta$ positiv und $h < \delta$, also $\delta - h$ positiv ist, so kann

$$\varphi \geqq \delta - h \quad \text{oder} \quad \varphi \leqq \delta - h$$

sein; im zweiten Falle wäre aber, da $23^{\circ}.30'$ in einer runden Zahl der grösste Werth von $\delta$ ist, jedenfalls

$$\varphi \overline{\overline{<}} 23^{\circ}.30'$$

also:

$$90^{\circ} - \varphi \overline{\overline{>}} 66^{\circ}.30' \quad \text{oder} \quad \varpi \overline{\overline{>}} 66^{\circ}.30'.$$

Da die Polhöhe von Petersburg oder Stockholm noch nicht 60° beträgt, so wollen wir diesen zweiten Fall, welcher einige besondere Betrachtungen, auch namentlich rücksichtlich der denselben darstellenden Figur, erfordern würde, der Kürze wegen im Folgenden nicht weiter in's Auge fassen, indem dessen ausführlichere Betrachtung füglich dem Leser überlassen bleiben kann; auch wollen wir die im Obigen vorkommenden Gleichheitszeichen der Kürze wegen nicht weiter berücksichtigen, und daher von jetzt an nur die drei folgenden Fälle in's Auge fassen:

1)....$\delta$ negativ, $\varphi > h + (-\delta)$;

2)....$\delta$ positiv, $h > \delta$, $\varphi > h - \delta$;

3)....$\delta$ positiv, $h < \delta$, $\varphi > \delta - h$.

In Taf III. Fig. 1., Fig. 2., Fig. 3., wo die Ebene des Papiers die Ebene des Höhen- oder Vertikal-Kreises der Sonne ist, sei um $O$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $r$, den man auch der Einheit gleich setzen kann, ein Kreis beschrieben, und durch $O$ seien die Horizontale $OH$ und die Vertikale $OZ$ gezogen; die Linie $OS$ sei nach der Sonne gerichtet, und $OA$ stehe in $O$ auf derselben senkrecht; so ist

$$HS = ZA = h.$$

Von $Z$ aus trage man auf dem beschriebenen Kreise den absoluten Werth $ZB$ der Declination $\delta$ auf, links oder rechts von $Z$, jenachdem die Declination negativ oder positiv ist. Endlich trage man von $B$ aus auf dem gegebenen Kreise links und rechts von $B$ die Aequatorshöhe $BC = BC' = \varphi$ auf, und ziehe die Sehne $CC'$, welche auf $OB$ oder dessen Verlängerung über $O$ hinaus in $E$ senkrecht steht. Endlich denke man sich durch $A$ eine Vertikallinie gezogen, — das Loth an dem Instrumente des Herrn Eble — und bezeichne dessen Durchschnittspunkt mit der Sehne $CC'$ durch $F$. Bezeichnet man die Durchschnittspunkte des Loths in $A$ mit der Horizontalen $OH$ und der Linie $OB$ respective durch $G$ und $K$; so sind die Dreiecke $KOG$ und $KEF$ offenbar einander ähnlich, und man hat daher die folgende Proportion:

$$KG : OG = EK : EF,$$

also:

$$EF=\frac{OG}{KG}.EK.$$

Entsprechen nun zunächst die oberen und unteren Zeichen einer negativen und einer positiven Declination, so ist offenbar:

$$KG=OG.\tan(90^\circ\pm\delta)=\mp OG.\cot\delta,$$

also:

$$\frac{OG}{GK}=\mp\tan\delta,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$EF=\mp EK.\tan\delta;$$

ferner ist:

$$OK=OG.\sec(90^\circ\pm\delta)=\mp\frac{OG}{\sin\delta}=\mp\frac{r\sin h}{\sin\delta}$$

und $OE=r\cos\varphi$.

Im Falle einer negativen Declination ist nun nach Fig. 1.:

$$EK=OK+OE=-r\left(\frac{\sin h}{\sin\delta}-\cos\varphi\right),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$EF=r\left(\frac{\sin h}{\sin\delta}-\cos\varphi\right)\tan\delta.$$

Im Falle einer positiven Declination ist dagegen, wenn das obere Zeichen dem Falle Fig. 2., das untere Zeichen dem Falle Fig. 3. entspricht:

$$EK=\pm(OK-OE)=\pm r\left(\frac{\sin h}{\sin\delta}-\cos\varphi\right),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$EF=\pm r\left(\frac{\sin h}{\sin\delta}-\cos\varphi\right)\tan\delta.$$

Nimmt man also in den Fällen Fig. 1. und Fig. 2. das obere, in dem Falle Fig. 3. das untere Zeichen, so ist:

$$EF=\pm r\left(\frac{\sin h}{\sin\delta}-\cos\varphi\right)\tan\delta$$

oder:

$$EF = \pm r \frac{\sin h - \sin\delta\cos\varphi}{\cos\delta},$$

folglich, wenn man die Entfernung des Punktes $F$ von dem Punkte $E$, indem man dieselbe in den Fällen Fig. 1. und Fig. 2. als positiv, in dem Falle Fig. 3. als negativ betrachtet, und mit Rücksicht hierauf im Allgemeinen durch $x$ bezeichnet, in völliger Allgemeinheit:

$$x = r \frac{\sin h - \sin\delta\cos\varphi}{\cos\delta}.$$

Aus der Gleichung

$$\sin h = \sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\cos\sigma\sin\varphi$$

folgt aber:

$$\cos\sigma\sin\varphi = \frac{\sin h - \sin\delta\cos\varphi}{\cos\delta},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$x = r\cos\sigma\sin\varphi,$$

woraus man sieht, dass die Entfernung $x$ für jeden bestimmten Halbmesser $r$, den man beliebig wählen, auch der Einheit gleich setzen kann, bloss von dem Stundenwinkel $\sigma$ und der Aequatorshöhe $\varphi$ oder der Polhöhe $\bar{\omega}$, gar nicht von der Höhe und von der Declination, abhängt, welches der Hauptpunkt ist, auf den es bei dem Instrumente des Herrn Eble ankommt, auf welchem dasselbe lediglich beruhet, und der von dem Erfinder selbst nicht mit solcher Deutlichkeit und Bestimmtheit hervorgehoben worden ist, wie es wünschenswerth gewesen wäre.

Neben der allgemeinen Empfehlung des Instruments war die recht deutliche und bestimmte Hervorhebung dieses Hauptpunktes der nächste Zweck, den ich bei der Abfassung dieses Aufsatzes hatte. Auch ist hiedurch in der That die Theorie des Instruments vollständig gegeben; denn man übersieht leicht, dass sich mittelst der Gleichung

$$x = r\cos\sigma\sin\varphi$$

für jede bestimmte Polhöhe und die verschiedenen Stundenwinkel eine geradlinige Scale der $x$ verfertigen und auf dem Instrumente gehörig anbringen lässt (wobei man zu beachten hat, dass $OE = r\cos\varphi$ ist), aus welcher sich, wenn gewisse $x$ durch den Lothfaden des Instruments auf dieser Scale abgeschnitten werden, natürlich auch umgekehrt die entsprechenden Stundenwinkel oder die durch dieselben bestimmten Zeiten entnehmen

oder vielmehr auf derselben unmittelbar ablesen lassen. Auch lassen sich leicht mehrere solcher Scalen für verschiedene Polhöhen zu einer Art von Netz mit einander vereinigen, wie auf dem Instrumente des Herrn Eble wirklich geschehen ist. Ausser dieser Scale ist alles Uebrige auf dem Instrumente Nebenwerk und leicht ohne alle weitere Erläuterung durch sich selbst verständlich, wenn man nur die im Anhange beigefügte Beschreibung und Gebrauchs-Anweisung aufmerksam gelesen hat. Die oben angeführte Schrift des Herrn Eble enthält noch eine Tafel der Declinationen oder Polar-Distanzen der Sonne für die Jahre $\frac{1860}{(1864)}$ bis $\frac{1863}{(1867)}$, deren man bei der Aufstellung des Instruments bedarf, und ausserdem eine Tafel der mittleren Zeitgleichung zur Reduction der wahren Zeit, welche letztere natürlich nur durch das Instrument erhalten werden kann, auf mittlere Zeit. Vollständiger und genauer finden die Liebhaber der Astronomie diese Dinge in dem trefflichen Kalender für alle Stände. Herausgegeben von Karl v. Littrow, den wir denselben als eine sehr brauchbare kleine Ephemeride hier wiederholt in Erinnerung bringen und recht sehr empfehlen.

Wir wünschen sehr, durch das Obige und Nachfolgende zur weiteren Bekanntwerdung und Empfehlung des jedenfalls sehr sinnreichen und zu dem Gebrauch in der Praxis für einen Jeden, der seine Uhr schnell und leicht zu berichtigen wünscht, sehr geeigneten Instruments des Herrn Eble Einiges beizutragen, indem wir dasselbe auch namentlich den höheren Unterrichtsanstalten zur Beachtung empfehlen. Wegen der Geschichte der Erfindung des Instruments, dessen Grundidee eigentlich Lambert gehört, aber von Herrn Eble in sehr verdienstlicher Weise wesentlich vervollkommnet und für den praktischen Gebrauch erst wirklich fruchtbar gemacht worden ist, verweisen wir auf Littrow's oben angeführten in mehrfacher Beziehung lehrreichen Aufsatz, welcher zugleich auch auf das von Herrn Zescevich in der „Rivista marittima del Lloyd austriaco. 1854. Novembre“ (m. s. auch Heinrich v. Littrow's Seemannschaft S. 294. und Moigno: Cosmos. 1860. Sept. 7. pag. 288.) bekannt gemachte Verfahren zur graphischen Auflösung sphärischer Dreiecke gelegentlich Rücksicht nimmt.

---

## Anmerkung.

Absichtlich habe ich mich bei dem vorliegenden Gegenstande

im Vorhergehenden ganz einfacher und elementarer geometrischer Betrachtungen bedient. Allgemeiner und besser kann man aber zu dem Satze, auf den es hier eigentlich ankommt, mittelst der Formeln der analytischen Geometrie gelangen, wie ich jetzt noch zeigen will.

Die Ebene des Vertikalkreises der Sonne sei die Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $xy$, dessen Anfangspunkt das Auge des Beobachters oder der Mittelpunkt der Sphäre ist; die Axe der $x$ sei horizontal, die Axe der $y$ werde also vertikal angenommen. Durch den Anfangspunkt der Coordinaten werde eine Gerade*) gelegt, deren Gleichung

$$1) \quad . \; . \; . \; . \; y = x \tang(90^0 + \delta), \quad \text{also} \quad y = -x \cot\delta$$

sei, und in dieser Geraden nehme man einen Punkt $(uv)$**) an, dessen Coordinaten $u$, $v$ durch die Formeln

$$2) \quad . \; . \left\{ \begin{aligned} u &= r\cos\varphi . \cos(90^0 + \delta) = -r\sin\delta\cos\varphi, \\ v &= r\cos\varphi . \sin(90^0 + \delta) = \phantom{-}r\cos\delta\cos\varphi \end{aligned} \right.$$

bestimmt werden, wo $r\cos\varphi$ die Entfernung dieses Punktes von dem Anfange der Coordinaten ist. Durch diesen Punkt lege man eine auf der Geraden 1) senkrecht stehende Gerade, deren Gleichung also nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$3) \quad . \; . \; . \; . \; y - r\cos\delta\cos\varphi = \tang\delta(x + r\sin\delta\cos\varphi)$$

ist. Nun ziehe man die durch die Gleichung

$$4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; x = r\cos(90^0 + h) = -r\sin h$$

bestimmte Vertikale***), und bezeichne deren Durchschnittspunkt mit der Geraden 2)†) durch $(u_1 \; v_1)$; so hat man nach 4) und 3) zur Bestimmung von $u_1$, $v_1$ die Gleichungen:

$$u_1 = -r\sin h,$$

$$v_1 - r\cos\delta\cos\varphi = \tang\delta(u_1 + r\sin\delta\cos\varphi);$$

also, wie man leicht findet:

$$5) \quad . \; . \; . \; u_1 = -r\sin h, \quad v_1 = r\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\delta} - \tang\delta\sin h\right)$$

*) *OB* in der Figur.

**) *E* in der Figur.

***) *AG* in der Figur.

†) *F* in der Figur.

oder:

$$6) \quad \ldots \quad u_1 = -r\sin h, \quad v_1 = r\frac{\cos\varphi - \sin\delta\sin h}{\cos\delta}.$$

Betrachten wir nun die von dem Punkte $(uv)$ aus gerechnete Entfernung des Punktes $(u_1v_1)$ von dem Punkte $(uv)$ als positiv oder als negativ, jenachdem (mit Rücksicht auf die Figur) der Punkt $(u_1v_1)$ rechts oder links von der durch $(uv)$ gehenden Vertikale liegt, und bezeichnen mit Rücksicht hierauf diese Entfernung durch $X$; so ist offenbar in dem ersten der beiden in Rede stehenden Fälle:

$$u_1 = u + X\cos(180^0 + \delta),$$

$$v_1 = v + X\sin(180^0 + \delta);$$

im zweiten Falle dagegen:

$$u_1 = u + (-X)\cos\delta,$$

$$v_1 = v + (-X)\sin\delta;$$

also offenbar in beiden Fällen, und daher völlig allgemein:

$$u_1 = u - X\cos\delta,$$

$$v_1 = v - X\sin\delta;$$

folglich:

$$X = \frac{u - u_1}{\cos\delta} = \frac{v - v_1}{\sin\delta},$$

also nach 2) und 6):

$$7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad X = r\frac{\sin h - \sin\delta\cos\varphi}{\cos\delta}.$$

und daher, weil, wie aus der bekannten Gleichung

$$\sin h = \sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\cos\sigma\sin\varphi$$

sogleich folgt,

$$\cos\sigma\sin\varphi = \frac{\sin h - \sin\delta\cos\varphi}{\cos\delta}$$

ist:

$$8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X = r\cos\sigma\sin\varphi,$$

welches der zu beweisende Satz war.

# Anhang.

(Ganz nach Herrn Eble.)

## I.

### Beschreibung des Horoskops.

Das Horoskop hat drei Haupttheile, in die es sich zerlegen lässt, wobei man Taf. III. zu vergleichen hat.

Der erste Theil, von der Form des Buchstabens **T**, ist aus zwei Schienen *A* und *B* gebildet, welche rechtwinklig zusammengefügt sind.

Diesen zusammengesetzten Theil will ich *AB* nennen.

Der zweite Theil, von der Form eines **L**, ist aus den Schienen *C* und *D* gebildet.

Er heisse *CD*.

Der dritte Theil ist das Gestell *EF*, bestehend aus dem Pfosten *E* und der Fussscheibe *F*.

(Diese Scheibe möchte der Besitzer eines Exemplars unterhalb mit Blei versehen, um den festen Stand zu sichern.)

Auf der Schiene *A* fällt zuerst die aus krummen Linien gebildete Stundenskale in die Augen, an deren unterem Rande die Vor- und Nachmittagsstunden von 10 zu 10 Minuten oder auch von 20 zu 20 Minuten angeschrieben sind.

Nahe am oberen Rande der Schiene *A* ist die Skale der Polabstände der Sonne angezeichnet. Rechts und links der Stundenskale ist eine kleine Skale, die der Polhöhen. Zu äusserst links ist der Titel: Horoskop.

In der mit *A* festverbundenen Schiene *B* steckt bei *g* ein Zapfen fest eingeleimt; mittelst dieses Zapfens lässt sich *AB* im Zapfenloch *p* des Pfostens *E* drehen und mittelst einer Schraube lässt sich *AB* in erforderlicher Stellung (die, wie wir bald sehen werden, vom Datum oder vom Polabstand der Sonne abhängt) unbeweglich fest erhalten.

Die Schiene *C* trägt bei *k* und *l* zwei Messingplättchen; das erstere *k* hat zwei Löchlein zum Einlassen der Sonnenstrahlen;

auf dem Plättchen *l* aber ist auf weissem Grund ein schwarzer Strich in der Mitte.

Die Schiene *D* ist an einem Ende auf die Schiene *C* befestigt und hat am anderen Ende ein kleines Messingplättchen *m*, welches an einem Faden das Loth *o* trägt.

(Das Knöpfchen des Aufhängefadens ist bei *m* nach vorne zugekehrt, also hängt der Faden hinterhalb des Plättchens *m* herunter.)

Bei *n* ist ein Loch eingebohrt, worin das Loth *o* bei der Verpackung seinen Platz bekommt.

Das ganze Stück *CD* ist mittelst einer bei *i* angebrachten versenkten eisernen Schraube in dem Loch *h* des Stückes *AB* drehbar und mittelst einer Mutterschraube sanft stellbar, so nämlich, dass man zwar mit dem Finger das Stück *CD* um den Zapfen *i* drehen kann, dass aber, sobald die Bewegung mit dem Finger aufhört, das Stück *CD* in der erhaltenen Stellung verharrt.

## II.

## Bestimmung der Zeit durch den Horoskop.

Um für einen Augenblick, in welchem die Sonne scheint, die Zeit zu bestimmen, verfährt man so:

Für den Aufenthaltsort z. B. Berlin, Mainz, Stuttgart, .... hat man ein für allemal nach einer Landkarte die Polhöhe gesucht (an den Seitenrändern, rechts und links der Landkarte) und auf der Stundenskale des Horoskops die erforderliche Linie gezogen, wie dies beispielsweise für Mainz (unterm 50. Polhöhegrad) schon geschehen ist.

(Zu diesem Zweck wird der Besitzer eines Exemplars des Horoskops an den beiden Enden rechts und links der Polhöhenskale (welche nach Fünftelsgraden abgetheilt ist, woran man aber leicht Zehntelsgrade unterscheiden kann) den erforderlichen Punkt diesseits und jenseits aufsuchen, und diese zwei Punkte durch eine Linie verbinden, welche zu der mittleren Mainzer Linie parallel ist. Diese Verbindungslinie zieht man mit einer scharfen Nadel an einem Lineal hin, die Nadel ritzt in den Firniss und diesen Ritz überfährt man leicht mit einer rothen Tinte oder farbigem Pulver.)

Auf einer Ebene, die nicht viel von der Horizontalrichtung

abweicht, stelle man das Horoskop so vor sich auf, dass die Sonne links, nahezu in der Verlängerung der Skalen-Ebene *A* liegt (wobei also der von dieser Schiene *A* geworfene Schatten als Linie erscheint).

Aus der dieser Anweisung vorangestellten **Polabstandstabelle** (Taf. I) *) sucht man nun für das diesmalige Datum (mit Beachtung des Jahres, des Monats und des Monatstages) den Polabstandsgrad auf. Den gleichen Polabstandspunkt sucht man nun am oberen Rande der *A*-Schiene und bringt diesen Punkt vertikal über den Drehpunkt *h* der *B*-Schiene, was durch Drehen des *AB*-Stücks um den Zapfen *g* geschieht.

(Um diese vertikale Stellung des Polabstandspunkts über dem Drehpunkt zu erkennen, könnte ein Messingklemmchen mit einem Lothfaden an den Polabstandspunkt gesteckt und darnach *AB* um *g* gedreht werden, bis nahezu die richtige Stellung erlangt wäre; aber — am einfachsten wird man zu Beobachtung dieser Stellung das an der *D*-Schiene bei *m* hängende Loth brauchen. Die feinste Stellung gibt man zuletzt mit den Schrauben *qq* am Gestellfuss.)

Nachdem nun das Stück *AB* in Betreff des Polabstandsgrads die richtige Stellung hat und in dieser durch die Schraube am Zapfen bei *g* recht fest erhalten wird, dreht man das Stück *CD* um den Zapfen *h* so, dass die Sonne ihre Strahlen durch die zwei Löchlein des Diopters *k* nach dem Messingplättchen *l* senden kann, und beobachtet hiebei die Stellung, wo eben das Doppelsonnenbild in Form zweier über einander stehender Scheibchen ⸽ von der schwarzen Mittellinie durchschnitten wird.

In diesem Augenblick zeigt der Lothfaden auf der Stundenskale da, wo der Faden die dem Beobachtungsort zugehörige Polhöhenlinie durchschneidet, die dermalige Stunde und Minute wahrer Sonnenzeit.

(Ob Vor- oder Nachmittagsstunden abgelesen werden müssen, ergibt sich, im Zweifelsfalle, daraus, dass Vormittags die Sonnenhöhe wächst, Nachmittags abnimmt.)

Die ganzen Stunden, von Vormittags 4 bis 9 Uhr oder Nach-

---

*) Weder diese Tafel I., noch die nachher erwähnte Tafel II., sind hier mitgetheilt und in der Schrift des Herrn Eble nachzusehen. Natürlich finden sie sich auch in jedem guten astronomischen Kalender, wie namentlich in dem von Littrow. G.

mittags von 3 Uhr bis 8 Uhr sind von 2 zu 2 Minuten abgetheilt, wobei von 10 zu 10 Minuten etwas stärkere Theilsstriche gezogen sind; die Stunde von Vormittags 9 bis 11 Uhr oder Nachmittags von 1 bis 3 Uhr sind von 4 zu 4 Minuten abgetheilt, und zugleich sind von 20 zu 20 Minuten die Theilstriche kräftiger.

Eine Stunde vor oder nach der Mittagszeit ist die Beobachtung behufs der Zeitbestimmung mittelst eines Höhen-Instruments ungeeignet, daher keine Abtheilung angebracht wurde.

Die durch die Beobachtung der Sonne erhaltene wahre Sonnenzeit ist aber nicht diejenige, welche unsere gewöhnlichen Thurm- und Taschen-Uhren zeigen müssen. Man muss diese Uhren vielmehr nach der mittleren Sonnenzeit richten. Die mittlere Sonnenzeit weicht aber um eine Anzahl Minuten ab, die man zu gewissen Zeiten des Jahres zur wahren Sonnenzeit hinzufügen, zu anderen Zeiten davon abziehen muss.

(Nur viermal im Jahr stimmt die wahre Sonnenzeit mit der mittleren Zeit überein, am 15. April, 15. Juni, 1. September und 24. December.)

Die Angabe der zu addirenden oder subtrahirenden Minuten nennt man die Zeitgleichung und es ist eine solche **Zeitgleichungstabelle** (Taf. II.) dieser Gebrauchsanweisung angefügt.

# XX.

## Ueber einige allgemeine Formeln zur Auswerthung bestimmter Integrale.

Von

Herrn *Eugen Lommel,*
Professor in Schwyz.

---

Führt man in das bestimmte Doppelintegral

$$\int\int f(p+qx+ry).dydx,$$

in welchem $f$ eine ganz beliebige Funktion, $p$, $q$ und $r$ beliebige Constanten bedeuten, während unter dem Doppelintegral selbst die Summe aus den unendlich Mal unendlich vielen Gliedern verstanden wird, welche aus dem Produkt

$$f(p+qx+ry).dydx$$

dadurch hervorgehen, dass man dem $x$ und dem $y$ unabhängig von einander alle beziehlich um die unendlich kleinen, positiv gedachten $dx$ und $dy$ von einander verschiedenen Werthe beilegt, welche zugleich einer (oder mehreren) gegebenen Bedingungen genügen, — statt der Veränderlichen $x$ und $y$ vermittelst der Gleichungen

$$\text{a)}\quad \left\{ \begin{aligned} x\sqrt{q^2+r^2} &= qx'-ry', \\ y\sqrt{q^2+r^2} &= rx'+qy', \end{aligned} \right.$$

die neuen Veränderlichen $x'$ und $y'$ ein, indem man sich hiezu der bekannten Formel

$$\iint f(x,y).dydx = \iint f(\varphi,\psi).\left(\frac{d\varphi}{dx'}\cdot\frac{d\psi}{dy'} - \frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{d\psi}{dx'}\right).dy'dx'$$

bedient (wenn nämlich $x = \varphi(x', y')$ und $y = \psi(x', y')$ die Gleichungen vorstellen, mit deren Hilfe man die neuen Veränderlichen einführt), so gelangt man zu der Gleichung:

$$\text{A)} \quad \iint f(p + qx + ry).dydx = \iint f(p + x'\sqrt{q^2 + r^2}).dy'dx'.$$

Nun lässt sich aber auch auf der rechten Seite der Gleichung die Integration nach $y'$ ohne weiteres durchführen; hat man alsdann aus den obenerwähnten und mit Hilfe der Gleichungen a) ebenfalls transformirten Bedingungen die Grenzen von $y'$ als Funktionen von $x'$ bestimmt und eingesetzt, so bleibt rechts noch ein einfaches Integral nach $x'$ übrig (oder auch mehrere), dessen constante Grenzen aus den nämlichen Bedingungen abzuleiten sind. Durch die Formel A) ist demnach das vorgelegte bestimmte Doppelintegral auf ein bestimmtes einfaches Integral zurückgeführt.

Auf diese Weise erhält man, wenn man in dem gegebenen Doppelintegral den Variablen $x$ und $y$ die Bedingung

$$x^2 + y^2 \leqq 1$$

vorschreibt, die Gleichung:

$$\text{I)}$$

$$\iint f(p + qx + ry).dydx = 2\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}.f(p + x\sqrt{q^2 + r^2}).dx,$$

wo nur zur Rechten wieder $x$ an die Stelle von $x'$ gesetzt worden ist. Vertauscht man in dieser Formel $r$ mit $r.\sqrt{-1}$ oder $ri$ *), so ergibt sich:

---

*) Man könnte die Zulässigkeit der Substitution einer Imaginären an die Stelle von $r$ in Zweifel ziehen, weil die Transformation, welcher die Formel I) ihr Dasein verdankt, zunächst nur für reelle Werthe von $q$ und $r$ giltig ist. Man gelangt aber ohne Schwierigkeit zu der Ueberzeugung, dass die Formel I), wenn sie für beliebige reelle Werthe von $q$ und $r$ richtig ist (und das ist ja unbestreitbar), nothwendig auch dann noch gelten muss, wenn $q$ und $r$ ganz allgemein, als blosse Träger des Operationszeichens, aufgefasst werden, also namentlich auch, wenn sie imaginär werden.

II)

$$\iint f(p+qx+riy).dydx = 2\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}.f(p+x\sqrt{q^2-r^2}).dx.$$

Diese Gleichung geht aber, wenn man $r=q$ setzt, sogleich über in die folgende:

III) $$\iint f(p+q(x+iy)).dydx = \pi f(p),$$

wo in dem Doppelintegral zur Linken die Veränderlichen $x$ und $y$ an die Bedingung $x^2+y^2 \overline{\overline{<}} 1$ gebunden sind.

Die Richtigkeit dieser Formel lässt sich auch leicht synthetisch beweisen. Entwickelt man nämlich zur Linken die Funktion $f$ mit Hilfe des Maclaurin'schen Satzes nach Potenzen von $q$, so erhält man $\pi.f(p)$ als erstes Glied der Entwickelung, während $q^m$ einerseits mit dem Differentialcoefficienten $\frac{d^m f}{dp^m}$, andererseits mit dem Doppelintegral

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}(x+iy)^m.dydx$$

multiplicirt erscheint; integrirt man hier zuerst nach $y$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{i(m+1)}.\int_{-1}^{+1}[(x+iy)^{m+1}-(x-iy)^{m+1}].dx,$$

wenn man nur unter $y$ jetzt die Wurzel $\sqrt{1-x^2}$ versteht. Entwickelt man nun die beiden $(m+1)$ten Potenzen mittelst des binomischen Lehrsatzes, so findet man

$$(x+iy)^{m+1}-(x-iy)^{m+1}$$
$$= S[i^\alpha(m+1)_\alpha.x^{m+1-\alpha}.y^\alpha] - S[(-1)^\alpha.i^\alpha.(m+1)_\alpha.x^{m+1-\alpha}.y^\alpha]$$
$$= 2S[i^{2\alpha+1}.(m+1)_{2\alpha+1}.x^{m-2\alpha}.y^{2\alpha+1}]$$
$$= 2i.S[(-1)^\alpha.(m+1)_{2\alpha+1}.x^{m-2\alpha}.y^{2\alpha+1}],$$

wo unter $(m+1)_\alpha$ der Binomialcoefficient $\frac{(m+1)^{\alpha|-1}}{\alpha!}$ verstanden wird, und die Summenzeichen $S$ andeuten, dass die Summe aller Glieder genommen werden soll, welche aus dem eckig eingeklammerten allgemeinen Gliede dadurch hervorgehen, dass man daselbst statt $\alpha$ nach und nach 0 und alle positiven ganzen Zah-

len einsetzt. Das obige Integral erscheint also jetzt in folgender Form:

$$\frac{2}{m+1}.S[(-1)^{\alpha}.(m+1)_{2\alpha+1}.\int_{-1}^{+1} x^{m-2\alpha}.(1-x^2)^{\frac{2\alpha+1}{2}}.dx].$$

Nun fällt unmittelbar in die Augen, dass diese Summe verschwindet, so oft $m$ ungerade ist, weil dann jedes einzelne in derselben vorkommende Integral für sich der Null gleich wird. Sie verschwindet aber auch für jedes gerade $m = 2n$; man hat nämlich alsdann:

$$\int_{-1}^{+1} x^{2(n-\alpha)}.(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}.dx = 2.\int_{0}^{1} x^{2(n-\alpha)}.(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}.dx$$

$$= \int_{0}^{1} x^{n-\alpha-\frac{1}{2}}.(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}.dx = \Phi(n-\alpha+\tfrac{1}{2},\ \alpha+1+\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1^{n-\alpha|2}.1^{\alpha+1|2}}{2^{n+1|2}}.\pi.$$

Die obige Summe geht dadurch über in:

$$\frac{2\pi}{(2n+1).2^{n+1|2}}.S[(-1)^{\alpha}.1^{n-\alpha|2}.1^{\alpha+1|2}.\frac{(2n+1)^{2\alpha+1|-1}}{(2\alpha+1)!}].$$

Nun ist aber:

$$(2n+1)^{2\alpha+1|-1} = (2n+1)^{\alpha+1|-2}.(2n)^{\alpha|-2},$$

$$(2\alpha+1)! = 1^{2\alpha+1|1} = 1^{\alpha+1|2}.2^{\alpha|2},$$

$$(2n+1)^{\alpha+1|-2}.1^{n-\alpha|2} = (2n+1)^{\alpha+1|-2}.(2n-2\alpha-1)^{n-\alpha|-2}$$

$$= (2n+1)^{n+1|-2} = 1^{n+1|2},$$

$$\frac{(2n)^{\alpha|-2}}{2^{\alpha|2}} = \frac{n^{\alpha|-1}}{1^{\alpha|1}} = \frac{n^{\alpha|-1}}{\alpha!} n_{\alpha};$$

man erhält demnach, unter Berücksichtigung vorstehender Relationen, statt jener Summe jetzt diese:

$$\frac{2\pi.1^{n+1|2}}{(2n+1).2^{n+1|2}}.S[(-1)^{\alpha}.n_{\alpha}],$$

welche bekanntlich der Null gleich ist. Da nun alle Coefficienten der Potenzen von $q$ in der oben vorgenommenen Reihenentwicklung verschwinden, so ist hiemit nachgewiesen, dass die Gleichung III) eine identische ist in allen jenen Fällen, in welchen der **Maclaurin**'sche Satz zur Reihenentwickelung angewendet

werden kann. Der Maclaurin'sche Satz gilt aber für jede beliebige Funktion, so lange nur der specielle Werth der Variabeln, welchen man in die Funktion und in ihre Ableitungen einsetzt, um die Coefficienten der Reihe zu erhalten, weder die Funktion selbst noch irgend eine ihrer Ableitungen auf eine im Calcul unzulässige Form bringt. Wir können demnach behaupten, dass unsere Gleichung III) für jede beliebige Funktion $f$ gilt, so lange nur $p$ keiner jener Ausnahmswerthe ist, für welche die Funktion $f$ oder irgend eine ihrer Ableitungen eine unzulässige Form annimmt. Nimmt man nun an, dass

$$\int f(x).dx = \varphi(x) + C$$

sei, so findet man auch:

$$\int f(p+q(x+iy)).dy = \frac{1}{iq}.\varphi(p+q(x+iy))+C;$$

folglich, wenn man bei dieser Integration nach $y$ die Grenzen einführt, welche die Bedingung $x^2+y^2 \overline{\underline{<}} 1$ verlangt:

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(p+q(x+iy)).dy$$

$$= \frac{1}{iq}.[(p+q(x+i\sqrt{1-x^2})) - \varphi(p+q(x-i\sqrt{1-x^2}))].$$

Setzt man diesen Werth in die Formel III), so erhält man:

IV)

$$\int_{-1}^{+1} [\varphi(p+q(x+i\sqrt{1-x^2}))-\varphi(p+q(x-i\sqrt{1-x^2}))].dx = i\pi q.\frac{d\varphi}{dp}.$$

Diese Gleichung, welche eigentlich nur eine andere Form der Gleichung III) ist, gilt unter den nämlichen Bedingungen wie diese. Setzt man in derselben $x = \cos z$, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\text{IV)} \quad \int_0^\pi [\varphi(p+qe^{zi})-\varphi(p+qe^{-zi})].\sin z.dz = i\pi q.\frac{d\varphi}{dp}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $p=0$ und $q=1$, so wird sie identisch mit einer bereits von Cauchy auf anderem Wege gefundenen Formel, nämlich mit

$$\int_0^\pi [\varphi(e^{zi})-\varphi(e^{-zi})].\sin z.dz = i\pi.\left[\frac{d\varphi}{dp}\right]_0,$$

deren Richtigkeit jedoch, nach Cauchy's Herleitung, nur für den Fall als erwiesen anzusehen ist, dass 1) $\varphi(x)$ für keinen Werth von $x$ die Form $\frac{1}{0}$ annimmt und dass 2) $\varphi(x)$ nur eindeutig ist; indem sich nämlich diese Formel als specielles Resultat aus einer allgemeineren ergibt, welche nur unter den ebengenannten Bedingungen stattfindet. Obgleich nun die Constanten $p$ und $q$ unserer Gleichung IV) nur scheinbar eine grössere Allgemeinheit verleihen, indem dieselben ohne Weiteres auch in die Cauchy-sche Formel eingeführt werden können, so ist dieselbe dennoch als eine Erweiterung dieser letzteren anzusehen, weil wir nachgewiesen haben, dass unsere Gleichung IV) ebensowohl, als Gleichung III), eine von der Natur der Funktion $\varphi$ (oder $f$) völlig unabhängige Identität ist und ihre Giltigkeit bewahrt, so lange die Constante $p$ keiner jener Ausnahmswerthe ist, welche die Funktion $\varphi$ oder irgend eine ihrer Ableitungen auf eine im Calcul unzulässige Form $\left(\frac{1}{0}, \log 0, \ldots\right)$ bringen.

# XXI.

# Allgemein giltige Ableitung der Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie und allgemeiner Beweis des Satzes vom Polardreiecke.

Von

Herrn Doctor *Eduard Schreder*

in Graz.

## I.

### Allgemein giltige Ableitung der Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie.

Es sei das sphärische Dreieck $ABC$ (Taf. III. Fig. 4.) von beliebigen Seiten und Winkeln. Man halbire die Sehnen $AB$ und

$AC$ in $P$ und $Q$, ziehe durch diese Punkte die Kugelhalbmesser und verlängere dieselben, bis sie die von $A$ aus zu den Bögen $AB$ und $AC$ gezogenen Tangenten in den Punkten $T$ und $T'$ durchschneiden. Hierauf verbinde man noch $P$ mit $Q$, und $T$ mit $T'$ durch gerade Linien. Bezeichnet man die Bögen $BC$, $AC$ und $AB$ der Reihe nach mit $a$, $b$ und $c$, und den Mittelpunkt der Kugel mit $O$, so ist:

$$OA=1,\quad OT=\sec\frac{c}{2},\quad OT'=\sec\frac{b}{2},\quad OP=\cos\frac{c}{2},\quad OQ=\cos\frac{b}{2},$$

$$AT=\tang\frac{c}{2},\quad AT'=\tang\frac{b}{2},\quad AP=\sin\frac{c}{2},\quad AQ=\sin\frac{b}{2},$$

$$PQ=\tfrac{1}{2}BC=\sin\frac{a}{2}.$$

Für das Dreieck $TAT'$ besteht die Relation:

$$1)\qquad TT'^2=\tang^2\frac{b}{2}+\tang^2\frac{c}{2}-2\tang\frac{b}{2}\tang\frac{c}{2}\cos A.$$

Aus dem Dreiecke $TOT'$ ergibt sich:

$$2)\qquad TT'^2=\sec^2\frac{b}{2}+\sec^2\frac{c}{2}-2\sec\frac{b}{2}\sec\frac{c}{2}\cos TOT'.$$

Setzt man die rechten Theile der Relationen 1) und 2) einander gleich und multiplicirt beide Theile der so entstehenden Gleichung mit $\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}$, so erhält man:

$$3)\quad \sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+\cos^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}-2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\cos A$$
$$=\cos^2\frac{c}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos TOT'.$$

Im Dreiecke $POQ$ findet die Relation statt:

$$\sin^2\frac{a}{2}=\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos TOT',$$

woraus man erhält:

$$-2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos TOT'=\sin^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}.$$

Substituirt man den rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdruck in die Relation 3) und schreibt $\frac{1}{2}(1-\cos a)$ anstatt $\sin^2\frac{a}{2}$, multiplicirt ferner alle Glieder dieser Relation mit 2, so erhält man:

$$2\sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+2\cos^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}-\sin b\sin c\cos A=1-\cos a.$$

Dieser Gleichung lässt sich, wenn man $\sin^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{b}{2}$ anstatt 1 schreibt, folgende Form geben:

4)

$$\cos a=\sin^2\frac{b}{2}(1-2\cos^2\frac{c}{2})+\cos^2\frac{b}{2}(1-2\sin^2\frac{c}{2})+\sin b\sin c\cos A.$$

Da $1-2\cos^2\frac{c}{2}=-\cos c$ und $1-2\sin^2\frac{c}{2}=\cos c$, so reduciren sich das erste und zweite Glied des rechten Theiles der Gleichung 4) auf $\cos c(\cos^2\frac{b}{2}-\sin^2\frac{b}{2})$, d. i. $\cos c\cos b$, so dass diese Gleichung übergeht in: $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$.

Die hier dargestellte Ableitung dieser Formel ist darum allgemein giltig, weil die Bögen $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ stets $<90^0$ sind und daher die Tangenten $AT$ und $AT'$ in jedem Falle die verlängerten Radien $OT$ und $OT'$ schneiden müssen, so dass die zum Beweise benutzten ebenen Dreiecke immer zu Stande kommen werden.

## II.

### Allgemeiner Beweis des Satzes vom Polardreiecke.

1. Weil das zu einem gegebenen sphärischen Dreiecke construirte Polardreieck durch den Durchschnitt von drei grössten Kreisen entsteht, welche von den gegenüberliegenden Scheiteln des gegebenen Dreieckes um $90^0$ entfernt sind, so ist klar, dass die Seiten des Polardreieckes, welche Bögen dieser grössten Kreise sind, ebenfalls um $90^0$ von den genannten Scheiteln abstehen müssen. Da ferner jede Seite des Polardreiecks von einem andern Scheitel des gegebenen Dreiecks um $90^0$ absteht, so folgt daraus, dass ein Scheitel des Polardreieckes, da er zwei Seiten desselben angehört, auch von zwei Scheiteln des gegebenen Dreieckes und somit von der ganzen gegenüberliegenden Seite desselben um $90^0$ entfernt sein müsse.

2. Unter Berücksichtigung des Vorhergehenden lässt sich nun die bekannte Relation zwischen den Seiten und Winkeln des gegebenen sphärischen Dreieckes und des zugehörigen Polardreieckes folgenderweise darthun.

Es sei $AB$ (Taf. III. Fig. 5.) eine Seite des gegebenen Dreieckes und somit $<=$ oder $>$ 90°.

Ist $AB < 90^\circ$, so werden die zwei grössten Kreise, welche den $AB$ gegenüberliegenden Winkel $C'$ des Polardreieckes bilden, durch die beiden in den Verlängerungen der Seite $AB$ gelegenen Punkte $a$ und $b$ gehen, wobei $Aa = Bb = 90^\circ$.

Ist $AB = 90^\circ$, so gehen natürlich diese grössten Kreise durch $A$ und $B$ selbst.

Ist $AB > 90^\circ$, so werden sie durch zwei innerhalb $AB$ gelegene Punkte $a'$ und $b'$ gehen, wo dann $Aa' = Bb' = 90^\circ$ sein wird. Der Fall, dass der eine grösste Kreis durch einen ausserhalb $AB$ liegenden Punkt, z. B. $a$, der andere durch einen zwischen $A$ und $B$ befindlichen Punkt, z. B. $b'$, gehe, ist darum unmöglich, weil dann zufolge 1. sowohl $Aa$ als $Bb'$ gleich 90° sein müssten.

Da der Scheitel des der Seite $AB$ gegenüberliegenden Winkels $C'$ des Polardreieckes von $AB$ und somit auch vom Bogen $ab$ oder $a'b'$ um 90° absteht, so ist $ab$ (oder im dritten Falle $a'b'$) $= C'$. Man hat nun im 1. Falle:

$$ab = bA + AB + Ba = (90^\circ - AB) + AB + (90^\circ - AB) = 180^\circ - AB.$$

Im 2. Falle ist $AB$ selbst das Maass des Winkels $C'$, woraus folgt, dass dieser $= 90^\circ$ ist, so dass jetzt wieder $AB + C' = 180^\circ$.

Im 3. Falle ist $a'b'$, d. i.

$$c' = AB - Ab' - Ba' = AB - 2(AB - 90^\circ) = 180^\circ - AB,$$

wie es sein soll.

Um den analogen Satz, dass jede Seite des Polardreieckes mehr dem gegenüberliegenden Winkel des gegebenen Dreieckes $= 180^\circ$ sein müsse, zu beweisen, sei $A'B'$ (Taf. III. Fig. 6.) die Seite des zum gegebenen sphärischen Dreiecke construirten Polardreieckes.

Die beiden grössten Kreise, in welchen die den gegenüberliegenden Winkel $C$ einschliessenden Seiten des gegebenen Dreieckes liegen, können im Allgemeinen entweder durch die Punkte $a'$ und $b'$, oder durch $a$ und $b$, oder endlich durch $A'$ und $B'$ selbst gehen.

Im 1. Falle hat man: $a'b'$, d. i.

$$C = A'B' - A'a' - b'B' = A'B' - 2(A'B' - 90^\circ) = 180^\circ - A'B'.$$

Im 2. Falle: $ab$ oder

$$C = aA' + A'B' + B'b = 2(90^\circ - A'B') + A'B' = 180^\circ - A'B'.$$

Im 3. Falle ist $A'B' = 90^\circ$ und $C$ ebenfalls $90^\circ$, woraus wieder die Richtigkeit des Satzes erhellet.

Die Figuren Taf. III. Fig. 7., 8., 9., 10. geben die Darstellung der Polardreiecke in allen Fällen mit Ausnahme des in sämmtlichen trigonometrischen Lehrbüchern abgebildeten Falles, dass die drei Seiten des einen Polardreieckes $< 90^\circ$, die des anderen $> 90^\circ$ sind.

In Taf. III. Fig. 7. hat das eine Polardreieck $ABC$ eine Seite $(BC) > 90^\circ$, die beiden anderen $< 90^\circ$, das andere Polardreieck $A'B'C'$ hat zwei Seiten $> 90^\circ$ und die dritte $(B'C') < 90^\circ$.

Die Taf. III. Fig. 8. stellt den Fall dar, dass im gegebenen Dreiecke $ABC$ eine Seite $(BC) \doteq 90^\circ$ und die beiden anderen $< 90^\circ$ sind; in Taf. III. Fig. 9. hat das gegebene Dreieck $ABC$ eine Seite $(BC) = 90^\circ$ und die beiden anderen $> 90^\circ$. Die Taf. III. Fig. 10. zeigt den Fall, dass in dem einen Polardreiecke $ABC$ eine Seite $(BC) < 90^\circ$ und die beiden übrigen $= 90^\circ$ sind, während das andere Polardreieck eine Seite $(B'C') > 90^\circ$ und zwei Seiten $= 90^\circ$ hat.

# XXII.

# Ueber die Auflösung dreier Gleichungen mit drei unbekannten Grössen, von denen wenigstens zwei lineare Gleichungen sind.

Von

dem Herausgeber.

Man kommt häufig in den Fall, drei Gleichungen mit drei unbekannten Grössen $x$, $y$, $z$ auflösen zu müssen, von denen wenigstens zwei lineare Gleichungen von der Form

$$1) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0x + b_0y + c_0z = k_0, \\ a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \end{array} \right.$$

sind. Bei der Auflösung solcher Gleichungen verfährt man in sehr vielen Fällen mit besonderer Eleganz auf folgende Art.

Wenn man

2)

$$\mathfrak{A} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \{a_0(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - a_1(a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)\}k_0 \\ + \{a_1(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) - a_0(a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)\}k_1 \end{array} \right\}}{(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)^2},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \{b_0(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - b_1(a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)\}k_0 \\ + \{b_1(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) - b_0(a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)\}k_1 \end{array} \right\}}{(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)^2},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \{c_0(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - c_1(a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)\}k_0 \\ + \{c_1(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) - c_0(a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)\}k_1 \end{array} \right\}}{(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)^2}$$

setzt, so liefern, wie man sich auf der Stelle durch die leichteste Rechnung überzeugt, die drei Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen eine Auflösung der beiden Gleichungen 1); und weil also

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0\mathfrak{A} + b_0\mathfrak{B} + c_0\mathfrak{C} = k_0, \\ a_1\mathfrak{A} + b_1\mathfrak{B} + c_1\mathfrak{C} = k_1 \end{array} \right.$$

ist, so folgen aus den Gleichungen 1) und 3) durch Subtraction die beiden Gleichungen:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0(x - \mathfrak{A}) + b_0(y - \mathfrak{B}) + c_0(z - \mathfrak{C}) = 0, \\ a_1(x - \mathfrak{A}) + b_1(y - \mathfrak{B}) + c_1(z - \mathfrak{C}) = 0. \end{array} \right.$$

Setzen wir nun ferner der Kürze wegen:

$$5) \quad \mathrm{A} = b_0c_1 - c_0b_1, \quad \mathrm{B} = c_0a_1 - a_0c_1, \quad \mathrm{C} = a_0b_1 - b_0a_1;$$

so ist, wenn $G$ einen gewissen, bis jetzt noch unbestimmten Factor bezeichnet, die allgemeine Auflösung der Gleichungen 1), wie sogleich erhellet, in den Formeln:

$$x - \mathfrak{A} = G\mathrm{A}, \quad y - \mathfrak{B} = G\mathrm{B}, \quad z - \mathfrak{C} = G\mathrm{C}$$

oder:

$$6) \quad \ldots\ldots \quad x = \mathfrak{A} + G\mathrm{A}, \quad y = \mathfrak{B} + G\mathrm{B}, \quad z = \mathfrak{C} + G\mathrm{C}$$

enthalten. Führt man nun diese Ausdrücke von $x, y, z$ in die dritte der zwischen diesen drei Grössen gegebenen drei Gleichungen ein, so erhält man eine Gleichung mit der einen unbekannten Grösse $G$, aus welcher dieser Factor bestimmt werden muss, worüber sich natürlich im Allgemeinen nichts sagen lässt, da die dritte Gleichung von den mannigfaltigsten Formen sein kann. Hat man durch Auflösung dieser Gleichung $G$ bestimmt, so ergeben sich $x, y, z$ unmittelbar mit Hülfe der Formeln 6).

Die obige Form der Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ist zwar nicht die einfachste, aber für viele Untersuchungen, besonders für solche, welche die Anwendung der Kreisfunctionen in Anspruch nehmen, vorzüglich bequem und geeignet. Andere Formen der in Rede stehenden Grössen sind die folgenden:

7)

$$\mathfrak{A}=\frac{\{(a_0b_1-b_0a_1)b_1-(c_0a_1-a_0c_1)c_1\}k_0-\{(a_0b_1-b_0a_1)b_0-(c_0a_1-a_0c_1)c_0\}k_1}{(a_0b_1-b_0a_1)^2+(b_0c_1-c_0b_1)^2+(c_0a_1-a_0c_1)^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{\{(b_0c_1-c_0b_1)c_1-(a_0b_1-b_0a_1)a_1\}k_0-\{(b_0c_1-c_0b_1)c_0-(a_0b_1-b_0a_1)a_0\}k_1}{(a_0b_1-b_0a_1)^2+(b_0c_1-c_0b_1)^2+(c_0a_1-a_0c_1)^2},$$

$$\mathfrak{C}=\frac{\{(c_0a_1-a_0c_1)a_1-(b_0c_1-c_0b_1)b_1\}k_0-\{(c_0a_1-a_0c_1)a_0-(b_0c_1-c_0b_1)b_0\}k_1}{(a_0b_1-b_0a_1)^2+(b_0c_1-c_0b_1)^2+(c_0a_1-a_0c_1)^2}$$

und:

8)

$$\mathfrak{A}=\frac{(a_0b_1-b_0a_1)(b_1k_0-b_0k_1)-(c_0a_1-a_0c_1)(c_1k_0-c_0k_1)}{(a_0b_1-b_0a_1)^2+(b_0c_1-c_0b_1)^2+(c_0a_1-a_0c_1)^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{(b_0c_1-c_0b_1)(c_1k_0-c_0k_1)-(a_0b_1-b_0a_1)(a_1k_0-a_0k_1)}{(a_0b_1-b_0a_1)^2+(b_0c_1-c_0b_1)^2+(c_0a_1-a_0c_1)^2},$$

$$\mathfrak{C}=\frac{(c_0a_1-a_0c_1)(a_1k_0-a_0k_1)-(b_0c_1-c_0b_1)(b_1k_0-b_0k_1)}{(a_0b_1-b_0a_1)^2+(b_0c_1-c_0b_1)^2+(c_0a_1-a_0c_1)^2}.$$

Für $k_0=0$, $k_1=0$ verschwinden diese Grössen, und es ist dann nach 6):

9) . . . . . . . . $x=GA, \quad y=GB, \quad z=GC$

zu setzen.

# XXIII.

## Ueber eine Aufgabe von der geraden Linie und Ebene im Raume.

Von
dem Herausgeber.

Ich werde in diesem Aufsatze die folgende, auch praktisch nicht unwichtige Aufgabe lösen, und dabei zugleich eine Anwendung der im vorhergehenden Aufsatze entwickelten Methode zur Lösung dreier Gleichungen mit drei unbekannten Grössen, von denen wenigstens zwei lineare Gleichungen sind, machen:

*Aufgabe.*

Es seien zwei gerade Linien im Raume und eine Ebene gegeben: man soll die gerade Linie bestimmen, welche auf der gegebenen Ebene senkrecht steht und die beiden gegebenen Geraden schneidet.

Um diese Aufgabe zu lösen, sei

1) . . . . . . . . . $Ax+By+Cz+D=0$

die Gleichung der gegebenen Ebene, und

2) . . . . . . . . $$\begin{cases} \dfrac{x-a_0}{\cos\alpha_0}=\dfrac{y-b_0}{\cos\beta_0}=\dfrac{z-c_0}{\cos\gamma_0}, \\[2ex] \dfrac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-c_1}{\cos\gamma_1} \end{cases}$$

seien die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden, wobei wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legen.

Der Durchschnittspunkt der gesuchten Geraden mit der gegebenen Ebene sei $(XYZ)$; dann haben deren Gleichungen die Form:

$$3) \quad \frac{x-X}{\cos\theta}=\frac{y-Y}{\cos\omega}=\frac{z-Z}{\cos\overline{\omega}};$$

und weil diese Gerade auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen soll, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$4) \quad \frac{A}{\cos\theta}=\frac{B}{\cos\omega}=\frac{C}{\cos\overline{\omega}}=\frac{1}{G}.$$

Die Durchschnittspunkte der gesuchten Geraden mit den beiden gegebenen Geraden seien $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$5) \quad \begin{cases} \dfrac{x_0-a_0}{\cos\alpha_0}=\dfrac{y_0-b_0}{\cos\beta_0}=\dfrac{z_0-c_0}{\cos\gamma_0}=G_0, \\[2ex] \dfrac{x_1-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y_1-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z_1-c_1}{\cos\gamma_1}=G_1 \end{cases}$$

und:

$$6) \quad \begin{cases} \dfrac{x_0-X}{\cos\theta}=\dfrac{y_0-Y}{\cos\omega}=\dfrac{z_0-Z}{\cos\overline{\omega}}=G_0', \\[2ex] \dfrac{x_1-X}{\cos\theta}=\dfrac{y_1-Y}{\cos\omega}=\dfrac{z_1-Z}{\cos\overline{\omega}}=G_1'; \end{cases}$$

also:

$$7) \quad \begin{cases} x_0=a_0+G_0\cos\alpha_0, & x_1=a_1+G_1\cos\alpha_1, \\ y_0=b_0+G_0\cos\beta_0, & y_1=b_1+G_1\cos\beta_1, \\ z_0=c_0+G_0\cos\gamma_0, & z_1=c_1+G_1\cos\gamma_1 \end{cases}$$

und:

$$8) \quad \begin{cases} x_0=X+G_0'\cos\theta, & x_1=X+G_1'\cos\theta, \\ y_0=Y+G_0'\cos\omega, & y_1=Y+G_1'\cos\omega, \\ z_0=Z+G_0'\cos\overline{\omega}, & z_1=Z+G_1'\cos\overline{\omega}; \end{cases}$$

woraus sich, wenn man diese Gleichungen von einander subtrahirt, die folgenden Gleichungen ergeben:

$$a_0=X-G_0\cos\alpha_0+G_0'\cos\theta,$$
$$b_0=Y-G_0\cos\beta_0+G_0'\cos\omega,$$
$$c_0=Z-G_0\cos\gamma_0+G_0'\cos\overline{\omega}$$

und

$$a_1 = X - G_1 \cos\alpha_1 + G_1' \cos\theta,$$

$$b_1 = Y - G_1 \cos\beta_1 + G_1' \cos\omega,$$

$$c_1 = Z - G_1 \cos\gamma_1 + G_1' \cos\overline{\omega};$$

also durch Subtraction dieser beiden Systeme:

$$a_0 - a_1 = -G_0 \cos\alpha_0 + G_1 \cos\alpha_1 + (G_0' - G_1') \cos\theta,$$

$$b_0 - b_1 = -G_0 \cos\beta_0 + G_1 \cos\beta_1 + (G_0' - G_1') \cos\omega,$$

$$c_0 - c_1 = -G_0 \cos\gamma_0 + G_1 \cos\gamma_1 + (G_0' - G_1') \cos\overline{\omega};$$

folglich nach 4):

$$a_0 - a_1 = -G_0 \cos\alpha_0 + G_1 \cos\alpha_1 + G(G_0' - G_1') A,$$

$$b_0 - b_1 = -G_0 \cos\beta_0 + G_1 \cos\beta_1 + G(G_0' - G_1') B,$$

$$c_0 - c_1 = -G_0 \cos\gamma_0 + G_1 \cos\gamma_1 + G(G_0' - G_1') C.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe zuerst mit

$$B\cos\gamma_1 - C\cos\beta_1, \quad C\cos\alpha_1 - A\cos\gamma_1, \quad A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1;$$

dann mit

$$B\cos\gamma_0 - C\cos\beta_0, \quad C\cos\alpha_0 - A\cos\gamma_0, \quad A\cos\beta_0 - B\cos\alpha_0;$$

und addirt sie in beiden Fällen zu einander, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich unmittelbar für $G_0$ und $G_1$ die folgenden Ausdrücke ergeben:

9)

$$G_0 = -\frac{\left\{\begin{array}{c}(B\cos\gamma_1 - C\cos\beta_1)(a_0 - a_1) + (C\cos\alpha_1 - A\cos\gamma_1)(b_0 - b_1)\\ + (A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1)(c_0 - c_1)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}(B\cos\gamma_1 - C\cos\beta_1)\cos\alpha_0 + (C\cos\alpha_1 - A\cos\gamma_1)\cos\beta_0\\ + (A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1)\cos\gamma_0\end{array}\right\}},$$

$$G_1 = \frac{\left\{\begin{array}{c}(B\cos\gamma_0 - C\cos\beta_0)(a_0 - a_1) + (C\cos\alpha_0 - A\cos\gamma_0)(b_0 - b_1)\\ + (A\cos\beta_0 - B\cos\alpha_0)(c_0 - c_1)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}(B\cos\gamma_0 - C\cos\beta_0)\cos\alpha_1 + (C\cos\alpha_0 - A\cos\gamma_0)\cos\beta_1\\ + (A\cos\beta_0 - B\cos\alpha_0)\cos\gamma_1\end{array}\right\}}$$

oder:

10)

$$G_0 = \frac{\left\{\begin{array}{c}(B\cos\gamma_1 - C\cos\beta_1)(a_0 - a_1) + (C\cos\alpha_1 - A\cos\gamma_1)(b_0 - b_1)\\ + (A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1)(c_0 - c_1)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}A(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1) + B(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\ + C(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{array}\right\}},$$

$$G_1 = \frac{\left\{\begin{array}{c}(B\cos\gamma_0 - C\cos\beta_0)(a_0 - a_1) + (C\cos\alpha_0 - A\cos\gamma_0)(b_0 - b_1)\\ + (A\cos\beta_0 - B\cos\alpha_0)(c_0 - c_1)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}A(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1) + B(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\ + C(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{array}\right\}}.$$

Hat man mittelst dieser Formeln $G_0$ und $G_1$ berechnet, so findet man $x_0$, $y_0$, $z_0$ und $x_1$, $y_1$, $z_1$ mittelst der Formeln 7).

Weil die Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ und $(x_1 y_1 z_1)$ in der gesuchten Geraden liegen, so kann man deren Gleichungen auf eine der beiden folgenden Arten ausdrücken:

$$\frac{x - x_0}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_0 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_0 - z_1},$$

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_0 - z_1};$$

so dass also:

$$\frac{X - x_0}{x_0 - x_1} = \frac{Y - y_0}{y_0 - y_1} = \frac{Z - z_0}{z_0 - z_1} = G_0'',$$

$$\frac{X - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{Z - z_1}{z_0 - z_1} = G_1'';$$

und folglich:

$$11) \ldots \left\{\begin{array}{l} X = x_0 + G_0''(x_0 - x_1) = x_1 + G_1''(x_0 - x_1),\\ Y = y_0 + G_0''(y_0 - y_1) = y_1 + G_1''(y_0 - y_1),\\ Z = z_0 + G_0''(z_0 - z_1) = z_1 + G_1''(z_0 - z_1)\end{array}\right.$$

ist. Weil nun aber der Punkt $(XYZ)$ in der gegebenen Ebene liegend vorausgesetzt worden ist, so ist:

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$

also:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + \{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)\} G_0'' = 0,$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)\} G_1'' = 0;$$

woraus sich:

$$12)\quad \begin{cases} G_0'' = -\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}, \\ G_1'' = -\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}; \end{cases}$$

folglich nach 11):

$$13)\quad \begin{cases} X = x_0 - \dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}(x_0-x_1), \\ Y = y_0 - \dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}(y_0-y_1), \\ Z = z_0 - \dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}(z_0-z_1) \end{cases}$$

und

$$14)\quad \begin{cases} X = x_1 - \dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}(x_0-x_1), \\ Y = y_1 - \dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}(y_0-y_1), \\ Z = z_1 - \dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}(z_0-z_1) \end{cases}$$

ergiebt, wodurch die Aufgabe nun schon vollständig gelöst ist.

Weil nach 7), 8) und 4):

$$X-a_0 = G_0\cos\alpha_0 - GG_0'A,$$
$$Y-b_0 = G_0\cos\beta_0 - GG_0'B,$$
$$Z-c_0 = G_0\cos\gamma_0 - GG_0'C$$

und

$$X-a_1 = G_1\cos\alpha_1 - GG_1'A,$$
$$Y-b_1 = G_1\cos\beta_1 - GG_1'B,$$
$$Z-c_1 = G_1\cos\gamma_1 - GG_1'C$$

ist; so ist:

15)

$$(B\cos\gamma_0 - C\cos\beta_0)(X-a_0) + (C\cos\alpha_0 - A\cos\gamma_0)(Y-b_0) + (A\cos\beta_0 - B\cos\alpha_0)(Z-c_0) = 0,$$

$$(B\cos\gamma_1 - C\cos\beta_1)(X-a_1) + (C\cos\alpha_1 - A\cos\gamma_1)(Y-b_1) + (A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1)(Z-c_1) = 0;$$

aus welchen beiden Gleichungen, in Verbindung mit der Gleichung

$$16) \ldots\ldots\ldots AX+BY+CZ+D=0,$$

die Coordinaten $X$, $Y$, $Z$ bestimmt werden müssen, wenn man für dieselben ganz independente Ausdrücke haben will. Wenn auch diese Gleichungen alle drei linear sind, so wollen wir uns bei deren Lösung doch der in dem vorhergehenden Aufsatze entwickelten Methode bedienen, um zugleich die Anwendung dieser Methode an einem Beispiele zu erläutern, bemerken jedoch, dass deren Nutzen hauptsächlich dann hervortritt, wenn die drei gegebenen Gleichungen nicht, wie hier, sämmtlich linear sind.

Wir setzen der Kürze wegen:

17)

$$K_0=(B\cos\gamma_0-C\cos\beta_0)a_0+(C\cos\alpha_0-A\cos\gamma_0)b_0+(A\cos\beta_0-B\cos\alpha_0)c_0,$$
$$K_1=(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)a_1+(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)b_1+(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)c_1$$

und haben dann also die drei folgenden Gleichungen aufzulösen:

18)

$$(B\cos\gamma_0-C\cos\beta_0)X+(C\cos\alpha_0-A\cos\gamma_0)Y+(A\cos\beta_0-B\cos\alpha_0)Z=K_0,$$
$$(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)X+(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)Y+(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)Z=K_1,$$
$$AX+BY+CZ+D=0.$$

Man kann nun jede zwei dieser drei Gleichungen als lineare Gleichungen zu Grunde legen, und wird daher nach der im vorhergehenden Aufsatze entwickelten Methode drei verschiedene Auflösungen ableiten können, wobei die folgenden leicht zu beweisenden Relationen sehr gute Dienste leisten:

19)

$$(A\cos\beta_0-B\cos\alpha_0)^2+(B\cos\gamma_0-C\cos\beta_0)^2+(C\cos\alpha_0-A\cos\gamma_0)^2$$
$$=A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)^2,$$
$$(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)^2+(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)^2+(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)^2$$
$$=A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1)^2$$

und:

$$20) \ldots (A\cos\beta_0-B\cos\alpha_0)(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)$$
$$+(B\cos\gamma_0-C\cos\beta_0)(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)$$
$$+(C\cos\alpha_0-A\cos\gamma_0)(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)$$
$$=(A^2+B^2+C^2)(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)$$
$$-(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)(A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1)$$

oder, wenn

21) . . $\cos W_{01} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1$

gesetzt wird, wo $W_{01}$ den von den beiden gegebenen Geraden eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

$$22) \ldots \quad (A\cos\beta_0 - B\cos\alpha_0)(A\cos\beta_1 - B\cos\alpha_1)$$
$$+ (B\cos\gamma_0 - C\cos\beta_0)(B\cos\gamma_1 - C\cos\beta_1)$$
$$+ (C\cos\alpha_0 - A\cos\gamma_0)(C\cos\alpha_1 - A\cos\gamma_1)$$
$$= (A^2+B^2+C^2)\cos W_{01}$$
$$-(A\cos\alpha_0 + B\cos\beta_0 + C\cos\gamma_0)(A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1).$$

Wir begnügen uns jedoch hier, nur den Weg etwas genauer anzugeben, welchen man einzuschlagen hat, wenn man die erste und dritte der Gleichungen 18) als lineare Gleichungen zu Grunde legt. Dann hat man in den im vorhergehenden Aufsatze entwickelten Formeln zu setzen*):

$$\begin{array}{ll} \mathrm{a}_0 = B\cos\gamma_0 - C\cos\beta_0, & \mathrm{a}_1 = A, \\ \mathrm{b}_0 = C\cos\alpha_0 - A\cos\gamma_0, & \mathrm{b}_1 = B, \\ \mathrm{c}_0 = A\cos\beta_0 - B\cos\alpha_0, & \mathrm{c}_1 = C, \\ \mathrm{k}_0 = K_0; & \mathrm{k}_1 = -D; \end{array}$$

und es ist folglich:

$$\mathrm{a}_0^2 + \mathrm{b}_0^2 + \mathrm{c}_0^2 = A^2 + B^2 + C^2 - (A\cos\alpha_0 + B\cos\beta_0 + C\cos\gamma_0)^2,$$
$$\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{b}_1^2 + \mathrm{c}_1^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$
$$\mathrm{a}_0\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_0\mathrm{b}_1 + \mathrm{c}_0\mathrm{c}_1 = 0;$$

also nach dem vorhergehenden Aufsatze, wie man leicht übersieht:

23)

$$\mathfrak{A} = \frac{(B\cos\gamma_0 - C\cos\beta_0)K_0}{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)^2} - \frac{AD}{A^2+B^2+C^2},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{(C\cos\alpha_0 - A\cos\gamma_0)K_0}{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)^2} - \frac{BD}{A^2+B^2+C^2},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(A\cos\beta_0 - B\cos\alpha_0)K_0}{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)^2} - \frac{CD}{A^2+B^2+C^2}.$$

---

*) Wir bedienen uns hier geradstehender Buchstaben statt der im vorhergehenden Aufsatze gebrauchten schiefstehenden.

Ferner ist:

24)

$$\mathrm{A}=(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha_0-A(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0),$$
$$\mathrm{B}=(A^2+B^2+C^2)\cos\beta_0-B(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0),$$
$$\mathrm{C}=(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma_0-C(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)$$

und:

$$25)\ .\ .\quad X=\mathfrak{A}+\mathrm{GA},\quad Y=\mathfrak{B}+\mathrm{GB},\quad Z=\mathfrak{C}+\mathrm{GC}.$$

Führt man nun diese Ausdrücke in die zweite der Gleichungen 18) ein, so wird dieselbe:

$$\mathfrak{A}(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)+\mathfrak{B}(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)+\mathfrak{C}(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)$$
$$+\{\mathrm{A}(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)+\mathrm{B}(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)+\mathrm{C}(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)\}\mathrm{G}$$
$$=K_1,$$

und führt also zu dem folgenden Ausdrucke von G:

26)

$$\mathrm{G}=\frac{K_1-\{\mathfrak{A}(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)+\mathfrak{B}(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)+\mathfrak{C}(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)\}}{\mathrm{A}(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)+\mathrm{B}(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)+\mathrm{C}(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)},$$

wobei man noch bemerken kann, dass

$$\mathfrak{A}(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)+\mathfrak{B}(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)+\mathfrak{C}(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)$$
$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}(A^2+B^2+C^2)\cos W_{01}\\ -(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)(A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1)\end{array}\right\}}{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)^2}K_0$$

und

$$\mathrm{A}(B\cos\gamma_1-C\cos\beta_1)+\mathrm{B}(C\cos\alpha_1-A\cos\gamma_1)+\mathrm{C}(A\cos\beta_1-B\cos\alpha_1)$$
$$=-(A^2+B^2+C^2)\left\{\begin{array}{l}A(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\ +B(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\ +C(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{array}\right.$$

ist. Setzt man der Abkürzung wegen:

27)

$$M=(A^2+B^2+C^2)(K_1-K_0\cos W_{01})$$
$$-(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)\left\{\begin{array}{c}(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)K_1\\ -(A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1)K_0\end{array}\right\},$$

$$N=(A^2+B^2+C^2)\{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha_0+B\cos\beta_0+C\cos\gamma_0)^2\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} A(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1) \\ +B(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1) \\ +C(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1) \end{array}\right\};$$

so ist, wie man leicht findet:

$$28) \quad \ldots\ldots\ldots \quad G=-\frac{M}{N}.$$

Es ist nicht meine Absicht, diese Auflösung weiter auszuführen, da das Vorhergehende zur allgemeinen Erläuterung der Methode schon hinreicht, worauf es hier zunächst allein ankam.

Vorzüglich einfach gestaltet sich aber das Vorhergehende, wenn man, was natürlich jederzeit verstattet ist, die gegebene Ebene selbst als Ebene der $xy$ annimmt. Dann ist nämlich im Obigen

$$A=0,\quad B=0,\quad C=1,\quad D=0$$

zu setzen; und nach 10) ist also:

$$29) \ldots \left\{\begin{array}{l} G_0=-\dfrac{(a_0-a_1)\cos\beta_1-(b_0-b_1)\cos\alpha_1}{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}, \\[2ex] G_1=-\dfrac{(a_0-a_1)\cos\beta_0-(b_0-b_1)\cos\alpha_0}{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}; \end{array}\right.$$

mittelst welcher Grössen die Coordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$ und $x_1$, $y_1$, $z_1$ wie gewöhnlich nach den Formeln:

$$30) \ldots \left\{\begin{array}{ll} x_0=a_0+G_0\cos\alpha_0, & x_1=a_1+G_1\cos\alpha_1, \\ y_0=b_0+G_0\cos\beta_0, & y_1=b_1+G_1\cos\beta_1, \\ z_0=c_0+G_0\cos\gamma_0; & z_1=c_1+G_1\cos\gamma_1 \end{array}\right.$$

gefunden werden. Zur Bestimmung von $X$, $Y$ hat man aber, da natürlich $Z=0$ ist, nach 15) die folgenden Gleichungen:

$$(X-a_0)\cos\beta_0-(Y-b_0)\cos\alpha_0=0,$$

$$(X-a_1)\cos\beta_1-(Y-b_1)\cos\alpha_1=0$$

oder:

$$X\cos\beta_0-Y\cos\alpha_0=a_0\cos\beta_0-b_0\cos\alpha_0,$$

$$X\cos\beta_1-Y\cos\alpha_1=a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1;$$

woraus sich sogleich die Formeln:

$$31)\quad \begin{cases} X=\dfrac{(a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)\cos\alpha_0-(a_0\cos\beta_0-b_0\cos\alpha_0)\cos\alpha_1}{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}, \\ Y=\dfrac{(a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)\cos\beta_0-(a_0\cos\beta_0-b_0\cos\alpha_0)\cos\beta_1}{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1} \end{cases}$$

ergeben.

Setzt man, wie es verstattet ist:

$$32)\ \ldots \begin{cases} \cos\alpha_0=\cos u_0\cos v_0, & \cos\alpha_1=\cos u_1\cos v_1, \\ \cos\beta_0=\sin u_0\cos v_0, & \cos\beta_1=\sin u_1\cos v_1, \\ \cos\gamma_0=\sin v_0; & \cos\gamma_1=\sin v_1; \end{cases}$$

so ist:

$$33)\ \ldots \begin{cases} G_0=\dfrac{(a_0-a_1)\sin u_1-(b_0-b_1)\cos u_1}{\sin(u_0-u_1)\cos v_0}, \\ G_1=\dfrac{(a_0-a_1)\sin u_0-(b_0-b_1)\cos u_0}{\sin(u_0-u_1)\cos v_1} \end{cases}$$

und:

$$34)\ \ldots\ldots \begin{cases} x_0=a_0+G_0\cos u_0\cos v_0, \\ y_0=b_0+G_0\sin u_0\cos v_0, \\ z_0=c_0+G_0\sin v_0; \\ x_1=a_1+G_1\cos u_1\cos v_1, \\ y_1=b_1+G_1\sin u_1\cos v_1, \\ z_1=c_1+G_1\sin v_1. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$35)\quad \begin{cases} X=\dfrac{(a_0\sin u_0-b_0\cos u_0)\cos u_1-(a_1\sin u_1-b_1\cos u_1)\cos u_0}{\sin(u_0-u_1)}, \\ Y=\dfrac{(a_0\sin u_0-b_0\cos u_0)\sin u_1-(a_1\sin u_1-b_1\cos u_1)\sin u_0}{\sin(u_0-u_1)}; \end{cases}$$

und nach 13) ist auch:

$$36)\ \ldots\ X=\frac{z_0x_1-x_0z_1}{z_0-z_1},\quad Y=\frac{z_0y_1-y_0z_1}{z_0-z_1}.$$

Natürlich muss aber im vorliegenden Falle

$$X=x_0=x_1 \quad\text{und}\quad Y=y_0=y_1$$

sein, was auch durch die vorstehenden Formeln vollkommen bestätigt wird.

# XXIV.

## Beweise einiger planimetrischen Lehrsätze.

Von

Herrn *Hermann Schwarz*

in Berlin.

---

I. Unter allen durch einen Punkt der Halbirungslinie eines Winkels gehenden und von den Schenkeln desselben begrenzten Transversalen ist die Normale auf der Halbirungslinie die kürzeste.

Ausser $DD'$ (Taf. IV. Fig. 1. u. Fig. 2.) $\perp AP$, der Halbirungslinie des $\angle A$, gehe durch den Punkt $P$ noch $BC$. Zu beweisen ist, dass $BC > DD'$.

Erster Beweis. (Taf. IV. Fig. 1.) Es sei $AC$ der kürzere der beiden durch $BC$ gebildeten Schenkelabschnitte, so mache man $AC' = AC$ und ziehe $PC'$, so ist $PC' = PC$; man fälle von $C'$ auf $DP$ die Normale $C'E$, welche in ihrer Verlängerung die $PB$ in $F$ schneidet, so ist $\Delta\, C'EP \cong \Delta\, FEP$. Endlich ziehe man durch $F$ mit $PD$ eine Parallele, welche den Schenkel $AB$ in $G$ schneidet. Nun ist:

$$\begin{array}{lcl} BP - PC = BP - PC' = BP - PF = BF \\ \quad 2PC & = & 2PC \\ \hline BP + PC & = & BF + 2PC \\ BC & = & BF + 2PC. \end{array}$$

$BF$ ist $> FG$, weil $\angle FGA = \angle PDA$ ein spitzer ist; $FG = 2DE$, weil $C'F = 2C'E$; also ist $BF > 2DE$; $PC > PE$; also ist $BF + 2PC > 2DE + 2PE > 2PD$, oder es ist $BC > 2PD$, $BC > DD'$.

Noch einfacher als dieser erscheint folgender

Zweiter Beweis. (Taf. IV. Fig. 2.) Es müssen $B$ und $C$ zu verschiedenen Seiten von $DD'$ liegen. $B$ liege auf der $A$ entgegengesetzten Seite, so ist $\angle BDP$ jedenfalls ein stumpfer, also $PB > PD$. Nun kann $PC$ entweder $>$ oder $= PD'$ sein, oder es ist $< PD'$. In beiden ersteren Fällen erhellet von selbst,

dass $BC = BP + PC > DP + PD'$, also auch $> DD'$ ist. Im letzteren Falle ist der Beweis folgender. $\angle PCD'$ ist $<$ als der Nebenwinkel von $PD'C$ oder als der Winkel $PDB$; man kann also den ersteren auf den letzteren abtragen, so dass $\angle PDE = \angle PCD'$ ist. Dann sind die $\Delta\Delta$ $PD'C$ und $PED$ ähnlich und es ist $PD' - PC : PE - PD = PC : PD$. Nach der Annahme ist aber $PC < PD'$, also auch $< PD$, und mithin ist $PD' - PC < PE - PD$, oder es ist $PD' + PD < PC + PE$, also ist $DD' < BC$.

II. Gehen durch einen Punkt der Halbirungslinie eines Winkels zwei von den Schenkeln desselben begrenzte Transversalen, welche ungleiche Stücke von den Schenkeln abschneiden, und betrachtet man von den zwei durch jede Transversale gebildeten Schenkelabschnitten die grösseren, so können diese beiden entweder gleich oder ungleich sein. Im ersteren Falle sind auch die Transversalen einander gleich; im letzteren gehört zu dem längeren der beiden Abschnitte auch die längere Transversale.

Beweis. Erster Theil. Liegen die längeren Abschnitte auf demselben Schenkel, so sind die Transversalen identisch, also auch gleich; liegen sie aber auf verschiedenen Schenkeln, so gelangt man durch die Vermittelung zweier Paare congruenter Dreiecke zur Gleichheit der Transversalen.

Zweiter Theil. Liegen die beiden längeren Schenkelabschnitte, wie $AB$ und $AB''$, auf verschiedenen Schenkeln, so trage man den einen von beiden auf den andern Schenkel ab und ziehe die entsprechende Transversale $B'C'$, so sind nach dem ersten Theile dieses Satzes die Transversalen $B'C'$ und $B''C''$, weil sie gleichen Schenkelabschnitten angehören, einander gleich. Der Satz braucht also nur für den Fall bewiesen zu werden, in welchem die beiden längeren Schenkelabschnitte demselben Schenkel angehören. Es seien also $BC$ und $B'C'$ die beiden Transversalen, es sei $AB > AC$, $AB' > AC'$ und $AB' > AB$; es soll bewiesen werden, dass $B'C' > BC$ ist.

$\angle ABC$ ist ein spitzer, weil $AC$ im $\Delta ABC$ nach der Voraussetzung $< AB$ ist; $\angle PBB'$ ist also ein stumpfer und daher $PB' > PB$. Nun ist entweder $PC' >$ oder $=$ oder $< PC$. Nur für den Fall, dass $PC' < PC$, braucht noch bewiesen zu werden, dass $B'C' > BC$. Es sei also $PC' < PC$. $\angle ABC < \angle ACB$, weil $AC < AB$, also $\angle B'BP > \angle PCB''$; nun ist $\angle PCB'' > \angle PC'C$ als Aussenwinkel des $\Delta PCC'$, mithin $\angle B'BP > \angle PC'C$. Trägt man also den $\angle PC'C$ auf den $\angle B'BP$ ab, so schneidet der zweite Schenkel die $PB'$ zwischen ihren Endpunkten in $E$, und es ist dann $\Delta PCC' \sim \Delta PEB$, also $PC - PC' : PE - PB = PC' : PB$; es ist aber nach der Annahme

$PC' < PC$, und weil $PC : PB = AC : AB$ und nach der Voraussetzung $AC < AB$ ist, ist $PC < PB$, also $PC' < PB$, und zufolge obiger Proportion $PC - PC' < PE - PB$ oder $PE + PC' > PC + PB$, $EC' > BC$; um so mehr ist also $B'C' > BC$.

Der Satz ist also in allen seinen Theilen bewiesen.

III. Umkehrung. Gehen durch einen Punkt der Halbirungslinie eines Winkels zwei von den Schenkeln desselben begrenzte Transversalen, und sind diese einander gleich, so haben ihre Endpunkte beziehlich gleiche Abstände von dem Scheitel des Winkels, und sind sie ungleich, so entspricht unter den grösseren Schenkelabschnitten der grösseren Transversale der grössere Schenkelabschnitt.

Dieser Satz ist eine unmittelbare indirekte Folge des Vorhergehenden, denn die Behauptung des geraden Gegentheils würde ein Widerspruch mit dem vorigen Satze sein.

Anmerkung. Ein ganz specieller Fall dieses allgemeinen Satzes ist folgender: Sind in einem Dreiecke zwei winkelhalbirende Transversalen einander gleich, so ist es gleichschenklig. Den Beweis dieses Umkehrungssatzes rechnet man bekanntlich schon zu den schwierigeren. Es gibt mehrere Beweise für denselben; die dem Verfasser bekannten sind jedoch sehr weitläuftig. Leichter zu finden, als die geometrischen Beweise überhaupt, dürfte folgender arithmetischer sein. Sind $a$, $b$, $c$ die Seiten des Dreiecks; $m_a$, $m_b$, $m_c$ die winkelhalbirenden Transversalen, und ist $m_b = m_c$, so ist zu beweisen, dass $b = c$ ist. Zunächst drücke man eine der drei Transversalen, etwa $m_a$, durch die Seiten des Dreiecks aus. Nennt man $n$ den an $b$ anliegenden, durch $m_a$ gebildeten Abschnitt von $a$, und $q$ den ebenfalls an $b$ anliegenden, durch das Höhenperpendikel auf $a$ gebildeten Abschnitt von $a$, so besteht zunächst die Gleichung $m_a^2 = n^2 + b^2 - 2nq$; es ist aber $n = \frac{ab}{a+b}$, $q = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$. Nach gehöriger Substitution erhält man $m_a^2 = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}$, also $m_b^2 = \frac{ac(a+b+c)(a-b+c)}{(a+c)^2}$ und $m_c^2 = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$. Setzt man diese beiden letzteren Ausdrücke einander gleich und hebt mit $a(a+b+c)$, so erhält man $\frac{c(a-b+c)}{(a+c)^2} = \frac{b(a+b-c)}{(a+b)^2}$, eine Gleichung, welche sich nach den gehörigen Reduktionen in folgende verwandelt: $[(a^2+bc)(a+b+c)+2abc](b-c)=0$. Aus dieser ist nun ersichtlich, dass $b - c = 0$ sein muss, weil der

andere Faktor nicht gleich Null werden kann. — Einen auf demselben Prinzipe beruhenden Beweis kann man auch mit Benutzung der Relation $m_a^2 = bc - \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c}$ führen. Beide Relationen finden sich in der Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der Planimetrie von Gandtner und Junghans, Thl. 2. L. 56. und 57. *)

# XXV.

## Ueber die Excentricität der Boussole.

Von

dem Herausgeber.

Ich habe noch nirgends Regeln zur Berücksichtigung des Excentricitäts-Fehlers der Boussole entwickelt gefunden, von denen ich hätte sagen können, dass sie mir völlig genügt hätten. Wenn man freilich das Instrument so gebraucht, dass man mit demselben die Winkel der Figuren wirklich misst, so wird leicht erhellen, dass man nur das Maass des zu bestimmenden Winkels sowohl durch Ablesungen an der Nordspitze, als auch durch Ablesungen an der Südspitze der Nadel auf bekannte Weise zu ermitteln, und dann zwischen beiden auf diese Weise erhaltenen Bestimmungen des Winkels das arithmetische Mittel zu nehmen hat. Wenn man aber die Boussole auf die gewöhnliche Weise gebraucht, so dass nämlich damit nicht die Winkel wirklich gemessen, sondern nur die Spitzen der Nadel abgelesen werden, um dadurch die Abweichungen gewisser Visirrichtungen und der Richtung der Nadel von einander anzugeben und zu bestimmen; so muss man jedenfalls nach dem Princip verfahren, dass man die an den Spitzen der wirklichen Nadel gemachten Ablesungen so reducirt, als wenn sie an den ent-

*) Von dem hier besprochenen Satze ist im Archiv schon vielfach die Rede gewesen, selbst in noch verallgemeinerter Gestalt. M. s. das Inhaltsverzeichniss zu Thl. I.—XXV. S. 132 ff. (Ebene Geom.)

sprechenden Spitzen einer durch den Mittelpunkt des Limbus mit der wirklichen Nadel parallel gelegten Nadel gemacht worden wären; und dazu hat man, so viel ich weiss, noch keine ganz allgemein gültige und völlig genügende Regel gegeben, so dass es bei der grossen praktischen Wichtigkeit dieses Gegenstandes wohl nicht ganz unverdienstlich sein dürfte, eine solche Regel zu entwickeln, wie ich in dem Folgenden zu thun versuchen werde.

Die wirkliche Nadel der Boussole werde ich die **excentrische Nadel**, dagegen die dieser Nadel durch den Mittelpunkt des Limbus parallel gelegt gedachte Nadel die **centrische Nadel** nennen; die erstere ist in Fig. I. — Fig. IV. und Fig. I*. — Fig. IV*. *) durch einen völlig ausgezogenen, die letztere durch einen punktirten Pfeil bezeichnet. Der an dem Umfange der Kreise befindliche kleine Pfeil deutet die Richtung an, nach welcher auf der Boussole die Grade gezählt sein sollen. Die an der durch eine Pfeilspitze bezeichneten Spitze und an der dieser entgegengesetzten Spitze der excentrischen Nadel gemachten Ablesungen sollen respective durch $n$ und $n_1$, die Ablesungen dagegen, welche man an den entsprechenden Spitzen der centrischen Nadel machen würde, respective durch $N$ und $N_1$ bezeichnet werden, wo es also jetzt darauf ankommt, $N$ und $N_1$ aus $n$ und $n_1$ zu bestimmen. Den zwischen den entsprechenden Spitzen beider Nadeln liegenden Bogen des Limbus, welcher bei einem guten Instrumente immer sehr klein sein wird, wollen wir durch $\omega$, den Anfangspunkt oder den Nullpunkt der Theilung aber durch 0 bezeichnen. In Fig. I. — Fig. IV. und Fig. I*. — Fig. IV*. sind alle Fälle dargestellt, welche rücksichtlich der gegenseitigen Lage der beiden Nadeln und der Lage des Nullpunktes der Theilung gegen dieselben vorkommen können, und alles Folgende wird nun gewiss, mit fortwährender Beziehung auf die genannten Figuren, ganz durch sich selbst verständlich sein.

Zuerst überzeugt man sich auf der Stelle von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$\text{I.}\quad N = n + \omega - 360^\circ$$
$$N_1 = n_1 - \omega$$
$$N - N_1 = -180^\circ$$

$$\text{II.}\quad N = n + \omega$$
$$N_1 = n_1 - \omega$$
$$N - N_1 = -180^\circ$$

*) Wegen der Figuren s. m. überall Taf. IV.

III. $$N = n + \omega$$
$$N_1 = n_1 - \omega + 360^0$$
$$N - N_1 = -180^0$$

IV. $$N = n + \omega$$
$$N_1 = n_1 - \omega$$
$$N - N_1 = 180^0$$

I*. $$N = n - \omega$$
$$N_1 = n_1 + \omega$$
$$N - N_1 = -180^0$$

II*. $$N = n - \omega$$
$$N_1 = n_1 + \omega - 360^0$$
$$N - N_1 = 180^0$$

III*. $$N = n - \omega$$
$$N_1 = n_1 + \omega$$
$$N - N_1 = 180^0$$

IV*. $$N = n - \omega + 360^0$$
$$N_1 = n_1 + \omega$$
$$N - N_1 = 180^0.$$

Aus diesen Gleichungen leitet man die folgenden Formeln ab:

I. $$N + N_1 = n + n_1 - 360^0$$
$$N - N_1 = \quad -180^0$$
$$2N = n + n_1 - 3.180^0$$
$$2N_1 = n + n_1 - 1.180^0$$
$$N = \frac{n + n_1}{2} - 3.90^0$$
$$N_1 = \frac{n + n_1}{2} - 1.90^0$$

II. $$N + N_1 = n + n_1$$
$$N - N_1 = \quad -180^0$$
$$2N = n + n_1 - 1.180^0$$
$$2N_1 = n + n_1 + 1.180^0$$
$$N = \frac{n + n_1}{2} - 1.90^0$$
$$N_1 = \frac{n + n_1}{2} + 1.90^0$$

III. $$N+N_1=n+n_1+360^0$$
$$N-N_1=\qquad -180^0$$
$$2N=n+n_1+1.180^0$$
$$2N_1=n+n_1+3.180^0$$
$$N=\frac{n+n_1}{2}+1.90^0$$
$$N_1=\frac{n+n_1}{2}+3.90^0$$

IV. $$N+N_1=n+n_1$$
$$N-N_1=\qquad 180^0$$
$$2N=n+n_1+1.180^0$$
$$2N_1=n+n_1-1.180^0$$
$$N=\frac{n+n_1}{2}+1.90^0$$
$$N_1=\frac{n+n_1}{2}-1.90^0$$

I*. $$N+N_1=n+n_1$$
$$N-N_1=\qquad -180^0$$
$$2N=n+n_1-1.180^0$$
$$2N_1=n+n_1+1.180^0$$
$$N=\frac{n+n_1}{2}-1.90^0$$
$$N_1=\frac{n+n_1}{2}+1.90^0$$

II*. $$N+N_1=n+n_1-360^0$$
$$N-N_1=\qquad 180^0$$
$$2N=n+n_1-1.180^0$$
$$2N_1=n+n_1-3.180^0$$
$$N=\frac{n+n_1}{2}-1.90^0$$
$$N_1=\frac{n+n_1}{2}-3.90^0$$

III*. $$N+N_1=n+n_1$$
$$N-N_1=\qquad 180^0$$
$$2N=n+n_1+1.180^0$$
$$2N_1=n+n_1-1.180^0$$

$$N=\frac{n+n_1}{2}+1.90^0$$

$$N_1=\frac{n+n_1}{2}-1.90^0$$

IV*.
$$\begin{aligned} N+N_1 &= n+n_1+360^0 \\ N-N_1 &= \qquad\quad 180^0 \\ 2N &= n+n_1+3.180^0 \\ 2N_1 &= n+n_1+1.180^0 \end{aligned}$$

$$N=\frac{n+n_1}{2}+3.90^0$$

$$N_1=\frac{n+n_1}{2}+1.90^0.$$

Weil jede der beiden Grössen $N$ und $N_1$ immer zwischen 0 und 360⁰ oder zwischen 0 und 4.90⁰ liegt, so ergiebt sich hieraus Folgendes:

I.
$$0<\frac{n+n_1}{2}-3.90^0<4.90^0$$

$$0<\frac{n+n_1}{2}-1.90^0<4.90^0$$

$$3.90^0<\frac{n+n_1}{2}<7.90^0$$

$$1.90^0<\frac{n+n_1}{2}<5.90^0$$

$$3.90^0<\frac{n+n_1}{2}<4.90^0$$

II.
$$0<\frac{n+n_1}{2}-1.90^0<4.90^0$$

$$0<\frac{n+n_1}{2}+1.90^0<4.90^0$$

$$1.90^0<\frac{n+n_1}{2}<5.90^0$$

$$-1.90^0<\frac{n+n_1}{2}<3.90^0$$

$$1.90^0<\frac{n+n_1}{2}<3.90^0$$

III. $$0 < \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 < 4.90^0$$

$$0 < \frac{n+n_1}{2} + 3.90^0 < 4.90^0$$

$$-1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

$$-3.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 1.90^0$$

$$0 < \frac{n+n_1}{2} < 1.90^0$$

IV. $$0 < \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 < 4.90^0$$

$$0 < \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0 < 4.90^0$$

$$-1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 5.90^0$$

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

I*. $$0 < \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0 < 4.90^0$$

$$0 < \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 < 4.90^0$$

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 5.90^0$$

$$-1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

II*. $$0 < \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0 < 4.90^0$$

$$0 < \frac{n+n_1}{2} - 3.90^0 < 4.90^0$$

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 5.90^0$$

$$3.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 7.90^0$$

$$3.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 4.90^0$$

III*. $$0 < \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 < 4.90^0$$

$$0 < \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0 < 4.90^0$$

$$-1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 5.90^0$$

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

IV*. $$0 < \frac{n+n_1}{2} + 3.90^0 < 4.90^0$$

$$0 < \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 < 4.90^0$$

$$-3.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 1.90^0$$

$$-1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

$$0 < \frac{n+n_1}{2} < 1.90^0.$$

Suchen wir nun das Gemeinschaftliche dieser Fälle auf.

In den Fällen III. und IV*. ist:

$$0 < \frac{n+n_1}{2} < 1.90^0.$$

In den Fällen II., IV., I*., III*. ist:

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0.$$

In den Fällen I. und II*. ist:

$$3.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 4.90^0.$$

In dem Falle III. ist:

$$n > n_1, \quad N = \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} + 3.90^0$$

und in dem Falle IV*. ist:

$$n < n_1, \quad N = \frac{n+n_1}{2} + 3.90^0$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0.$$

In dem Falle II. ist:

$$n < n_1, \quad N = \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0,$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0;$$

in dem Falle IV. ist:

$$n > n_1, \quad N = \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0,$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0;$$

in dem Falle I*. ist:

$$n < n_1, \quad N = \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0,$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0;$$

in dem Falle III*. ist:

$$n > n_1, \quad N = \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0,$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0.$$

In dem Falle I. ist:

$$n > n_1,\quad N = \frac{n+n_1}{2} - 3.90^0,$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0$$

und in dem Falle II*. ist:

$$n < n_1,\quad N = \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0,$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} - 3.90^0.$$

Hieraus ergiebt sich nun zuvörderst die folgende

*Regel.*

Wenn

$$0 < \frac{n+n_1}{2} < 1.90^0$$

ist, so muss man

$$\left.\begin{array}{l} N = \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 \\ N_1 = \frac{n+n_1}{2} + 3.90^0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} N = \frac{n+n_1}{2} + 3.90^0 \\ N_1 = \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 \end{array}\right.$$

setzen, jenachdem $n > n_1$ oder $n < n_1$ ist.

Wenn

$$1.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^0$$

ist, so muss man

$$N = \frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0$$

$$N_1 = \frac{n+n_1}{2} \mp 1.90^0$$

setzen, und die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem $n > n_1$ oder $n < n_1$ ist.

Wenn

$$3.90^0 < \frac{n+n_1}{2} < 4.90^0$$

ist, so muss man

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{n+n_1}{2} - 3.90^\circ \\ N_1 &= \frac{n+n_1}{2} - 1.90^\circ \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} N &= \frac{n+n_1}{2} - 1.90^\circ \\ N_1 &= \frac{n+n_1}{2} - 3.90^\circ \end{aligned}\right.$$

setzen, jenachdem $n > n_1$ oder $n < n_1$ ist.

Hieraus ergiebt sich nun aber ferner unmittelbar die folgende

*Regel.*

Wenn

$$0 < \frac{n+n_1}{2} < 1.90^\circ$$

ist, so ist die der Spitze, an welcher die grössere Ablesung gemacht worden ist, entsprechende Zahl

$$\frac{n+n_1}{2} + 1.90^\circ;$$

und die der Spitze, an welcher die kleinere Ablesung gemacht worden ist, entsprechende Zahl ist

$$\frac{n+n_1}{2} + 3.90^\circ.$$

Wenn

$$1.90^\circ < \frac{n+n_1}{2} < 3.90^\circ$$

ist, so ist die der Spitze, an welcher die grössere Ablesung gemacht worden ist, entsprechende Zahl

$$\frac{n+n_1}{2} + 1.90^\circ,$$

und die der Spitze, an welcher die kleinere Ablesung gemacht worden ist, entsprechende Zahl ist

$$\frac{n+n_1}{2} - 1.90^\circ.$$

Wenn

$$3.90^\circ < \frac{n+n_1}{2} < 4.90^\circ$$

ist, so ist die der Spitze, an welcher die grössere Ablesung gemacht worden ist, entsprechende Zahl

$$\frac{n+n_1}{2}-3.90^0;$$

und die der Spitze, an welcher die kleinere Ablesung gemacht worden ist, entsprechende Zahl ist

$$\frac{n+n_1}{2}-1.90^0.$$

Für den Gebrauch in der Praxis ist die auf die vorstehende Weise ausgesprochene Regel noch zu weitläufig; man kann aber durch die folgenden Betrachtungen aus derselben eine praktisch brauchbarere Regel ableiten.

Zuvörderst überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit der folgenden Sätze, wobei wir jedoch bemerken, dass wir der Kürze wegen eine besondere Discussion solcher Fälle, wenn etwa eine der nachstehend vorkommenden Zahlen gleich $4.90^0$ oder gleich 0 sein sollte, unterlassen haben, weil ein Jeder dieselben leicht selbst zu deuten verstehen wird; man hat im Folgenden 0 mit zu den negativen Zahlen zu rechnen, und in einigen besonderen Fällen statt der Worte „grösser als $4.90^0$" die Worte „gleich $4.90^0$" zu setzen:

Wenn keine der beiden Zahlen

$$\frac{n+n_1}{2}+1.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}+3.90^0$$

grösser als $4.90^0$ ist, so sind die beiden Zahlen

$$\frac{n+n_1}{2}-3.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}-1.90^0$$

negativ.

Wenn von den beiden Zahlen

$$\frac{n+n_1}{2}+1.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}-1.90^0$$

die erste nicht grösser als $4.90^0$, die zweite nicht negativ ist, so ist von den beiden Zahlen

$$\frac{n+n_1}{2}-3.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}+3.90^0$$

die erste immer negativ, die zweite grösser als $4.90^0$.

Wenn keine der beiden Zahlen

$$\frac{n+n_1}{2}-3.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}-1.90^0$$

negativ ist, so sind die beiden Zahlen

$$\frac{n+n_1}{2}+1.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}+3.90^0$$

grösser als $4.90^0$.

Nach dem Obigen liefern nur folgende Zahlen Auflösungen unserer Aufgabe:

$$\frac{n+n_1}{2}+1.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}+3.90^0;$$

$$\frac{n+n_1}{2}+1.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}-1.90^0;$$

$$\frac{n+n_1}{2}-3.90^0,\quad \frac{n+n_1}{2}-1.90^0;$$

welche aber nur dann zulässig sind, wenn keine Zahl grösser als $4.90^0$, keine Zahl negativ ist. Aus dem Vorstehenden erhellet daher, dass immer nur eine dieser Auflösungen zulässig ist, und es ergiebt sich nun mit Rücksicht auf das Obige offenbar die folgende, in der Praxis leicht anwendbare und leicht zu behaltende

*Regel.*

Die Zahl $\frac{n+n_1}{2}$ vermehre und vermindere man um $1.90^0$ und $3.90^0$; erweiset sich eine der beiden dadurch erhaltenen Auflösungen als zulässig, so ist diese die richtige, und es entspricht die kleinere und grössere der beiden erhaltenen Zahlen der Spitze der Nadel, an welcher respective die grössere und die kleinere Ablesung gemacht worden ist. Erweisen aber beide auf diese Art erhaltenen Auflösungen sich als unzulässig, so liefern die beiden durch Vermehrung und Verminderung der Zahl $\frac{n+n_1}{2}$ um $1.90^0$ erhaltenen Zahlen die richtige Auflösung, und es entspricht die kleinere und grössere dieser beiden Zahlen der Spitze der Nadel, an welcher respective die kleinere und die grössere Ablesung gemacht worden ist.

Wir wollen dies durch ein Paar Beispiele erläutern, indem

wir annehmen, dass an der Nordspitze die Ablesung $n$, an der Südspitze die Ablesung $n_1$ gemacht worden sei.

Es sei $n = 147^0$, $n_1 = 23^0$, also:

$$\frac{n+n_1}{2} = \frac{147^0+23^0}{2} = \frac{170^0}{2} = 85^0,$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = 85^0 \pm 90^0 = \left\{ \begin{array}{r} 175^0 \\ -5^0 \end{array} \right.,$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = 85^0 \pm 270^0 = \left\{ \begin{array}{r} 355^0 \\ -185^0 \end{array} \right..$$

Daher ist die richtige Auflösung:

Nordspitze: $175^0$
Südspitze: $355^0$

Es sei $n = 26^0$, $n_1 = 322^0$, also:

$$\frac{n+n_1}{2} = \frac{26^0+322^0}{2} = \frac{348^0}{2} = 174^0,$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = 174^0 \pm 90^0 = \left\{ \begin{array}{r} 264^0 \\ 84^0 \end{array} \right.,$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = 174^0 \pm 270^0 = \left\{ \begin{array}{r} 444^0 \\ -96^0 \end{array} \right..$$

Daher ist die richtige Auflösung:

Nordspitze: $84^0$
Südspitze: $264^0$.

Es sei $n = 319^0$, $n_1 = 195^0$, also:

$$\frac{n+n_1}{2} = \frac{319^0+195^0}{2} = \frac{514^0}{2} = 257^0,$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = 257^0 \pm 90^0 = \left\{ \begin{array}{r} 347^0 \\ 167^0 \end{array} \right.,$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = 257^0 \pm 270^0 = \left\{ \begin{array}{r} 527^0 \\ -13^0 \end{array} \right..$$

Daher ist die richtige Auflösung:

Nordspitze: $347^0$
Südspitze: $167^0$.

Es sei $n = 235^0$, $n_1 = 347^0$, also:

$$\frac{n+n_1}{2}=\frac{235^0+347^0}{2}=\frac{582^0}{2}=\quad 291^0,$$

$$\frac{n+n_1}{2}\pm 1.90^0=291^0\pm\ 90^0=\left\{\begin{matrix}381^0\\201^0\end{matrix}\right.,$$

$$\frac{n+n_1}{2}\pm 3.90^0=291^0\pm 270^0=\left\{\begin{matrix}561^0\\21^0\end{matrix}\right..$$

Daher ist die richtige Auflösung:

Nordspitze: 201°
Südspitze: 21°.

Es sei $n=12^0$, $n_1=64^0$, also:

$$\frac{n+n_1}{2}=\frac{12^0+64^0}{2}=\frac{76^0}{2}=\quad 38^0,$$

$$\frac{n+n_1}{2}\pm 1.90^0=38^0\pm\ 90^0=\left\{\begin{matrix}128^0\\-52^0\end{matrix}\right.,$$

$$\frac{n+n_1}{2}\pm 3.90^0=38^0\pm 270^0=\left\{\begin{matrix}308^0\\-232^0\end{matrix}\right..$$

Daher ist die richtige Auflösung:

Nordspitze: 308°
Südspitze: 128°.

Es sei $n=314^0$, $n_1=356^0$, also:

$$\frac{n+n_1}{2}=\frac{314^0+356^0}{2}=\frac{670^0}{2}=\quad 335^0,$$

$$\frac{n+n_1}{2}\pm 1.90^0=335^0\pm\ 90^0=\left\{\begin{matrix}425^0\\245^0\end{matrix}\right.,$$

$$\frac{n+n_1}{2}\pm 3.90^0=335^0\pm 270^0=\left\{\begin{matrix}605^0\\65^0\end{matrix}\right..$$

Daher ist die richtige Auflösung:

Nordspitze: 245°
Südspitze: 65°.

Man wird sich von der Richtigkeit der in diesen Beispielen, welche zur Erläuterung der allgemeinen Regel hinreichend sein werden, erhaltenen Resultate leicht in jedem einzelnen Falle durch Betrachtung einer demselben entsprechenden Figur überzeugen

können*). Der grosse Vortheil unserer allgemeinen Regel liegt aber eben darin, dass dieselbe in allen Fällen bloss durch einfache Rechnung, ohne jedwede Betrachtung einer Figur ganz leicht und sicher zu dem gesuchten Resultate führt, weshalb es wünschenswerth zu sein scheint, dass dieselbe in die Lehrbücher der Geodäsie übergehe. Man sollte nach meiner Meinung nie unterlassen, beide Nadelspitzen sorgfältig abzulesen, und die Ablesungen nach der obigen Regel zu corrigiren; dann würden die Messungen mit der Boussole zu zuverlässigeren Resultaten führen.

Wenn die Excentricität, wie dies meistens der Fall sein wird, sehr gering ist, so ist, wenn wir

$$n-n_1=\pm 180^0+\varDelta,$$

setzen, $\varDelta$ eine der Null sehr nahe kommende Grösse, die übrigens positiv und negativ sein kann.

Wenn nun **erstens**

$$n-n_1=180^0+\varDelta,$$

also

---

*) Dem Falle $n=319^0$, $n_1=195^0$ entspricht Fig. V. In diesem Falle hat man, wie aus der Figur erhellet, offenbar die folgende Gleichung:

$$x+195^0-180^0=360^0-319^0-x,$$
$$x+15^0=41^0-x,$$
$$2x=41^0-15^0=26^0,\quad x=13^0;$$

also nach der Figur offenbar für die centrische Nadel:

Nordspitze: $360^0-13^0=347^0$

Südspitze: $180^0-13^0=167^0$

ganz wie oben nach der Regel gefunden.

Dem Falle $n=314^0$, $n_1=356^0$ entspricht Fig. VI. In diesem Falle ist nach der Figur:

$$x+360^0-356^0=314^0-180^0-x,$$
$$x+4^0=134^0-x,$$
$$2x=134^0-4^0=130^0,\quad x=65^0;$$

also nach der Figur für die centrische Nadel:

Nordspitze: $180^0+65^0=245^0$

Südspitze: $65^0$

ganz eben so wie wir oben nach unserer Regel gefunden haben.

$$n = n_1 + 180^0 + \varDelta, \quad n_1 = n - 180^0 - \varDelta$$

ist; so ist

$$\frac{n+n_1}{2} = n - 90^0 - \tfrac{1}{2}\varDelta,$$

und folglich:

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = n - 90^0 - \tfrac{1}{2}\varDelta \pm 90^0 = \begin{cases} n - \tfrac{1}{2}\varDelta \\ n - \tfrac{1}{2}\varDelta - 180^0 \end{cases},$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = n - 90^0 - \tfrac{1}{2}\varDelta \pm 270^0 = \begin{cases} n - \tfrac{1}{2}\varDelta + 180^0 \\ n - \tfrac{1}{2}\varDelta - 360^0 \end{cases}.$$

Wenn ferner zweitens

$$n - n_1 = -180^0 + \varDelta,$$

also

$$n = n_1 - 180^0 + \varDelta, \quad n_1 = n + 180^0 - \varDelta$$

ist; so ist

$$\frac{n+n_1}{2} = n_1 - 90^0 + \tfrac{1}{2}\varDelta,$$

und folglich:

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = n_1 - 90^0 + \tfrac{1}{2}\varDelta \pm 90^0 = \begin{cases} n_1 + \tfrac{1}{2}\varDelta \\ n_1 + \tfrac{1}{2}\varDelta - 180^0 \end{cases},$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = n_1 - 90^0 + \tfrac{1}{2}\varDelta \pm 270^0 = \begin{cases} n_1 + \tfrac{1}{2}\varDelta + 180^0 \\ n_1 + \tfrac{1}{2}\varDelta - 360^0 \end{cases}.$$

Weil nun, im Allgemeinen wenigstens oder meistens, im ersten Falle $n > 180^0$, $n < 360^0$, im zweiten Falle $n_1 > 180^0$, $n_1 < 360^0$ ist; so erhellet aus dem Vorstehenden leicht, dass es unter Voraussetzung einer sehr geringen Excentricität meistens genügen wird, für die Spitze der Nadel, an welcher die kleinste und die grösste Ablesung gemacht worden ist, respective

$$\frac{n+n_1}{2} - 90^0 \quad \text{und} \quad \frac{n+n_1}{2} + 90^0$$

zu setzen. Aber freilich ist diese Regel keineswegs theoretisch völlig genau und ganz allgemein gültig, so dass man natürlich immer besser thun wird, sich an die oben entwickelte theoretisch allgemein richtige und gültige Regel zu halten.

Zur Erläuterung dieser Regel mögen die folgenden Beispiele dienen:

1) . . . . . . . $n = 250\tfrac{7}{8}^0$, $n_1 = 71\tfrac{1}{8}^0$; also:

$$n + n_1 = 322^0, \quad \frac{n+n_1}{2} = 161^0;$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = 161^0 \pm \ 90^0 = \begin{cases} 251^0 \\ 71^0 \end{cases}$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = 161^0 \pm 270^0 = \begin{cases} 431^0 \\ -109^0 \end{cases};$$

folglich:

$$\text{Nordspitze:} \ \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 = 251^0$$

$$\text{Südspitze:} \ \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0 = \ 71^0.$$

2) . . . . . . . $n = 48\frac{3}{8}^0, \quad n_1 = 228\frac{3}{8}^0;$ also:

$$n + n_1 = 277\frac{1}{8}^0, \quad \frac{n+n_1}{2} = 138\frac{9}{16}^0;$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = 138\frac{9}{16}^0 \pm \ 90^0 = \begin{cases} 228\frac{9}{16}^0 \\ 48\frac{9}{16}^0 \end{cases}$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = 138\frac{9}{16}^0 \pm 270^0 = \begin{cases} 408\frac{9}{16}^0 \\ -131\frac{7}{16}^0 \end{cases};$$

folglich:

$$\text{Nordspitze:} \ \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0 = \ 48\frac{9}{16}^0$$

$$\text{Südspitze:} \ \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 = 228\frac{9}{16}^0.$$

3) . . . . . . . $n = 301\frac{4}{8}^0, \quad n_1 = 121\frac{5}{8}^0;$ also:

$$n + n_1 = 423^0, \quad \frac{n+n_1}{2} = 211\frac{4}{8}^0;$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = 211\frac{4}{8}^0 \pm \ 90^0 = \begin{cases} 301\frac{4}{8}^0 \\ 121\frac{4}{8}^0 \end{cases}$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = 211\frac{4}{8}^0 \pm 270^0 = \begin{cases} 481\frac{4}{8}^0 \\ -58\frac{4}{8}^0 \end{cases};$$

folglich:

$$\text{Nordspitze:} \ \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 = 301\frac{4}{8}^0$$

$$\text{Südspitze:} \ \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0 = 121\frac{4}{8}^0.$$

4) . . . . $n = 130\tfrac{1}{8}{}^0, \quad n_1 = 310^0;$ also:

$$n + n_1 = 440\tfrac{1}{8}{}^0, \quad \frac{n+n_1}{2} = 220\tfrac{1}{16}{}^0;$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 1.90^0 = 220\tfrac{1}{16}{}^0 \pm \;\, 90^0 = \begin{cases} 310\tfrac{1}{16}{}^0 \\ 130\tfrac{1}{16}{}^0, \end{cases}$$

$$\frac{n+n_1}{2} \pm 3.90^0 = 220\tfrac{1}{16}{}^0 \pm 270^0 = \begin{cases} 490\tfrac{1}{16}{}^0 \\ -49\tfrac{15}{16}{}^0; \end{cases}$$

folglich:

$$\text{Nordspitze:} \quad \frac{n+n_1}{2} - 1.90^0 = 130\tfrac{1}{16}{}^0,$$

$$\text{Südspitze:} \quad \frac{n+n_1}{2} + 1.90^0 = 310\tfrac{1}{16}{}^0.$$

In allen diesen Fällen, wo die Ablesungen wirklich an einer schon etwas alten und viel gebrauchten Boussole gemacht worden sind, ist also die obige Regel richtig.

---

## XXVI.

## Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes und Anwendung dieses Satzes in der Feldmesskunst.

Von

dem Herausgeber.

---

In einer und derselben Ebene seien

$$A,\ A_1,\ A_2 \text{ und } A',\ A_1',\ A_2'$$

zwei Systeme dreier in gerader Linie liegender Punkte Man ziehe die Geraden:

$$AA_1' \text{ und } A_1A',$$
$$A_1A_2' \;\; „ \;\; A_2A_1',$$
$$A_2A' \;\; „ \;\; AA_2'$$

**und bestimme die Durchschnittspunkte**

$$\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_1$$

**dieser drei Paare gerader Linien; so liegen diese drei Punkte jederzeit in einer und derselben Geraden.**

Man nehme die Gerade, in welcher die drei Punkte $A, A_1, A_2$ liegen, als die Axe der $x$ eines beliebigen Coordinatensystems der $xy$ an, und bezeichne in Bezug auf dieses System die Coordinaten der Punkte

$$A,\ A_1,\ A_2 \text{ und } A',\ A_1',\ A_2'$$

respective durch

$$a,\ 0;\ \ a_1,\ 0;\ \ a_2,\ 0 \text{ und } a',\ b';\ \ a_1',\ b_1';\ \ a_2',\ b_2'.$$

Dann sind die Gleichungen der Geraden:

$$\begin{array}{lcl} AA_1' & \text{und} & A_1A', \\ A_1A_2' & „ & A_2A_1', \\ A_2A' & „ & AA_2' \end{array}$$

respective:

$$y=\frac{b_1'}{a_1'-a}(x-a) \text{ und } y=\frac{b'}{a'-a_1}(x-a_1),$$

$$y=\frac{b_2'}{a_2'-a_1}(x-a_1) \quad „ \quad y=\frac{b_1'}{a_1'-a_2}(x-a_2),$$

$$y=\frac{b'}{a'-a_2}(x-a_2) \quad „ \quad y=\frac{b_2'}{a_2'-a}(x-a);$$

und bezeichnen wir also die Coordinaten der Durchschnittspunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ respective durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y};\ \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1;\ \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2$; so haben wir zu deren Bestimmung die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{y}=\frac{b_2'}{a_2'-a_1}(\mathfrak{x}-a_1), \quad \mathfrak{y}=\frac{b_1'}{a_1'-a_2}(\mathfrak{x}-a_2);$$

$$\mathfrak{y}_1=\frac{b'}{a'-a_2}(\mathfrak{x}_1-a_2), \quad \mathfrak{y}_1=\frac{b_2'}{a_2'-a}(\mathfrak{x}_1-a);$$

$$\mathfrak{y}_2=\frac{b_1'}{a_1'-a}(\mathfrak{x}_2-a), \quad \mathfrak{y}_2=\frac{b'}{a'-a_1}(\mathfrak{x}_2-a_1).$$

Wenn man diese Gleichungen, damit die Grössen $b', b_1', b_2'$ wegfallen, auf geeignete Weise durch einander dividirt, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}_1}=\frac{a_2'-a}{a_2'-a_1}\cdot\frac{\mathfrak{x}-a_1}{\mathfrak{x}_1-a},$$
$$\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{y}_2}=\frac{a'-a_1}{a'-a_2}\cdot\frac{\mathfrak{x}_1-a_2}{\mathfrak{x}_2-a_1},$$
$$\frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}}=\frac{a_1'-a_2}{a_1'-a}\cdot\frac{\mathfrak{x}_2-a}{\mathfrak{x}-a_2};$$

oder:

$$(a_2'-a_1)(\mathfrak{x}_1-a)\mathfrak{y}=(a_2'-a)(\mathfrak{x}-a_1)\mathfrak{y}_1,$$
$$(a'-a_2)(\mathfrak{x}_2-a_1)\mathfrak{y}_1=(a'-a_1)(\mathfrak{x}_1-a_2)\mathfrak{y}_2,$$
$$(a_1'-a)(\mathfrak{x}-a_2)\mathfrak{y}_2=(a_1'-a_2)(\mathfrak{x}_2-a)\mathfrak{y};$$

oder wie sich hieraus leicht ergiebt:

1)

$$a_2'\{(\mathfrak{x}-a_1)\mathfrak{y}_1-(\mathfrak{x}_1-a)\mathfrak{y}\}=aa_1(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)+a\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1-a_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y},$$
$$a'\{(\mathfrak{x}_1-a_2)\mathfrak{y}_2-(\mathfrak{x}_2-a_1)\mathfrak{y}_1\}=a_1a_2(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)+a_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2-a_2\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1,$$
$$a_1'\{(\mathfrak{x}_2-a)\mathfrak{y}-(\mathfrak{x}-a_2)\mathfrak{y}_2\}=a_2a(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y})+a_2\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}-a\mathfrak{x}\mathfrak{y}_2.$$

Ferner hat man nach dem Obigen die Gleichungen:

$$(a_2'-a_1)\mathfrak{y}=b_2'(\mathfrak{x}-a_1),\quad (a_1'-a_2)\mathfrak{y}=b_1'(\mathfrak{x}-a_2);$$
$$(a'-a_2)\mathfrak{y}_1=b'(\mathfrak{x}_1-a_2),\quad (a_2'-a)\mathfrak{y}_1=b_2'(\mathfrak{x}_1-a);$$
$$(a_1'-a)\mathfrak{y}_2=b_1'(\mathfrak{x}_2-a),\quad (a'-a_1)\mathfrak{y}_2=b'(\mathfrak{x}_2-a_1);$$

also:

$$(a_2'-a_1)\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1=b_2'(\mathfrak{x}-a_1)\mathfrak{y}_1,\quad (a_1'-a_2)\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}=b_1'(\mathfrak{x}-a_2)\mathfrak{y}_2;$$
$$(a'-a_2)\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2=b'(\mathfrak{x}_1-a_2)\mathfrak{y}_2,\quad (a_2'-a)\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1=b_2'(\mathfrak{x}_1-a)\mathfrak{y};$$
$$(a_1'-a)\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}=b_1'(\mathfrak{x}_2-a)\mathfrak{y},\quad (a'-a_1)\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2=b'(\mathfrak{x}_2-a_1)\mathfrak{y}_1;$$

und verbindet man nun diese Gleichungen, damit $a'$, $a_1'$, $a_2'$ wegfallen, auf geeignete Weise durch Subtraction mit einander; so erhält man:

2)

$$(a-a_1)\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1=b_2'\{(\mathfrak{x}-a_1)\mathfrak{y}_1-(\mathfrak{x}_1-a)\mathfrak{y}\},$$
$$(a_1-a_2)\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2=b'\{(\mathfrak{x}_1-a_2)\mathfrak{y}_2-(\mathfrak{x}_2-a_1)\mathfrak{y}_1\},$$
$$(a_2-a)\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}=b_1'\{(\mathfrak{x}_2-a)\mathfrak{y}-(\mathfrak{x}-a_2)\mathfrak{y}_2\}.$$

Wenn nun die Gerade, in welcher die Punkte $A'$, $A_1'$, $A_2'$ liegen, der Geraden, in welcher die Punkte $A$, $A_1$, $A_2$ liegen,

die als Axe der $x$ angenommen worden ist, nicht parallel ist, so kann man die erstere Gerade als Axe der $y$ annehmen, wo dann offenbar

$$a'=0,\quad a_1'=0,\quad a_2'=0$$

ist, und die Gleichungen 1) also in die folgenden übergehen:

$$\begin{aligned} aa_1(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)+a\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1-a_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y} &=0,\\ a_1a_2(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)+a_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2-a_2\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1 &=0,\\ a_2a(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y})+a_2\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}-a\mathfrak{x}\mathfrak{y}_2 &=0 \end{aligned}$$

oder, wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$a_2\mathfrak{x}_2,\quad a\mathfrak{x},\quad a_1\mathfrak{x}_1$$

multiplicirt, in die folgenden:

$$\begin{aligned} aa_1a_2(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\mathfrak{x}_2+a_2a\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1-a_1a_2\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y} &=0,\\ aa_1a_2(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)\mathfrak{x}+aa_1\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2-a_2a\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1 &=0,\\ aa_1a_2(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y})\mathfrak{x}_1+a_1a_2\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}-aa_1\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2 &=0; \end{aligned}$$

aus denen sich durch Addition die Gleichung:

$$3)\quad .\;.\;.\quad \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)+\mathfrak{x}_1(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y})+\mathfrak{x}_2(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)=0$$

ergiebt.

Wenn die Gerade, in welcher die Punkte $A'$, $A_1'$, $A_2'$ liegen, der Geraden, in welcher die Punkte $A$, $A_1$, $A_2$ liegen, die als Axe der $x$ angenommen worden ist, parallel ist, so sind die Coordinaten $b'$, $b_1'$, $b_2'$ einander gleich, und die Gleichungen 2) nehmen also die folgende Form an:

$$\begin{aligned} (a-a_1)\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 &= b'\{(\mathfrak{x}-a_1)\mathfrak{y}_1-(\mathfrak{x}_1-a)\mathfrak{y}\},\\ (a_1-a_2)\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2 &= b'\{(\mathfrak{x}_1-a_2)\mathfrak{y}_2-(\mathfrak{x}_2-a_1)\mathfrak{y}_1\},\\ (a_2-a)\mathfrak{y}_2\mathfrak{y} &= b'\{(\mathfrak{x}_2-a)\mathfrak{y}-(\mathfrak{x}-a_2)\mathfrak{y}_2\}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_1$ und addirt sie dann zu einander, so erhält man offenbar die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\{(\mathfrak{x}-a_1)\mathfrak{y}_1-(\mathfrak{x}_1-a)\mathfrak{y}\}\mathfrak{y}_2\\ +&\{(\mathfrak{x}_1-a_2)\mathfrak{y}_2-(\mathfrak{x}_2-a_1)\mathfrak{y}_1\}\mathfrak{y}\\ +&\{(\mathfrak{x}_2-a)\mathfrak{y}-(\mathfrak{x}-a_2)\mathfrak{y}_2\}\mathfrak{y}_1 \end{aligned}\right\}=0,$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$(a-a_1)\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1+(a_1-a_2)\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2+(a_2-a)\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}=0,$$

so dass also nach dem Obigen offenbar auch

$$\left.\begin{array}{l} \{(\mathfrak{x}-a_1)\mathfrak{y}_1-(\mathfrak{x}_1-a)\mathfrak{y}\} \\ +\{(\mathfrak{x}_1-a_2)\mathfrak{y}_2-(\mathfrak{x}_2-a_1)\mathfrak{y}_1\} \\ +\{(\mathfrak{x}_2-a)\mathfrak{y}-(\mathfrak{x}-a_2)\mathfrak{y}_2\} \end{array}\right\}=0,$$

folglich:

3*) . . . $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)+\mathfrak{x}_1(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y})+\mathfrak{x}_2(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)=0$

ist.

Nach 3) und 3*) ist also in beiden hier betrachteten Fällen:

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)+\mathfrak{x}_1(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y})+\mathfrak{x}_2(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)=0,$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die drei Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$, $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$, $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2)$ oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ in einer und derselben Geraden liegen, welches der zu beweisende Satz war.

Zur Erläuterung dieses Satzes dienen Taf. IV. Fig. 4. und Taf. IV. Fig. 5., die aber natürlich nur ein Paar besondere Fälle desselben darstellen.

Man kann von diesem Satze die folgende Anwendung machen. Auf dem Felde seien zwei Punkte $A'$ und $A_1'$ (Taf. IV. Fig. 6.) gegeben, und entweder in der diese beiden Punkte mit einander verbindenden Geraden oder in der einen Verlängerung dieser Verbindungslinie über den Punkt $A_1'$ hinaus befinde sich ein Hinderniss, welches nicht gestattet, von $A$ nach $A_1'$ oder über $A_1'$ hinaus zu sehen; man soll Punkte in der Verlängerung von $A'A_1'$ über $A_1'$ hinaus angeben. Zu dem Ende nehme man auf dem Terrain drei in gerader Linie liegende Punkte $A$, $A_1$, $A_2$ an, ziehe die Linien $AA_1'$ und $A_1A'$ und bestimme deren Durchschnittspunkt $\mathfrak{A}_2$; hierauf ziehe man die Linien $A_2A'$ und $A_2A_1'$, lege durch den Punkt $\mathfrak{A}_2$ eine beliebige Gerade und bestimme deren Durchschnittspunkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$ mit den Linien $A_2A'$ und $A_2A_1'$; endlich ziehe man die Linien $A\mathfrak{A}_1$ und $A_1\mathfrak{A}$, und bestimme deren Durchschnittspunkt $A_2'$; so wird dieser Punkt in der Verlängerung der Linie $A'A_1'$ über $A_1'$ hinaus liegen, also der Bedingung der Aufgabe genügen. Dass dieses Verfahren mancherlei Abänderungen gestattet, auch sich wohl noch andere Anwendungen von dem obigen geometrischen Satze machen lassen dürften, erhellet leicht; an diesem Orte werden aber die vorhergehenden Bemerkungen genügen.

---

# XXVII.

## Miscellen.

---

### Einige Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Oberlehrer J. Helmes im Archiv Theil XXXV. Seite 136.: Ueber die Bedeutung und Gültigkeit einer gebrochenen Gliederzahl in arithmetischen und geometrischen Reihen.

Von Herrn Oberlehrer J. F. W. Gronau an der Realschule erster Ordnung zu St. Johann in Danzig.

Indem Herr Helmes einen Fehler verbessert, welchen Herr Dr. Hechel in Riga bei Behandlung obigen Themas gemacht hat, entschlüpfen auch ihm einige Behauptungen, welche einer Erörterung bedürfen.

I. Zunächst spricht er wiederholentlich sich dahin aus, dass die Summenformeln ($s$) und die Formeln für das allgemeine Glied ($t$) nur deshalb auch für eine gebrochene Gliederzahl ($n$) gelten, weil und insofern bei den arithmetischen und geometrischen Reihen die nach irgend einem Bruche $\left(\frac{1}{q}\right)$ „zerlegten" Reihen dieselbe Gesetzmässigkeit befolgen, wie die entsprechenden Hauptreihen; ja er lässt sich in dieser Beziehung pag. 140. bei einer dem Wesen nach schon von Vega gestellten Aufgabe vom Diamanten (Vorles. I. 378.) sogar zu folgendem tautologischen Satze hinreissen: „Setzen wir voraus, dass die Steigerung des Preises durch das Gewicht nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe auch auf Viertel des Karats sich erstrecke, so werden auch die Preise der auf einander folgenden Viertel des Karats eine geometrische Reihe bilden."

Herr Helmes scheint also der Ansicht zu sein, dass, wenn die zerlegten Reihen nicht die Beschaffenheit der Hauptreihen

beibehalten, die Gültigkeit der beiden Formeln für ein gebrochenes $n$ aufhört.

Dem ist aber nicht so, wie aus meiner Schrift vom Jahre 1845: „Ueber die Anzahl der Glieder in den Summenformeln der arithmetischen, geometrischen und harmonischen Progressionen", worin ich nachweise, dass die Formeln nicht bloss eine gebrochene, sondern auch eine negative und imaginäre Gliederzahl zulassen, zu ersehen ist.

Dort habe ich nämlich pag. 56.—64. gezeigt, dass, obgleich die harmonischen Reihen sich nicht in der Art zerlegen lassen, dass die zerlegten Reihen wieder harmonische Reihen bilden, dennoch die beiden Formeln für ein gebrochenes $n$ ihre volle Geltung behalten. — Mag man also immerhin bei den arithmetischen und geometrischen Reihen sich der hier allerdings stattfindenden Zerlegbarkeit in conforme Nebenreihen bedienen, um die Gültigkeit der Formeln für ein gebrochenes $n$ recht klar vor Augen zu legen; man muss aber nicht so weit gehen, dass man diese Gültigkeit von der Möglichkeit einer solchen Zerlegung abhängig macht. Deshalb habe ich in meiner Schrift pag. 25. auch für die arithmetische und geometrische Reihe noch einen andern Beweis gegeben, der sich nicht auf die Zerlegbarkeit in gleichartige Nebenreihen stützt.

II. Ferner behauptet Herr Helmes pag. 156., dass die Aufgabe aus Heis Sammlung: „Wenn ein senkrecht in die Höhe steigender Körper in der ersten Sekunde $a=1000$ Fuss, in jeder folgenden aber $d=31\frac{1}{4}$ Fuss weniger als in der vorhergehenden zurücklegt, wie lange ($n$) und wie hoch ($s$) wird der Körper steigen und nach wie viel Sekunden wieder an dem Punkte anlangen, von dem er zu steigen anfing?" aus den Lehren der Progression allein nicht zu lösen sei, sondern man müsse zu dem Ende aus der Physik, welche uns über die Natur der gleichförmig verzögerten Bewegung beim Steigen der Körper Aufschluss giebt, noch entlehnen, dass das letzte Glied der hier in Betracht kommenden Reihe $t=15\frac{5}{8}=\frac{1}{2}d$ sei, was dann erst $n=32\frac{1}{2}$ ergebe. Wer, giebt er zu verstehen, mit Heis u. A. die Resultate durch Mathematik allein ableiten wolle, erhalte $t=31\frac{1}{4}=d$ oder gar $t=0$, und dem zu Folge $n=32$ oder 33.

Um Herrn Helmes in diesem Punkte zu widerlegen, dürfte ich nur auf meine Abhandlung: „Ueber die allgemeine und volle Gültigkeit mathematischer Formeln, 1857" pag. 10. verweisen. Indessen lässt sich die Sache ohne Weiteres auch hier mit wenig Worten abmachen. Man differenzire nämlich die Formel

$$s = an - \frac{n.n-1}{2} d$$

nach $n$, so findet man auch ohne Hilfe der Physik, dass für den Fall des Maximums

$$n = \frac{a}{d} + \tfrac{1}{2} = 32\tfrac{1}{2} \text{ und folglich } t = a - (n-1)d = \frac{d}{2}$$

$$\text{und } s = \frac{(2a+d)^2}{8d} = 16503\frac{29}{32}$$

ist. Oder, wenn es nicht angemessen sein sollte, bei einer elementaren Aufgabe Differentialrechnung anzuwenden, so darf man ja nur die obige Gleichung für $s$ nach $n$ auflösen; aus

$$n = \frac{2a+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2a+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}}$$

würden sich dann, wenn $s$ möglichst gross werden soll, nach einander für $s$, $n$ und $t$ dieselben Werthe ergeben, wie vorhin.

---

Von dem Herausgeber.

Die Gleichung der Fläche des dreiaxigen Ellipsoids oder, wie man wohl auch in der Kürze bloss zu sagen pflegt, des dreiaxigen Ellipsoids, ist bekanntlich:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Setzt man in dieser Gleichung $z=0$, so erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

des Durchschnitts des Ellipsoids mit der Ebene der $xy$, welcher also eine Ellipse ist, deren Axen die Axen der $x$ und $y$, und deren der Grösse nach bestimmte beide Halbaxen $a$ und $b$ sind. Legen wir jetzt durch den Punkt $(xyz)$ des Ellipsoids und die Axe der $z$ eine Ebene, so schneidet diese Ebene die in Rede stehende Ellipse in einem ihrer Durchmesser, dessen Gleichung, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die veränderlichen Coordinaten bezeichnen, offenbar

$$\mathfrak{y} = \frac{y}{x}\mathfrak{x}$$

ist; und bezeichnen nun $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieses Durchmessers mit der Ellipse in der Ebene der $xy$, so hat man zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\mathfrak{y}=\frac{y}{x}\mathfrak{x},\quad \left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2=1;$$

woraus mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander sehr leicht:

$$\mathfrak{x}=\pm\frac{abx}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}},\quad \mathfrak{y}=\pm\frac{aby}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}$$

erhalten wird. Weil nun, wenn $r_x$ die Hälfte des in Rede stehenden Durchmessers bezeichnet,

$$r_x^2=\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2$$

ist, so ist nach den vorstehenden Formeln:

$$r_x^2=\frac{a^2b^2(x^2+y^2)}{b^2x^2+a^2y^2}$$

oder

$$r_x=\frac{ab\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}},$$

also

$$b^2x^2+a^2y^2=\frac{a^2b^2(x^2+y^2)}{r_x^2},$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r_x^2},$$

und folglich, weil

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

ist:

$$\frac{x^2+y^2}{r_x^2}+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

oder, wenn wir

$$u^2=x^2+y^2$$

setzen:

$$\left(\frac{u}{r_x}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

welches wieder die Gleichung einer Ellipse ist. Legt man also durch den Punkt $(xyz)$ des Ellipsoids und die Axe der $z$ eine Ebene, so ist deren Durchschnitt mit dem Ellipsoid jederzeit eine Ellipse, deren Axen der Durchmesser der in der Ebene der $xy$ liegenden Ellipse, in welchem dieselbe von der durch den Punkt $(xyz)$ und die Axe der $z$ gelegten Ebene geschnitten wird, und die Axe der $z$ sind; die der Grösse nach bestimmten beiden Halb-

axen dieser Ellipse sind die Hälfte des in Rede stehenden Durchmessers der in der Ebene der $xy$ liegenden Ellipse und die Grösse $c$.

Auf diese Weise machen sich Anfänger, wie mir scheint, am Besten und Einfachsten eine deutliche Vorstellung von der Gestalt des dreiaxigen Ellipsoids, und übersehen dann auch ferner auf der Stelle, dass dasselbe in das Rotations-Ellipsoid übergeht, wenn für $a=b$ die in der Ebene der $xy$ liegende Ellipse ein Kreis wird, und dass weiter das Rotations-Ellipsoid für $a=b=c$ in die Kugel übergeht. Aehnliche einfache Betrachtungen lassen sich natürlich auch bei den übrigen Flächen des zweiten Grades anstellen.

---

## Geometrischer Beweis der Formel für die Vereinigungsweite bei convexen Spiegeln.

Von Herrn Schulrath Looff in Gotha.

Gewöhnlich wird die Formel für die Vereinigungsweite der Lichtstrahlen beim convexen Spiegel aus der für den concaven Spiegel:

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{r}-\frac{1}{\alpha}$$

abgeleitet, indem man $r$ negativ nimmt, wodurch

$$\frac{1}{x}=-\frac{2}{r}-\frac{1}{\alpha}=-\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

wird, d. h. die negative reciproke Vereinigungsweite $=\frac{2}{r}+\frac{1}{\alpha}$. Der geometrische Beweis dafür ist folgender: Bezeichnet $a$ (Taf. III. Fig. 12.) den leuchtenden Punkt in der Axe, $c$ den geometrischen Mittelpunkt des Spiegels, $f$ den Vereinigungspunkt des reflectirten, rückwärts verlängerten Strahles mit der Axe, so ist $\angle mdc=\angle cdf$. Halbirt man noch den Winkel $fda$, so ist in dem gleichnamigen Dreieck dieser Winkel und sein Nebenwinkel halbirt, folglich $ac$ harmonisch getheilt. Es ist daher

$$fg:ag=cf:ac,$$
$$fg:ag=fd:ad,$$
$$cf:ac=fd:ad, \text{ oder } cf.ad=ac.fd.$$

Ist $ab=ad=\alpha$, $cd=cb=r$, $fd=fb$ (für ein kleines Segment) $=x$, so ist $(r-x)\alpha=(r+\alpha)x$ oder:

$$x=\frac{r\alpha}{2\alpha+r},\quad \frac{1}{x}=\frac{2}{r}+\frac{1}{\alpha}.$$

---

Von dem Herausgeber.

Wenn man bei Flächenmessungen den Inhalt eines Dreiecks zu ermitteln hat, bestimmt man bekanntlich mittelst der Kreuzscheibe oder des Winkelkreuzes seine Höhe in Bezug auf eine Seite als Grundlinie, misst mit der Messkette Grundlinie und Höhe und berechnet den Inhalt auf allgemein bekannte Weise. Wenn man aber keine Kreuzscheibe zur Hand hat, sondern bloss Kette und Baken, so könnte man alle drei Seiten mit der Kette messen und daraus den Inhalt nach der betreffenden bekannten Formel berechnen. Dazu ist aber eine Quadratwurzel-Ausziehung nöthig oder die Rechnung mit Logarithmen, Rechnungen, welche nicht Jedermanns, namentlich oft nicht derer Sache sind, die am meisten solche einfache Messungen auszuführen haben. Wenn daher auch die eben erwähnten Methoden jedenfalls die besten sind, so scheint doch in manchen Fällen der Praxis eine andere, bloss den Gebrauch von Kette und Stäben in Anspruch nehmende Methode wünschenswerth zu sein, weshalb ich das folgende, mir zweckmässig scheinende Verfahren hier angeben will.

Wenn $ABC$ in Taf. III. Fig. 11. das Dreieck ist, dessen Inhalt bestimmt werden soll, so messe man mit der Kette zwei Seiten $AB$ und $AC$ desselben, trage die eine, etwa (jedoch nicht nothwendig) die kleinere $AC$ auf der grösseren $AB$ in $AD$ ab, so dass man nämlich mit der Messkette $AD$ eben so viele Ruthen, Fusse und Zolle wie $AC$ lang macht, messe $CD$, nehme von $CD$ die Hälfte und suche den Mittelpunkt $E$ von $CD$, worauf man dann noch $AE$ misst, welche Operationen alle bloss mit der Kette und Stäben rasch und leicht ausgeführt werden können. Bezeichnet dann $\varDelta$ den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$, so hat man zu dessen Bestimmung die sehr einfache Formel:

$$\varDelta = \frac{AB.CD.AE}{2.AC},$$

welche auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Es ist, wenn $A$ den Winkel $BAC$ bezeichnet:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}.AB.AC.\sin A.$$

Ferner ist

$$\triangle ACD = \tfrac{1}{2}.AC.AC.\sin A,$$

$$\triangle ACD = \tfrac{1}{2}.CD.AE;$$

also:

$$\sin A = \frac{CD.AE}{AC.AC},$$

folglich, wenn man dies in den vorhergehenden Ausdruck von $\varDelta$ einführt und dabei $AC$ aufhebt:

$$\varDelta = \frac{AB.CD.AE}{2.AC},$$

wie bewiesen werden sollte.

Freilich hat man hier mehr gemessen, als man eigentlich braucht, weil ja

$$\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 \quad \text{oder} \quad \overline{AE}^2 + \tfrac{1}{4}.\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$$

ist, was aber in der Praxis nicht anders angeht, wenn man gewisse weitläufigere Rechnungen vermeiden will.

---

## Zur Beachtung.

Herr Doctor O. Böklen hat mir unter dem 2. Januar 1862 (eingegangen bei mir am 19. Januar) eine neue Redaction respect. Umarbeitung der in Thl. XXXVI. S. 186. mitgetheilten Sätze über Dreiecke, welche den ein- und umbeschriebenen Kreis gemein haben, eingesandt, weil sich bei der früheren Bearbeitung ein Irrthum eingeschlichen hatte, der auf der Voraussetzung beruhte, dass bei den fraglichen Dreiecken der Umfang constant sei, was sich später als nicht richtig erwies. Da ich bei'm Eingang dieser neuen Bearbeitung dieses Heft und diesen Band zu schliessen im Begriff bin, und den Aufsatz daher, wie es in diesem Falle eigentlich sofort geschehen sollte, nicht mehr aufnehmen kann, sondern bis zum nächsten Hefte liegen lassen muss; so halte ich mich für verpflichtet, dies hier wenigstens vorläufig zu bemerken, und zwar um so lieber, weil ich, wie ich auch schon a. a. O. bemerkt habe, die in Rede stehenden Sätze allerdings für lehrreich und interessant halte, vollständige Berichtigung derselben daher sehr zu wünschen ist.

Den 19. Januar 1862. Der Herausgeber.

---

## Druckfehler.

In dem auf pag. 384. des 36sten Bandes abgedruckten Verzeichnisse der bisher aufgefundenen Druckfehler in Schrön's Logarithmen findet sich ein Fehler. Es muss nämlich nicht heissen: „statt 8150613 lies 8150613", sondern „statt 8150613 lies 8150613."

Im Literar. Berichte Nr. CXLII. S. 5. muss es in dem Artikel Astronomie (Z. 11.) statt „Rescript vom 14. Juli 1860" heissen: „Rescript vom 14. Juni 1860."

---

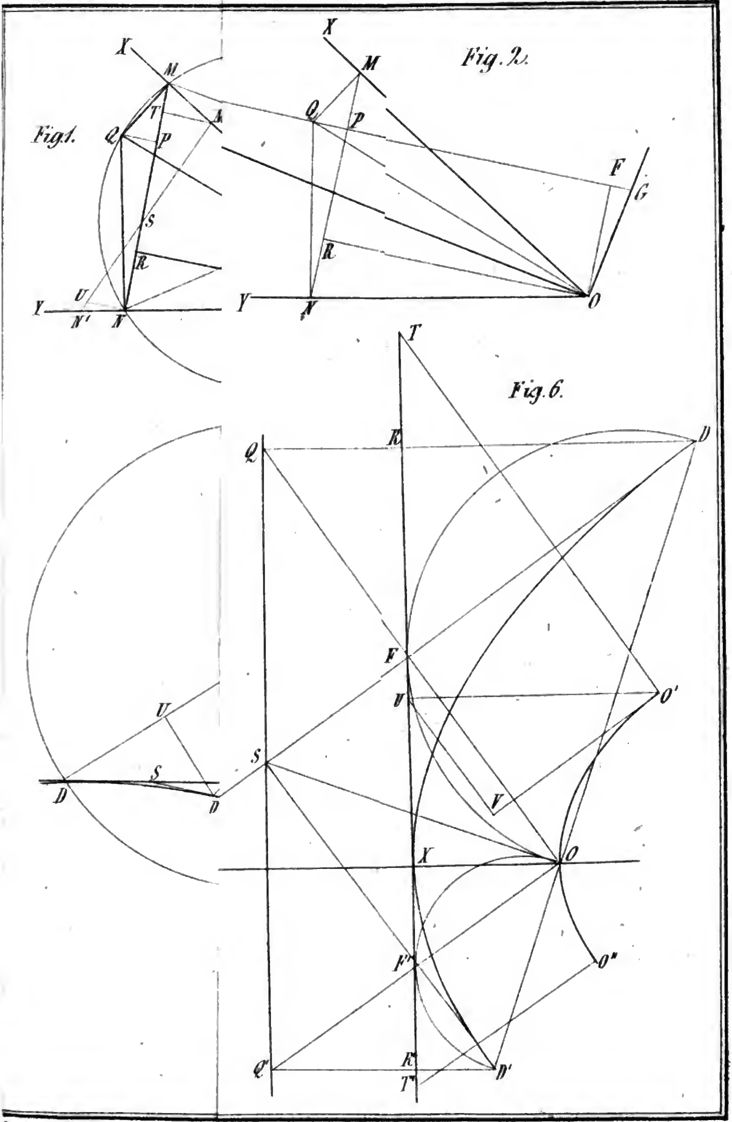

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 6.

Fig. 8. Die Curve C
verlängerte Hypoc
Curven beruht da

9.

Der Punkt A beschreibt den Quadranten $A\,\gamma'\gamma\,V$ der verlängerten Hypocycloide, wenn Kreis C rollt; er beschreibt den Quadranten $A\,\pi'\pi\,E$ der Ellipse, wenn Kreis O im doppelt so grossen Kreise S rollt, $\gamma P$ und $\gamma' P'$ sind Normalen der Hypocycloide.

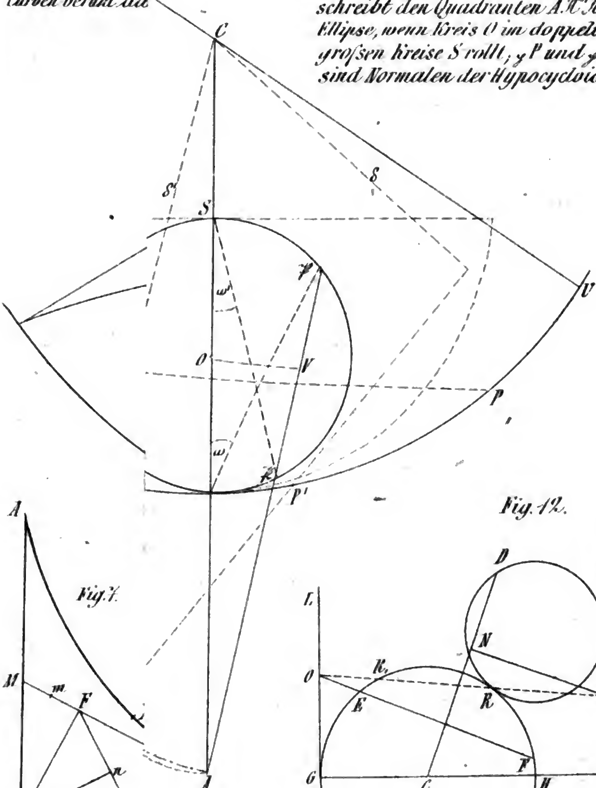



Fig. 7.

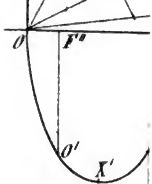
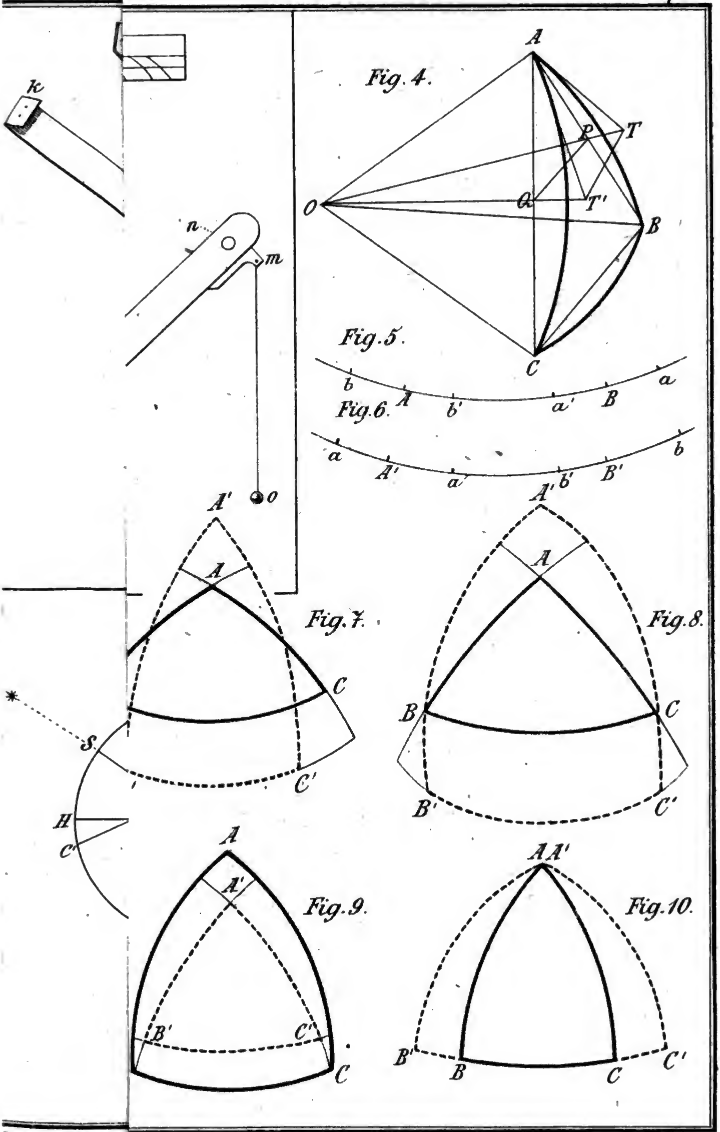



Fig. 12.




Fig. 4.
A
P
T
Q
T'
O
B
C
Fig. 5.
b
A
b'
a'
B
a
Fig. 6.
a
A'
a'
b'
B'
b
k
n
m
o
Fig. 7.
A'
A
C
S
C'
H
C'
Fig. 8.
A'
A
B
C
B'
C'
Fig. 9.
A
A'
B'
C'
C
Fig. 10.
A A'
B'
B
C
C'



Boussole.

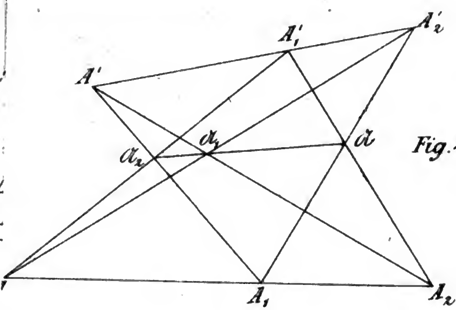



Fig. 4.

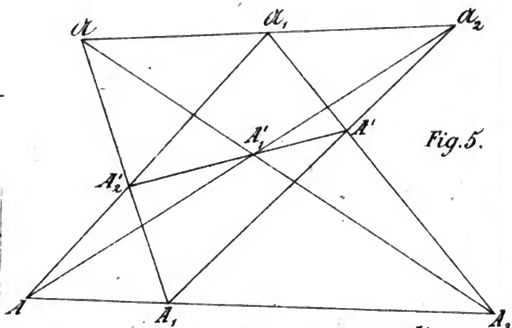



Fig. 5.

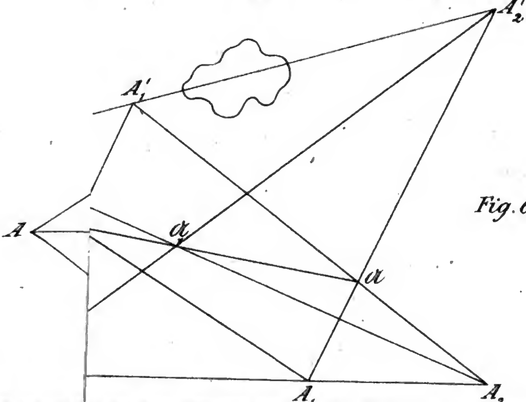



Fig. 6.

# Literarischer Bericht
## CXLV.

---

### Arithmetik.

**La Division réduite à une Addition, ouvrage approuvé par l'Académie des sciences de Paris, Institut de France, augmenté d'une Table de Logarithmes de nombres à neuf décimales exactes, renfermées en deux pages, et d'une nouvelle méthode pour calculer avec une grande facilité les Tables de Logarithmes, de division et plusieurs autres, par R. Picarte, membre de la faculté des sciences physiques et mathématiques de l'université du Chili. Paris. 1860. 4°. Prix: 13 fr. broché; 15 fr. cartonné. (Klein Folio.)**

Dieses grosse Werk, über welches die Herren Mathieu, Hermite und Bienaymé der Pariser Akademie der Wissenschaften einen sehr günstigen Rapport erstattet haben, verdient eine ausführlichere Anzeige in diesen literarischen Berichten. Dasselbe besteht aus drei Theilen, unter denen die 92 Seiten umfassende Divisions-Tafel unter dem Titel: La Division réduite à une Addition bei Weitem der wichtigste und umfangreichste ist. Diese Tafel enthält in eilf und zehn Decimalen die Werthe aller Brüche, deren Zähler die Zahlen 1, 2, 3, 4, .... 9 sind und deren Nenner kleiner als 10000 ist. Die Zähler auf jeder Seite oben in horizontaler Reihe von 1 bis 9, die Nenner zur Linken in vertikaler Reihe von 1000 bis 9999 bilden die beiden Eingänge oder Argumente der Tafel. Der Gebrauch ist hiernach im Allgemeinen sehr einfach. Handelt es sich, um ein Beispiel zu geben, welches ich nicht aus der Einleitung der Tafeln entnehme, um die Verwandlung des Bruchs

$$\frac{978542}{5627},$$

in einen Decimalbruch, so schlage ich unter den vertikalen Argumenten den Nenner 5627 auf, und finde in der neben diesem Nenner stehenden Horizontalreihe für die horizontalen Argumente

9, 7, 8, 5, 4, 2

die folgenden Zahlen:

15994313133
12440021326
14217167229
08885729518
07108583615
03554291807

Um bei dem Ausschreiben dieser Zahlen sich nicht zu irren, ist in sehr zweckmässiger Weise den Tafeln eine kleine Regel oder ein kleines Lineal von grünem Kartenpapier beigegeben, auf welchem die Zahlen 1, 2, 3, 4, .... 9 stehen, und welches bei'm Ausschreiben der obigen Zahlen unter die dem Nenner 5627 entsprechende Horizontalreihe gelegt wird, in der sich dieselben sämmtlich finden. Alle obigen Zahlen enthalten eilf Ziffern, weil der Nenner unter 9000 ist; für Nenner über 9000 bis 9999 enthalten die in den Tafeln sich findenden Zahlen nur zehn Ziffern. Die obigen sechs eilfziffrigen Zahlen, so wie dieselben sich in den Tafeln finden, sind nun (überall bei eilfziffrigen Zahlen) die Mantissen der den Brüchen

$$\frac{9}{5627},\quad \frac{7}{5627},\quad \frac{8}{5627},\quad \frac{5}{5627},\quad \frac{4}{5627},\quad \frac{2}{5627}$$

gleichen Decimalbrüche von der dritten Decimalstelle oder der dritten Stelle hinter dem Komma angefangen, indem bei allen diesen Brüchen die beiden ersten Stellen hinter dem Komma Nullen sind. Beachtet man dies, denkt sich

$$\frac{978542}{5627}$$

$$=\frac{900000}{5627}+\frac{70000}{5627}+\frac{8000}{5627}+\frac{500}{5627}+\frac{40}{5627}+\frac{2}{5627}$$

gesetzt, und verlangt nun den in einen Decimalbruch verwandelten Bruch

$$\frac{978542}{5627}$$

bis auf sieben Decimalstellen; so wird auf der Stelle erhellen, dass man die obigen sechs eilfziffrigen Zahlen aus den Tafeln auf folgende Art ausschreiben und dann zu einander addiren muss:

$$\begin{array}{r}
159,9431313 \\
12,4400213 \\
1,4217167 \\
0,0888573 \\
0,0071086 \\
0,0003554 \\
\hline
173,9011906
\end{array}$$

oder kürzer:

$$\begin{array}{r}
159,9431313 \\
12\ 4400213 \\
1\ 4217167 \\
0888573 \\
071086 \\
03554 \\
\hline
173,9011906
\end{array}$$

Wenn der Nenner grösser als 9000 ist, so liefern die Tafeln die Mantissen der Decimalbrüche, weil hier die drei ersten Ziffern hinter dem Komma Nullen sind, von der vierten Decimalstelle oder der vierten Stelle hinter dem Komma angefangen, so dass, wenn etwa der Bruch

$$\frac{678}{9849}$$

in einen Decimalbruch bis auf sieben Decimalziffern verwandelt werden sollte, die Rechnung folgende Gestalt annehmen würde:

$$\begin{array}{r}
0,0609199 \\
71073 \\
8123 \\
\hline
0,0688395
\end{array}$$

Die wirkliche Division liefert

$$0,06883947$$

also bis zur siebenten Decimalstelle abgekürzt:

0,0688395

ganz übereinstimmend mit den Tafeln. Die vollständigen Zahlen, welche die Tafel in diesem Falle liefert, sind:

6091989034
7107320540
8122652046.

Wenn der Nenner kleiner ist als 1000, so fällt auf der Stelle in die Augen, wie man sich zu verhalten hat. Wäre z. B. der Bruch

$$\frac{5732}{376}$$

in einen Decimalbruch bis zur siebenten Decimalstelle zu verwandeln, so bedenke man, dass

$$\frac{5732}{376}=\frac{5732}{3760}.10$$

ist, und hat dann, da die Tafeln für $\frac{5732}{3760}$ die vollständigen Zahlen

13297872340
18617021277
07978723404
05319148936

liefern, offenbar den folgenden, natürlich sogleich in dieser Weise unmittelbar aus den Tafeln auszuschreibenden Ansatz:

$$\begin{array}{r} 13,2978723 \\ 1\;8617021 \\ 0797872 \\ 053191 \\ \hline 15,2446807 \end{array}$$

Wenn man

$$\frac{5732}{376}=\frac{1433}{94}$$

setzt, was bei der Rechnung nach den Tafeln hier absichtlich nicht geschehen ist, so liefert die wirkliche Division:

15,2446808

Wenn der Nenner oder Divisor grösser als 10000 ist und

daher die Gränze der Tafeln übersteigt, so kann man sich natürlich nur mit Näherungen helfen, wobei man sich verschiedener Methoden bedienen kann. Herr **Picarte** giebt das folgende einfache, von ihm zugleich mehrfach durch Beispiele erläuterte Verfahren an, mit dem man auch gewöhnlich ausreichen wird. Es ist nämlich

$$\frac{a}{b+n}=\frac{a}{b}-\frac{n}{b+n}\cdot\frac{a}{b}$$

oder, wenn $\frac{a}{b}=c$ gesetzt wird:

$$\frac{a}{b+n}=c-\frac{nc}{b+n},$$

wo $\frac{nc}{b+n}$ meistens eine nur sehr kleine Correction des Werthes $c$ ist. Wäre z. B. der Bruch

$$\frac{674}{513922}$$

in einen Decimalbruch zu verwandeln, so hätte man

$$a=674,\quad b=513900,\quad n=22$$

zu setzen, wo dann

$$c=\frac{674}{513900},$$

und folglich nach obiger Formel:

$$\frac{674}{513922}=\frac{674}{513900}-\frac{22}{513922}\cdot\frac{674}{513900}$$

ist; man wird also

$$c=\frac{674}{513900}$$

mittelst der Tafel und dann die Correction

$$\frac{22.c}{513922},$$

die immer nur sehr klein sein wird, durch wirkliche Division, oder auch bloss den annährend für diese Correction zu setzenden Bruch

$$\frac{22.c}{513900}$$

mittelst der Tafel berechnen, was häufig hinreichend sein wird.

Verlangen wir obigen Bruch bis auf acht Decimalstellen, so liefert uns die Tafel für den Nenner 5139 mit dem Zähler 674 die folgenden vollständigen Zahlen:

$$\begin{array}{c} 11675423234 \\ 13621327106 \\ 07783615489 \end{array}$$

also, weil wir acht Decimalstellen verlangen:

$$c = \left\{ \begin{array}{r} 0{,}00116754 \\ 13621 \\ 0778 \\ \hline 0{,}00131153 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rr|r|l} & & 22 & \\ \cline{3-3} & & 262306 & \\ & & 262306 & \\ \cline{3-3} 513922 & & 0{,}02885366 & 0{,}000000056 \\ & & 2569610 & \\ \cline{3-3} & & 3157560 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}00131153 \\ -0{,}00000006 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{674}{513922} = 0{,}00131147$$

Die wirkliche Division giebt:

$$\frac{674}{513922} = 0{,}00131148.$$

Weitere Correctionen könnte man auf folgende Art berechnen:

Man setze nach und nach:

$$\frac{a}{b} = c,$$

$$\frac{a}{b+n} = c - \frac{nc}{b+n};$$

$$\frac{nc}{b} = c',$$

$$\frac{nc}{b+n} = c' - \frac{nc'}{b+n};$$

$$\frac{nc'}{b} = c'',$$

$$\frac{nc'}{b+n} = c'' - \frac{nc''}{b+n},$$

$$\frac{nc''}{b} = c''',$$

$$\frac{nc''}{b+n} = c''' - \frac{nc'''}{b+n};$$

u. s. w.

so ist:

$$\frac{a}{b+n} = c - \frac{nc}{b+n}$$

$$= c - c' + \frac{nc'}{b+n}$$

$$= c - c' + c'' - \frac{nc''}{b+n}$$

$$= c - c' + c'' - c''' + \frac{nc'''}{b+n}$$

u. s. w.

wo die Grössen $c$, $c'$, $c''$, $c'''$, .... sämmtlich bloss mittelst der Tafeln berechnet werden können, die beizufügenden subtractiven oder additiven Correctionen aber immer kleiner werden.

Eine Anzeige wie die vorliegende kann natürlich nicht darauf berechnet sein, ihren Gegenstand zu erschöpfen, weshalb wir uns mit den obigen Erläuterungen der bei dem Gebrauche der Tafeln anzuwendenden Methode, die natürlich noch viele Abkürzungen zulässt, welche Jeder leicht selbst finden wird, begnügen müssen. Auch enthält die den Tafeln vorangeschickte Einleitung alles Erforderliche zu der Erklärung derselben.

Ausser dieser Divisionstafel, welche, wie schon erinnert, bei Weitem den Hauptheil der Tafeln ausmacht, enthalten dieselben noch:

2°. Une Table de logarithmes en deux pages, qui permet de trouver avec neuf décimales exactes les logarithmes de nombres.

3°. Une Méthode pour calculer les logarithmes depuis 100000 jusqu' à 101000;

über welche zwei werthvolle Zugaben wir uns jedoch hier der Beschränktheit des Raumes wegen nicht weiter verbreiten können, die Leser aber auf dieselben aufmerksam machen.

Wir sind der Meinung, dass Herr Picarte mit diesen schönen, auch äusserlich in der trefflichsten Weise ausgestatteten Tafeln der Wissenschaft ein sehr werthvolles Geschenk gemacht hat, und würden ganz die Worte unterschrieben haben, mit denen die Herren Mathieu, Hermite und Bienaymé (rapporteur) ihren der Pariser Akademie erstatteten Bericht schliessen:

„Nous proposons donc à l'Académie de remercier M. Picarte de sa communication, et de l'encourager à publier sa Table de division."

Wir haben kürzlich bei einer anderen Gelegenheit (Literar. Ber. Nr. CXLII. S. 2.) gesagt, dass die mathematischen und Natur-Wissenschaften im eigentlichen Sinne Weltwissenschaften seien. Das sehen wir in der erfreulichsten Weise auch an diesem ausgezeichneten Werke, dessen Verfasser am Ende des kurzen Vorworts sagt:

„Le gouvernement du Chili, toujours disposé à encourager les travaux scientifiques, s'est empressé de souscrire à l'ouvrage pour trois cents exemplaires."

„Une souscription publique s'est ouverte spontanément à Chili pour faciliter l'impression de l'ouvrage."

Also auch in den entferntesten Gegenden der Erde, weit drüben über dem Ocean, werden die mathematischen Wissenschaften in jeder Beziehung gepflegt und gefördert; sie sind in Verbindung mit den Naturwissenschaften wahre Weltwissenschaften!

Möchte es uns gelungen sein, durch vorstehende ausfürlichere Anzeige die Aufmerksamkeit der Leser auf dieses ausgezeichnete und in jeder Beziehung nützliche Werk zu lenken, und sein trefflicher Verfasser, Herr Picarte, für die grosse auf dessen Ausarbeitung verwandte Mühe durch die grösste und weiteste Verbreitung desselben einigermassen belohnt werden. Grunert.

---

## Geometrie.

Euklid's acht geometrische Bücher aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz. Auf's Neue herausgegeben von Dr. E. W. Hartwig, Oberlehrer am Gymnasium Frid. zu Schwerin i. M. Halle. Waisenhaus. 1860. 8⁰.

Es ist dies eine neue, — die wie viel'ste, wird nicht gesagt

und ist auch aus der Vorrede wenigstens nicht genau ersichtlich — Ausgabe der bekannten Lorenz'schen Uebersetzung der sechs ersten Bücher und des eilften und zwölften Buchs der Elemente des Euklides, und bei einem allen, namentlich älteren Mathematikern, so durch und durch bekannten und in freundlicher Erinnerung lebenden Buche kann daher von einer weiteren Besprechung hier natürlich gar nicht die Rede sein. Die letzteren Ausgaben sind sonst immer von Herrn Dippe in Schwerin besorgt worden. Herr Hartwig hat wiederum einen Anhang über die Berechnung der Figuren und Körper, also überhaupt über die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie beigefügt, wonach es also scheint, dass diese Uebersetzung der acht euklidischen Bücher auch als Lehrbuch der ebenen und körperlichen Geometrie benutzt werden soll, wogegen natürlich im Ganzen gar nichts zu erinnern ist. Nun hat aber Herr Hartwig die Verbindung dieser Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie mit der reinen euklidischen Geometrie bloss dadurch hergestellt oder vielmehr herzustellen gesucht, dass er einige Sätze über Zahlenproportionen vorangestellt und deren Beweis auf den Satz gegründet hat, dass in jeder Zahlenproportion die Producte der äusseren und mittleren Glieder gleich sind und umgekehrt, dessen Ableitung aus den euklidischen Sätzen im fünften Buche natürlich ungemein leicht ist, und sich ganz von selbst ergiebt. Damit ist aber nach unserer Meinung für den fraglichen Zweck wenig oder nichts geleistet und gewonnen. Aller und jeder Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie liegt unbedingt und ganz und gar die Lehre von den Proportionen im Sinne der Neueren zu Grunde, welche lediglich auf Theilung beruht, wogegen die Lehre von den Proportionen im Sinne der Alten, so wie dieselbe in dem fünften Buche der Elemente, diesem Meisterstücke der alten Geometrie, vorgetragen und, wie jeder wahre Kenner der griechischen Geometrie weiss, von allen griechischen Geometern nur in diesem Sinne angewandt wird, ganz auf Vervielfachung beruhet. Den Neueren tritt bei ihrer Proportions-Theorie aber gleich von vorn herein die Schwierigkeit der Incommensurabilität entgegen, welche aus dem angeführten Grunde in der alten Geometrie natürlich gar nicht in Frage kommen konnte*), und diese Schwierigkeit ist das eigentliche punctum saliens, auf welches Alles ankam und welches Herr Hartwig vor allen Dingen in's Auge fassen musste,

*) Von dem 10ten Buche der Elemente, wo Euklid die Incommensurabilität ausführlich für sich in höchst scharfsinniger und lehrreicher Weise behandelt, ist, wie sich von selbst versteht, hier für jetzt nicht weiter die Rede.

wenn überhaupt von einer Verbindung jenes arithmetischen Anhangs mit der reinen euklidischen Geometrie die Rede sein sollte. Herr Hartwig musste also vor allen Dingen, nach gehöriger Erläuterung des Wesens der Proportion im Sinne der Neueren, zuerst im Allgemeinen zeigen, dass Grössen, die im Sinne der Alten proportionirt sind, dies auch im Sinne der Neueren sind und umgekehrt, wobei er denn schon ganz von selbst auf die Schwierigkeit der Incommensurabilität gekommen sein, und zu ausführlicher Erörterung derselben auf ganz natürlichem Wege Anregung gefunden haben würde, freilich Erörterungen, die sich nicht hätten ganz kurz erledigen lassen. Dass aber bei'm geometrischen Unterrichte auch auf Schulen dergleichen Schwierigkeiten, wie sie nun einmal in der Geometrie, wie z. B. auch in der Lehre von den Parallelen, vorhanden sind, nicht mehr umgangen werden dürfen, mit denselben nicht mehr Versteck gespielt werden darf, wenn die Schüler an wahrer Einsicht in das innerste Wesen der Geometrie nicht sehr namhafte Einbusse erleiden sollen, weiss jetzt jeder erfahrene und einsichtige Lehrer und giebt dies gewiss ohne Weiteres zu. Von allen diesen Dingen ist aber in dem erwähnten Anhange gar keine Rede, namentlich in höchst auffallender Weise nicht mit einem Worte von der Incommensurabilität, was uns der beste Beweis für eine Verkennung des wahren Wesens und der eigentlichen Bedeutung der Lehre von den Proportionen im Sinne der Alten, und, — dieser gegenüber, — im Sinne der Neueren zu sein scheint. Aus diesem Gesichtspunkte die Sache betrachtet, scheint uns der mehrerwähnte Anhang eine ziemlich müssige Zugabe zu sein, denn nur durch eine in jeder Beziehung sorgfältige Erörterung der Commensurabilität und Incommensurabilität können die Schüler zu einer wahren Einsicht in alle diese Dinge geführt werden. Dergleichen Erörterungen sind für den wirklichen Erfolg des geometrischen und arithmetischen Unterrichts überhaupt wichtiger, als manche Lehrer jetzt zu glauben scheinen, namentlich wichtiger als viele der Probleme und Problemchen, wie sie jetzt den Schülern in Unmasse vorgelegt zu werden pflegen, wenn wir auch natürlich dieser wichtigen geometrischen Geistes-Gymnastik ihren sehr wohl begründeten Werth abzusprechen nicht im Entferntesten die Absicht haben und haben können.

Maxima und Minima. Ein geometrisches und algebraisches Uebungsbuch für die Schüler höherer Lehranstalten. Von G. C. E. Martus, ord. Lehrer der Mathematik und Physik an der Königstädtischen Real-

schule in Berlin. Mit einer Figurentafel. Berlin. Enslin. 1861. 8⁰.

Wir freuen uns sehr, dass in neuerer Zeit die Lehre von den Maximis und Minimis in elementarer Behandlung, und die Lösung von Aufgaben aus diesem Gebiete, bei'm mathematischen Unterrichte eine grössere Beachtung findet, wie dies früher der Fall gewesen zu sein scheint, wozu jedenfalls mit das von uns im Literar. Ber. Nr. CXXXVIII. angezeigte verdienstliche Buch von Schellbach in erfreulicher Weise Anregung gegeben hat. Was der Herr Verfasser der vorliegenden Schrift in der Vorrede über den Werth solcher Aufgaben als Unterrichtsmittel sagt, entspricht ganz unserer eigenen Ueberzeugung, und wir glauben auch, dass in dieser Schrift den Schulen eine recht zweckmässige Sammlung von, besondere Schwierigkeiten übrigens meistens nicht darbietenden Uebungsaufgaben aus der in Rede stehenden Lehre geboten wird. Der Herr Verfasser hat die Aufgaben nach der Art ihrer Lösung in zwei Abtheilungen gebracht, nämlich I. Geometrische Lösung. S. 1—S. 19. und II. Algebraische Lösung. S. 20—S. 127., wo schon die Seitenzahl zeigt, dass der zweite Theil der bei Weitem überwiegendere ist. In der That enthält die erste rein geometrische Abtheilung auch im Ganzen nur eine geringe Anzahl der bekanntesten Sätze und Aufgaben, und aus der Stereometrie gar nichts, weshalb wir den Wunsch nicht unterdrücken können, dass die Sammlung in dieser Partie reichhaltiger wäre, weil ganz besonders die rein geometrische Behandlung sich bei diesen Gegenständen durch Eleganz und zugleich durch oft überraschende Einfachheit auszeichnet. Ob der Herr Verfasser laut der Vorrede nicht vielleicht den ausgezeichneten neueren Arbeiten von Steiner etwas zu wenig Beachtung geschenkt hat, wollen wir dahin gestellt sein lassen. Aber auch schon in der trefflichen Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch, sowohl im ersten planimetrischen, als auch im zweiten stereometrischen Theile, würde er unter der Ueberschrift: Vom Maximum und Minimum, in so fern dieser Gegenstand zur Elementar-Geometrie gehört, vieles Treffliche für seinen Zweck gefunden haben. Ganz vorzüglich aber wollen wir bei dieser Gelegenheit auf das leider fast vergessene, den Liebhabern der feineren Geometrie aber im höchsten Grade zu empfehlende Werk von L'Huilier: De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice considerata. Varsaviae. 1782. 285 pagg. in 4⁰. aufmerksam machen, von dessen Inhalte der genannte scharfsinnige Geometer auch einen sehr guten Auszug in seiner Po-

lygonometrie. Genève. 1789. 4°. unter der Ueberschrift: Abrègé d' Isopérimétrie élémentaire. p. 103—p. 124. geliefert hat, der einem Jeden, dem das grössere Werk zu weit geht, vorzüglich empfohlen zu werden verdient. L'Huilier sagt an diesem Orte selbst von seinem grösseren Werke: „Mon but principal dans la composition de cet Ouvrage, étoit de suppléer sur ce point aux cours ordinaires d'Élémens de Géométrie, et de déterminer dans chacune des classes de figures qu'on y traite, celle qui jouit du Minimum de contour avec la même capacité, et réciproquément du maximum de capacité avec le même contour. Mais à ce but principal se joignit un but secondaire. Je voulois montrer la facilité avec laquelle les procédés élémentaires peuvent s'appliquer à la découverte et à la démonstration de plusieurs propropositions qu'on à coutume de traiter par les calculs supérieurs", was ihm nach unserer Meinung auch trefflich gelungen ist. Der zweite algebraische Theil der Schrift des Herrn Martus ist, wie schon erinnert, viel reichhaltiger als der erste, und zerfällt in folgende Unterabtheilungen: Der 1ste und 2te Abschnitt enthalten die algebraische Behandlung von Aufgaben aus dem Gebiete der ebenen und körperlichen Geometrie, der 2te Abschnitt mit besonderer Rücksicht auf die Behandlung der Differenz zweier Quadratwurzeln; der 3te Abschnitt enthält die Anwendung trigonometrischer Functionen, der 4te und 5te betreffen die Kegelschnitte und den Inhalt bei denselben, der 6te betrifft transcendente Gleichungen, der 7te kubische Gleichungen, der 8te einige schwierigere Aufgaben. Die Methode, nach welcher die Aufgaben dieses zweiten Theils behandelt worden sind, stimmt mit der in dem oben erwähnten Schellbach'schen Buche angewandten überein, und ist schon in unserer Anzeige dieser verdienstlichen Schrift etwas näher charakterisirt worden, insofern dieselbe nach unserer Meinung die meiste Aehnlichkeit mit der elementaren Methode von Fermat hat, so dass wir uns also hier auf jene Anzeige beziehen können. Mögen sich die Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten das Schriftchen des Herrn Martus zur Beachtung empfohlen sein lassen.

---

## Astronomie.

Publications de l'observatoire d'Athènes. II^me Serie, Tome I. — Beiträge zur physikalischen Geographie von Griechenland von J. F. Julius Schmidt, Director der Sternwarte zu Athen. I. Zur Topographie;

**Höhenbestimmungen. II. Ueber Bourdon's Metallbarometer. III. Das Klima von Athen, nebst phänologischen Notizen und Angaben über Maxima und Minima der Vegetation in Attika. Athen 1861. Karl Wilberg. 4°.**

Auf dem classischen Boden Griechenlands besitzt die Astronomie schon seit längerer Zeit einen ihr gewidmeten Tempel; die Sternwarte war aber nach kurzer Blüthe in Vergessenheit gerathen, und ward nur durch die Munificenz ihres hohen Protectors, Sr. Excellenz des Herrn Freiherrn Simon von Sina, Sr. griechischen Majestät ausserordentlichen Gesandten und bevollmächtigten Minister, so weit wiederhergestellt, dass sie ihrer Bestimmung zurückgegeben werden konnte, wofür die Wissenschaft Herrn Baron von Sina zu dem grössten Danke verpflichtet ist. Es lag in der Absicht ihres hohen Protectors, dass bei der Thätigkeit der Sternwarte ausser den astronomischen Arbeiten auch die physikalisch-geographischen Studien des Landes möglichste Berücksichtigung finden sollten. Im December 1858 übernahm der durch treffliche Arbeiten schon hinreichend bekannte Herr Julius Schmidt die Direction der Sternwarte. Das Gebäude bedurfte mehrfacher Reparaturen und überhaupt war die Anstalt zu eigentlichen astronomischen Arbeiten noch nicht hinreichend ausgerüstet, so dass, um keine Zeit zu verlieren, mit dem rühmlichsten Eifer Herr Schmidt den Entschluss fasste, sich vorläufig hauptsächlich meteorologischen und überhaupt das Klima und die Topographie Attika's betreffenden Arbeiten zu widmen. Erst im Frühling 1860 konnten die astronomischen Arbeiten mit Nachdruck begonnen werden, gestatteten aber, weil die Rechnungen viel Zeit erforderten, noch keine Veröffentlichung. Deshalb entschloss sich Herr S., die „Athenischen Publicationen" in zwei Serien herauszugeben, deren 1ste die Resultate der astronomischen, die 2te die Resultate der meteorologischen, topographischen u. s. w. Arbeiten enthalten soll. Der äusserlich sehr schön ausgestattete erste Theil dieser zweiten Serie liegt uns jetzt vor, und hat unsere lebhafteste Bewunderung der vielen Leistungen erweckt, mit denen Herrn S. in verhältnissmässig so kurzer Zeit die Wissenschaft zu beschenken möglich gewesen ist.

Das ganze 304 Seiten umfassende Werk zerfällt in drei Hauptabtheilungen.

Die erste Abtheilung. Zur Topographie Griechenlands. (S. 1 — S. 111.) enthält die über ganz Attika und die Inseln verbreiteten Höhenmessungen, sämmtlich mit der grössten Umsicht und, so weit es die nicht selten ungünstigen Verhältnisse irgend gestatteten, mit der grössten Genauigkeit ausgeführt.

Die **zweite Abtheilung** (S. 113 — S. 144.) enthält einen dritten ausführlichen Bericht über Bourdon's Metallbarometer, dessen Studium Herr S. sich bekanntlich mit dem grössten Eifer gewidmet hat, und bei dessen Beurtheilung er als die erste Autorität zu betrachten ist*). Wir begnügen uns hier das Resultat dieser neueren Untersuchung über das jedenfalls Beachtung verdienende Instrument, wie folgt, anzugeben. Herr S. sagt:

„Als Resultat der fortgesetzten Untersuchungen über die Metallbarometer lässt sich jetzt folgendes nach meinen Erfahrungen feststellen:

Bourdon's Metallbarometer, wenn sie wie $A^1$ und $A^2$ gut gearbeitet und mit einem Thermometer versehen sind, geben bei Höhenmessungen völlig genügende Resultate, wenn die von mir auseinandergesetzten**) Prüfungen durchgeführt werden. Die Zuverlässigkeit der Resultate findet so lange ungestört statt, als nicht ein heftiger Stoss oder absichtliches Schrauben den Zeiger aus seiner ursprünglichen Lage bringt. Des Künstlers Aufgabe ist es, darüber nachzudenken, wie den ursprünglichen Aenderungen in der Spannung der Kapsel vorzubeugen sein werde".

Kein Besitzer eines Metallbarometers wird bei dessen Gebrauche künftig diesen dritten Bericht des Herrn S. entbehren können.

Die **dritte Abtheilung** (das Klima von Athen S. 145 — S. 304.) zerfällt in folgende Unterabtheilungen: Reducirte meteorologische Beobachtungen. Meteorologische Notizen. Ueber die Feuchtigkeit der Luft. Vom Luftdrucke. Erwärmung der Erde. Temperatur der Gewässer. Maxima der Vegetation in Attika; und enthält des Wichtigen und zugleich allgemein Interessanten sehr viel, der letzte Abschnitt z. B. über den Oelbaum, das wichtigste Product Attikas, und die Palmen.

Wir halten dieses ausgezeichnete Werk auch für sehr wichtig für die Alterthumskunde. Mag sich nicht mancher unter uns, namentlich in seiner Jugend, unter dem **Ilissos** Gott weiss was für einen grossen romantischen Strom gedacht haben, und wird sich nicht wenig wundern, wenn er auf S. 284. Folgendes liest: „Der sogenannte Fluss **Ilissos** hat zuweilen Wasser, nur nicht im Sommer, denn alsdann ist er fast ganz verschwunden bis auf

*) M. s. unseren ausführlicheren Bericht über Herrn **Schmidt's** Leistungen in dieser Beziehung im **Literar. Ber.** Nr. CXXI. S. 13.

**) M. s. den Bericht.

eine kleine und trübe Lache bei der Kallirhoë*), wo das künstlich vertiefte Bette das zum Waschen nöthige Wasser sammelt. Fliesst der Ilissos, so hat er, bei einer mittleren Wassertiefe von ½ bis 1 Zoll, die Breite von einer Spanne bis zu einem Schritt. Fällt starker Regen, so kann er merkwürdig, selbst bedrohlich anschwellen, und dann bildet er auch, jährlich etwa an zwei Tagen und von sehr ungleicher Dauer, einen kleinen trüben Wasserfall bei der Kallirhoë."

Möge Jeder von diesem mehrfach interessanten und wichtigen Werke selbst Einsicht nehmen, und möge Herr S. in seinem bewundernswerthen Eifer, die Wissenschaft mit weiteren Mittheilungen über jenen classischen Boden zu bereichern, nicht erkalten, dabei auch in jeder Beziehung die kräftigste Unterstützung finden.

Grunert.

---

## Vermischte Schriften.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1860. Nr. 440—468. (S. Literar. Ber. Nr. CXXVII. S. 15., wo in Zeile 15 durch einen Druckfehler Nr. 424—539 statt Nr. 424—439 gesetzt worden ist).

M. Hipp: Ueber die Störungen der elektrischen Telegraphen während der Erscheinung eines Nordlichts (mit einer Tafel). Nr. 444—446. S. 33.

G. Oth: Ueber die Rauchringe. Nr. 444—446. S. 37.

Wild: Ueber die Bestimmung der Lufttemperatur. Nr. 450—454. S. 91. (Dieser Aufsatz enthält viele auf sorgfältige Untersuchungen gestützte, für den Gebrauch des Thermometers und andere meteorologische Instrumente wichtige und lehrreiche Bemerkungen, namentlich auch unter Nr. II. über die Aufstellung der Thermometer auf den meteorologischen Stationen, weshalb wir auf denselben besonders aufmerksam machen).

Dr. Georg Sidler: Ueber einige, astronomische Erscheinungen des Jahres 1860. Nr. 455—458. S. 140. (Neu entdeckte Planeten. Die Cometen des Jahres 1860. Die totale Sonnenfin-

---

*) Eine Quelle im Ilissos, die aus einem Felsen quillt, wo man noch die Anlagen der Pisistratiden und die Wasserleitungen der folgenden Jahrhunderte zu erkennen glaubt.

sterniss vom 18. Juli, worin eine kurze Relation über die von verschiedenen Beobachtern in Spanien angestellten Beobachtungen gegeben und mit den Worten geschlossen wird: „Die Beobachtungsergebnisse der Finsterniss von 1860 scheinen eher für eine **physische Existenz** dieser Gebilde" — (nämlich der Protuberanzen u. s. w.) — „auf dem Sonnenkörper zu sprechen" nämlich gegenüber denen, welche dieselben gern zu blossen optischen Erscheinungen machen möchten, worin wir Herrn Sidler vollkommen beistimmen.

H. Schiff: Historisch-kritische Darstellung der Säurentheorie. Nr. 464—467. S. 193. (In chemischer Rücksicht von allgemeinem Interesse, weshalb wir den Aufsatz hier anführen).

Wild: Bericht über die Einrichtung meteorologischer Stationen in den Kantonen Bern und Solothurn. Nr. 468. S. 225. (Die Stationen sind: Bern, Saanen, Interlaken, St. Beatenberg, Grimsel, Faulhorn und Wasen bei Sumiswald. Der Bericht enthält viele sehr einsichtige praktische Bemerkungen über Aufstellung der Instrumente, über die Einrichtung solcher Stationen überhaupt u. s. w.; alle getroffenen Einrichtungen und den Beobachtern gegebenen Instructionen zeichnen sich, wie es uns scheint, unter Berücksichtigung der zur Disposition stehenden Mittel, durch besondere Einfachheit und Zweckmässigkeit aus, und verdienen Nachahmung).

Koch: Meteorologische Beobachtungen von Burgdorf und Saanen (Juni bis October 1859), Burgdorf (November 1858 — März 1859), Saanen und Bern (November 1858 — Juni 1860).

Sitzungsberichte der königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München (vergl. Literar. Ber. Nr. CXLIV. S. 9.).

1861. I. Heft III. Dieses Heft enthält keine zur Mathematik und Physik gehörende Aufsätze, aber eine in allgemeiner naturwissenschaftlicher Rücksicht sehr interessante grössere Abhandlung, auf die wir alle Lehrer, die in der Naturgeschichte zu unterrichten haben, recht dringend aufmerksam machen, nämlich:

A. Wagner: Zur Feststellung des Artbegriffs, mit besonderer Bezugnahme auf die Ansichten von Nathusius, Darwin, Is. Geoffroy und Agassiz. S. 316—358.

Die Abhandlung ist selbst ohne viele specielle naturhistorische Kenntnisse sehr wohl verständlich, und deshalb auch dem unterzeichneten Herausgeber sehr interessant und lehrreich gewesen.

G.

**Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien** (Vg. Literar. Ber. Nr. CXLIII. S. 6.).

Band XLII. 1860.

Nr. 28. Diese Nummer enthält nur naturhistorische Abhandlungen.

Band XLIII. Zweite Abtheilung.

Von diesem Bande an erhalten die wichtigen Wiener Sitzungsberichte eine neue Einrichtung, indem die Berichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse in zwei Abtheilungen erscheinen, deren zweite Abtheilung

> die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie

enthält, jedenfalls eine sehr zweckmässige Einrichtung, die auch uns erlaubt, uns von jetzt an auf die Anzeige dieser zweiten Abtheilung zu beschränken, weil dieselbe vorzugsweise alle diejenigen Wissenschaften enthält, die in den Kreis unserer Zeitschrift gehören. Wir bemerken dies hier ein für alle Mal, und freuen uns sehr, dass die Wiener Akademie auch bei dieser Einrichtung das für unsere jetzige Zeit im Allgemeinen so überaus wichtige Princip der Theilung der Arbeit befolgt und in Anwendung gebracht hat.

Jänner 1861. Aus einem Schreiben des österreichischen Reisenden Herrn Hauptmanns Karl Friesach an Herrn Director Kreil. S. 7. (Enthält Höhenmessungen und magnetische Bestimmungen in Südamerika). — Reitlinger: Ueber die Schichtung des elektrischen Lichts. S. 15. Vorläufige Notiz über Lichtenberg'sche Figuren in verschiedenen Gasen. — Knochenhauer: Ueber den Gebrauch des Luftthermometers. S. 27. — Frisch: Resultate mehrjähriger Beobachtungen über die Belaubung und Entlaubung der Bäume und Sträucher im Wiener botanischen Garten. (Mit 1 Tafel). S. 81. — Kreil: Ueber die täglichen Schwankungen des Luftdrucks. S. 121. — Czermak: Zur objectiven Erklärung einiger sogenannten subjectiven Gesichtserscheinungen. S. 163. — Brücke: Ueber Metallglanz. S. 177. — v. Littrow: Physische Zusammenkunft der Asteroiden im Jahre 1861. S. 193. — Weiss: Ueber die Abhängigkeit der Liniendistanzen im Spectrum des Gases der Untersalpetersäure von der Dicke der durchlaufenen Schicht. S. 208. — Mach: Ueber das Sehen von Lagen und Winkeln durch die Bewegung des Auges. Ein Beitrag zur Psychophysik. S. 215.

**Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1861. Januar-Juni. Vgl. Literar. Br. Nr. CXLII. S. 9.**

S. 17. Herr Pierre sprach: Ueber den Leitungswiderstand tropfbar flüssiger Leiter. Zu diesen Untersuchungen war Herr Pierre einen Rheostaten von grossem Widerstande zu construiren genöthigt, welcher zwar kurz, aber mit hinreichender Deutlichkeit beschrieben wird. Mehrere bemerkenswerthe Resultate haben sich aus diesen Untersuchungen ergeben, wegen welcher wir auf den Aufsatz selbst verweisen müssen, und als eins der bemerkenswerthesten nur anführen wollen: dass bei verdünnter Schwefelsäure der Leitungswiderstand von verschiedener Grösse gefunden wurde, jenachdem die ein- oder ausgeschaltete Schicht an der Anode oder Kathode sich befand, und zwar fand man den Leitungswiderstand in dem an die Kathode angränzenden Theile der Flüssigkeit grösser als in dem an die Anode gränzenden. — Wird bei Anwendung derselben Stromquelle (einer Daniel'schen Batterie von zwei Elementen) die Stromstärke durch Verminderung des Gesammtwiderstandes vergrössert, so wächst auch der Unterschied zwischen beiden vorerwähnten Widerständen. — S. 29. Herr Weitenweber verlas eine briefliche Mittheilung des Herrn P. Zulauf in Saaz über ein von ihm dort beobachtetes Lichtphänomen. — S. 35. Herr Pierre: Beschreibung einer nach seiner Angabe construirten Longitudinal-Wellenmaschine. — S. 37. Herr Karlinski: Resultate aus den magnetischen Declinationsbeobachtungen in Krakau. — S. 60. Herr Dr. Nowak: Meteorologische Studie über gewisse Schlammstellen in grossen Höhen mehrfach interessant, (mit Rücksicht auf Alexander v. Humboldt). — S. 90. Herr Nowak: Kritischer Commentar zu zwei Kapiteln aus Arago's nachgelassenen Werken über das Gewitter, und Schlussfolgerungen.

---

# Programma

## dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna pel concorso al premio Aldini sul Galvanismo per l' anno 1862.

I muscoli ed i nervi della rana sono sedi di correnti elettriche, le quali diedero materia a due stupende Dissertazioni, premiate

da quest' Accademia, ed elaborate dai chmi Professori **Grimelli** e **Cima** per rispondere a due temi proposti pe' concorsi al premio **Aldini**. Stando massimamente ad una recentissima Pubblicazione del Sig. **Budge**, Professore nell' Università di Greifswald, è sede di corrente ellettrica nella rana anche la pelle. L'Accademia che ha sempre cercato di conoscere ben chiaro ed appurato quanto erasi scoperto in fatto d'elettricità in quell' animale, non può non cercar di conoscere eziandio quanto è stato dipoi sino ad ora scoperto intorno al medesimo, e perciò anche quanto può esser riferibile all' ultima memorata corrente. Propone quindi il seguente

Quesito

1°. Esaminare ed esporre ciò che dai fisici e dai fisiologi è stato trovato di rilevante intorno alle correnti muscolari, nervee e di contrazione della rana dopo le sopraccennate Dissertazioni dei Professori **Grimelli** e **Cima**: e sopratutto la vera importanza dello stato elettro-tonico dei nervi, assai grande secondo le diligenti ricerche del Sig. **Pflüger**, e pressochè nulla giusta il parere del sopradetto Sig. **Budge**: e

2°. Indagare con precise e concludenti esperienze se veramente nella pelle della rana si manifesti una corrente elettrica: e, nel caso affermativo, quali sieno le leggi di questa corrente: se debbasi o no riguardare come fenomeno fisiologico: e se abbia veruna attinenza colle altre correnti.

Desidera l'Accademia, che dai fatti relativi alla rana non si scompagnino i fatti analoghi talora noti riguardo agli altri animali, ma che vengano anch' essi riferiti e discussi, riunendo così in un tutto solo quanto, in relazione all' oggetto in discorso, è ben conosciuto finora circa all' economia animale.

Si retribuirà un premio di **lire italiane mille** all' Autore dello scritto che, colle suddette avvertenze e condizioni, presenti, a giudizio dell' Accademia, la miglior soluzione del proposto tema.

Le Memorie per questo Concorso dovranno pervenire franche a Bologna entro il mese di Dicembre milleottocentosessantadue con questo preciso indirizzo = Al Segretario dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna =: un tale termine è di rigore, e perciò non sarebber ricevute pel Concorso le Memorie che giungessero al-l'Accademia, spirato l' ultimo dì dell' indicato mese. Dovranno essere scritte o in italiano, o in latino, o in francese, e in caratteri facilmente leggibili. L'Accademia richiede la mag-

giore esattezza nelle citazioni di Opere stampate, e la maggiore autenticità ne' documenti in iscritto, che agli Autori torni di menzionare a prova, o conforto di loro asserzioni. Ciascun concorrente dovrà contrassegnare con un' epigrafe qualsiasi la sua Memoria, ed accompagnare questa d' una scheda suggellata, la quale racchiuda il nome, cognome ed indirizzo di lui, ed abbia ripetuta all' esterno la predetta epigrafe. I concorrenti avranno tutta la cura di non farsi conoscere; poichè quegli, che per qualche espressione della sua Memoria, o in qualsivoglia altra maniera si facesse conoscere, verrebbe escluso dal Concorso. Spirato il sopradetto termine, e succeduto il giudizio delle Memorie di Concorso, secondo l' analogo Regolamento dell' Accademia, verrà aperta la sola scheda della Memoria meritevole del Premio, e del premiato si pubblicherà tosto il nome.

Bologna dalla Residenza dell' Istituto il dì 23 Giugno 1861.

IL F. F. di Presidente
Prof. Cav. Giovanni Battista Fabbri.

Il Segretario
Dott. Domenico Piani.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

## XLV.

### Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

L. Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch. 15. bis 17. Lief. gr. 8°. geh. Berlin. à 20 Ngr.

A. Hölty, Die Bewegung als Princip der mathematischen Grundbegriffe. gr. 8°. geh. Göttingen. 16 Ngr.

Sigel, Arithmetischer und geometrischer Anschauungs-Unterricht, verbunden mit dem ersten Unterricht im Zeichnen. 8°. geh. Tuttlingen. 10 Ngr.

### Arithmetik.

S. F. Lacroix, Traité élementaire de calcul différentiel et de calcul intégral. 6e édition, revue et augmentée de notes par Hermite et J. A. Serret. Tome 1er. Paris. 8°. Mit 5 Taf. Preis f. 2 Bde. 5 Thlr.

Todhunter, A History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century. Lond. 8°. 4 Thlr. 24 Ngr.

J. Wenck, Die Arithmetik. Ein Handbuch für Schüler gewerblicher Lehranstalten. gr. 8°. Leipzig. $7\frac{1}{2}$ Ngr.

### Geometrie.

F. Grelle, Analytische Geometrie der Ebene. gr. 8°. geh. Hannover. 2 Thlr.

The Quadrature of the Circle. Correspondence between an eminent Mathematician and James Smith. Lond. 8°. 4 Thlr. 6 Ngr.

### Trigonometrie.

J Dienger, Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit zahlreichen Anwendungen derselben auf reine u. praktische Geom., phys. Astronom. etc. 2. Aufl. gr. 8° geh. Stuttg. 2 Thlr. 4 Ngr.

### Mechanik.

W. F. Guichard, Die Grundgesetze der Dynamik. gr. 8°. geh. Leipzig. 10 Ngr.

### Praktische Mechanik.

H. Bochet, Mécanique. Nouvelles recherches expérimentales sur le frottement de glissement, spécialement sur des rails de chemins de fer, dans des circonstances très-diverses. Paris. 8°. M. Taf. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

### Astronomie.

Commentaire et discussion du système planétaire de l'astronome J. P. Villeneuve. Par un ancien officier de l'état-major. gr. 4°. Wien. 2 Thlr. 20 Ngr.

Handatlas der Erde und des Himmels. Neu revid. Volksausg. in 50 Karten. 30.—33. Lief. Imp.-Fol. Weimar. à 8 Ngr.

H. Kiepert's allgemeiner Atlas der Erde und des Himmels in 26 Blätt. 14. Aufl. Für den Gebrauch der Schulen der k. k. öster-

reichischen Staaten neu bearbeitet von W. Vogel und A. Graef. qu. gr. 4°. geh. Weimar. 1 Thlr. — Derselbe in 34 Karten. Mit Erläuterungen zu den physikalischen Karten von Richter. qu. gr. 4°. Weimar. geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

## Physik.

J. K. Bähr, Der dynamische Kreis. Die natürliche Reihenfolge der Elemente und zusammengesetzten Körper als Resultat der Beobachtung ihrer dynamischen Wirksamkeit. 2. Lief. Dresden. 4°. Mit 32 Steintaf. 3 Thlr. 15 Ngr.

G. ab Capelli, Osservazioni meteorologiche eseguite nelle R. Specola astronomica di Milano negli anni 1858—1859. In gr. 4°. Milano. 20 fr.

Allgemeine Encyklopädie der Physik. Bearbeit. v. C. W. Brix, G. Decher, F. C. O. v. Feilitzsch, F. Grashof, F. Harms etc. Herausgegeb. v. Gst. Karsten. 9. Lief. Leipzig. 8°. Mit eingedr. Holzschn. u. 2 Taf. Inhalt: 20. Bd. Angewandte Electricitätslehre, von C. Kühn. p. 129—416. 2 Thlr. 20 Ngr.

K. E. Kluge, Ueber die Ursachen der in den Jahren 1850—1857 stattgefundenen Erderschütterungen u. die Beziehungen derselben zu den Vulkanen u. zur Atmosphäre. gr. 8°. geh. Stuttg. 24 Ngr.

E. Matzenauer, Erdmagnetismus und Nordlicht. Ein Versuch, ihren Zusammenhang mit Zugrundelegung der P. T. Meissner'schen Wärmelehre zu erklären. 2. Aufl. gr. 8°. Innsbruck. 12 Ngr.

M. Meyerstein, Der Spectometer. Ein neues Instrument zur Bestimmung der Brechungs- und Zerstreuungs-Verhältnisse verschiedener Medien, sowie auch zum Gebrauche bei allen goniometrischen Messungen. gr. 8°. geh. Göttingen. 8 Ngr.

C. Neumann, Lösung des allgemeinen Problems über den stationairen Temperaturzustand einer homogenen Kugel ohne Hülfe von Reihen-Entwickelungen, nebst einigen Sätzen zur Theorie der Anziehung. gr. 8°. geh. Halle a. d. S. 6 Ngr.

J. J. Pohl und J. Schabus, Tafeln zur barometrischen Höhenmessung. gr. 8°. cart. Wien. 20 Ngr.

F. Redtenbacher, Die anfänglichen und gegenwärtigen Erwärmungszustände der Weltkörper. gr. 8°. geh. Mannheim. 4 Ngr.

F. Glo. Röber, Elementar-Beiträge zu Bestimmung des Naturgesetzes der Gestaltung und des Widerstandes und Anwendung dieser Beiträge auf Natur u. alte Kunstgestaltung. Nach des Verfass. Tode herausgeg. v. F. Röber. Mit 6 lithogr. Taf. Leipz. 4°. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

S. Subic, Lehrbuch der Physik für die unteren Classen der Gymnasien und Realschulen. gr. 8°. geh. Pesth. $22\frac{1}{2}$ Ngr.

## Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissensch. Classe. Jahrg. 1861. 1—3. Heft. Lex.-8°. Wien. Vollständig 16 Thlr.

Verhandlungen der kais. Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher. XXVIII. Bd. A. u. d. T.: Novorum actorum Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum tomus vicesimus octavus seu decadis tertiae tomus octavus. Jena. 4°. Mit 38 Taf. 12 Thlr. — Enthält u. a.: F. Prestel, Die thermische Windrose für Nordwest-Deutschland. Mit 4 Taf. — J. H. v. Mädler: Ueber totale Sonnenfinsternisse mit besonderer Berücksichtigung der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860. Mit 9 Taf.

# Literarischer Bericht
## CXLVI.

---

## Necrolog.

Den folgenden, von dem **Verein deutscher Ingenieure** aus **Berlin** mir zugesandten Necrolog eines mehrfach verdienten Lehrers und Schriftstellers lasse ich gern in diesen Literarischen Berichten abdrucken. Grunert.

Am 15. Februar 1861 starb zu Bunzlau der ehemalige Lehrer am Königl. Gewerbe-Institut

Professor **Ferdinand Wolff**

im 58. Lebensjahre. Während 25 Jahren lehrte er an dieser Anstalt, wo viele der Mitglieder unseres Vereins seine Vorträge gehört haben.

Die folgenden Notizen, die wir über das Leben unseres verewigten Lehrers hier vorlegen, sind hauptsächlich aus einer Mittheilung geschöpft, mit welcher uns die Frau Professorin Wolff auf unsere Bitte erfreuet hat.

Carl Ferdinand Leberecht Wolff wurde am 3. Mai 1803 zu Berlin geboren. Seinen Vater, welcher Beamter war, verlor er früh; auch seine Mutter starb, als er noch ein Kind war. Eine Freundin der Mutter leitete seine Erziehung. Als Knabe zeigte er viel Neigung und Talent zur Musik; er entschloss sich Musiker zu werden, betrieb das Studium der Musik mit grossem Eifer und arbeitete darauf hin, später in die Königl. Kapelle einzutreten. Diesen Plan verfolgte er bis zum 18. Lebensjahre; da trat ein entscheidender Wendepunkt ein; er machte die Bekanntschaft eines jungen Mathematikers, von dem er in die Elemente der Mathematik eingeführt und für diese Wissenschaft begeistert wurde.

Seines Berufes sich bald klar werdend, wendete Wolff den mathematischen Disciplinen sich dann gänzlich zu; er hörte die Vorlesungen des Prof. Lehmus, erwarb sich aber als Autodidakt später den grossen Schatz seiner Kenntnisse. Mit welchem Eifer und wie grossem Erfolge er seine Studien betrieb, geht am sichersten daraus hervor, dass er schon am 1. October 1826, also im jugendlichen Alter von 23 Jahren, als Lehrer der Mathematik an das 1822 gegründete Königl. Gewerbe-Institut berufen wurde.

Wolff's literarische Thätigkeit beginnt 1830, er bearbeitete ein Lehrbuch der Arithmetik, das unter dem Titel „theoretisch-praktische Zahlenlehre" im Selbstverlage des Verfassers erschien. Das Werk erlebte bis 1856 4 Auflagen. Ein Lehrbuch der Geometrie erschien 1833, die 7. Auflage wurde 1860 gedruckt. Der zweite Theil seiner Zahlenlehre erschien 1833 im Selbstverlage, die 3. Auflage davon 1856. Der zweite Theil der Geometrie (Stereometrie) kam 1833 im Selbstverlage heraus, die 4. Auflage erschien 1853. Der dritte Theil der Geometrie (analytische Geometrie) hatte von 1833 bis 1845 nur 2 Auflagen. Sein Lehrbuch der beschreibenden Geometrie war eine der ersten Bearbeitungen dieses Gegenstandes, die in Deutschland gedruckt wurden; es erschien 1833, die zweite Auflage des ganzen Werkes 1847; an der dritten Auflage hat Wolff noch kurz vor seinem Tode gearbeitet, er hat das Erscheinen seines Werkes nicht mehr erlebt. Ausser jenen Lehrbüchern schrieb er eine kleine Brochüre über Geldverlegenheiten und deren Abhülfe 1846.

Die Wolff'schen Lehrbücher gehören zu den verbreitetsten Schriften auf ihrem Gebiete, die Klarheit der Sprache und Präcision der Darstellung sind im weitesten Kreise rühmlichst anerkannt; sie haben ihren Ruf wohl verdient.

Am 19. November 1835 wurde Wolff zum Königl. Professor am Gewerbe-Institut ernannt, den 1. Juli 1851 etatsmässig angestellt.

Wolff, durch seine Thätigkeit als Lehrer und Schriftsteller zwar vielfach in Anspruch genommen, beschäftigte sich nicht allein mit den mathematischen Disciplinen, er studirte eifrig alte und neuere Sprachen und beschäftigte sich mit grosser Vorliebe mit der Philosophie, besonders aber mit den Naturwissenschaften; die Mathematik war ihm, wie er oft vom Katheder sagte, auch eine Naturwissenschaft, die mathematischen Wahrheiten seien auch Naturgesetze, und das auf diesem Gebiete als wahr und nothwendig Erkannte erschien ihm wie ein aus Versuchen abstrahirtes Naturgesetz.

Wolff sah gern jüngere Leute um sich, plauderte mit ihnen bei seinen Spaziergängen in dem schönen schattigen Garten, der

an seine Wohnung anstiess, wobei er jedoch ein Gespräch über mathematische Gegenstände vermied.

Wolff's Thätigkeit begann zu einer Zeit, wo die Technik allmälig in ein neues Stadium ihrer Entwickelung getreten war, wo Beuth's segensreicher Einfluss fühlbar wurde. Man hatte die Bedeutung einzelner Wissenschaften für die Technik erfahren und damit die Nothwendigkeit der wissenschaftlichen gründlichen Durchbildung des Technikers erkannt. Wolff hatte es sich zur Aufgabe gestellt, die mathematischen Wissenschaften dem Techniker bequem zugänglich und für ihn fruchtbar zu machen; der Schritt von der Erkenntniss zur Anwendung der gewonnenen Wahrheiten sollte nach ihm ein möglichst kleiner werden. Von diesem Grundsatze ging er bei der Verfassung seiner Lehrbücher aus; er behandelt sein Thema gründlich und erschöpfend; aber er weiss auch durch geschickt gestellte Uebungsaufgaben die Anwendbarkeit der Lehrsätze für Fälle der Praxis nutzbar zu machen und seine Leser in dieser Richtung anzuregen.

Wolff's Vortrag war ein Spiegelbild seiner Schriften; bewundernswerth war die durchsichtige Klarheit in der Behandlung seines Gegenstandes; er wusste mit grosser Schärfe und Präcision Alles darzustellen, wusste die Sachen so geistvoll, wie einfach, wiederzugeben und dadurch sehr viele Dinge ihrer Schwierigkeiten zu entkleiden. Dabei war seine Methode streng wissenschaftlich.

Um Lehrer für Techniker zu sein, meinte Wolff, müsse man auch mit den technischen Arbeiten etwas vertraut sein; er erlernte deshalb sechs Handwerke, arbeitete viel in der Werkstatt des Gewerbe-Instituts und fertigte manche sauber gearbeitete Gegenstände, welche seine Familie als werthes Andenken jetzt aufbewahrt. Im Jahre 1837 erhielt er vom Institut eine Drehbank zum Geschenk.

Die angestrengte geistige Thätigkeit hatte bald einen mächtigen nachtheiligen Einfluss auf seinen Körper, er gönnte sich zwar in den Ferien Erholung, liess dann die Mathematik auf sich beruhen, dichtete und componirte; die Musik, welche ihn als Knabe schon erfreute, gewährte ihm noch Genuss in den letzten Lebensjahren. Während der Ferienzeit wohnte er häufig in dem schönen Ilsenburg am Harze, wo er sich am glücklichsten fühlte. Frühzeitig stellten sich bei ihm Leiden ein, die sein geistiges und körperliches Leben drückten und ihn nur auf kurze Zeit verliessen, wenn er allen geistigen Arbeiten entsagte.

Von Ilsenburg aus hat mancher seiner Zuhörer eines Briefes sich zu erfreuen gehabt, er kannte seine Schüler und nahm viel Theil an ihnen, verlangte aber, da er selbst so viel geleistet, dass

auch Andere mit aller Energie arbeiteten, und so kam es denn, dass er zuweilen bei den cursorischen Repetitionen streng verfuhr; glaubte er dann aber Jemand wehe gethan zu haben, so hat er das mehrfach durch ein paar liebevolle Zeilen wieder gut gemacht. Die Herbstferien 1852 hatte Wolff in Ilmenau verlebt; er erkrankte zu Ende derselben und konnte mit dem Beginne des Semesters nicht in Berlin sein, er wurde bis zum März durch Prof. Röber vertreten. Da seine Krankheit nicht gehoben war, übernahm hierauf Prof. Schellbach seinen Unterricht auf mehrere Monate. Leider nahm sein Uebel so überhand, dass er vorläufig jeder geistigen Thätigkeit entsagen musste und zunächst nicht daran denken konnte, wieder zu dociren.

Im Jahre 1854 den 1. Juli wurde er in den Ruhestand versetzt; er zog nach Schleusingen in Thüringen, verlebte dort vier Jahre und gab die Hoffnung nicht auf, dass seine Gesundheit sich retabliren und er wieder eine Thätigkeit als Lehrer aufnehmen können würde. Leider ist ihm dieser Wunsch versagt worden, er hat sogar seine literarische Thätigkeit aufgeben müssen. Manches, was er sich noch vorgenommen hatte zu bearbeiten, so ein Werk über Mechanik, das ihm lange vorschwebte, ist nicht zur Ausführung gekommen.

In den letzten drei Jahren seines Lebens wohnte er in Bunzlau, eine langwierige Unterleibskrankheit hatte seine Lebenskraft schon längst geschwächt; er verstarb am 15. Februar 1861, betrauert von seiner Frau und seinen drei Kindern, so wie Allen, welche ihm näher gestanden haben. W.

---

## Mechanik.

Elementi di Meccanica razionale con appendice sui principii fondamentali delle Matematiche di Domenico Chelini, delle Scuole Pie, Professore nell' Università di Bologna. Bologna, Giuseppe Legnani Editore. 1860. 8°.

Je weniger dieses im vorigen Jahre erschienene ausgezeichnete Werk eines der scharfsinnigsten italienischen Mathematiker bis jetzt in Deutschland bekannt sein dürfte: desto mehr halten wir uns für verpflichtet, demselben in unseren Literarischen Berichten eine etwas ausführlichere Anzeige zu widmen.

Der eigentlich mechanische Theil besteht nach einer kurzen Entwickelung der wichtigsten allgemeinen Grundbegriffe aus drei

Büchern. Das **erste Buch** enthält die **Statik**, das **zweite Buch** die eigentliche **Dynamik** und das **dritte Buch** ist der **Mechanik der flüssigen Körper** gewidmet.

In der **Statik** geht der Herr Verfasser von dem Parallelogramm der Kräfte aus und beweist dasselbe im Ganzen nach **Duhamel**, die Behandlung der auf **einen** Punkt wirkenden Kräfte ist aber eine in mehrfacher Beziehung ihm eigenthümliche, wobei er öfteren Gebrauch von den in dem rein mathematischen Anhange, den wir nachher weiter besprechen werden, entwickelten Sätzen macht. Hieran schliesst sich die Theorie der parallelen Kräfte mit interessanten Bemerkungen über das Centrum solcher Kräfte, worauf dann eine elegante Theorie der Transformation und Zusammensetzung der Kräftepaare folgt, die wir, eben so wie die nun folgende Theorie der an einem starren Systeme wirkenden Kräfte, besonders zur Beachtung empfehlen. Hauptsächlich empfehlen wir aber unseren Lesern auch die Theorie des Gleichgewichts veränderlicher Systeme, insbesondere des Gleichgewichts eines Punktes auf einer Fläche, der Seilpolygone und Seilcurven, der Kettenlinie als eines besonderen Falls hievon, der Gleichgewichtsgestalt der Rotationsflächen mit Anwendungen auf Gewölbe u. s. w., der elastischen Linie u. s. w., wobei wir bemerken, dass, wenn wir uns hier auch der Kürze wegen zur allgemeinen Bezeichnung der betreffenden Gegenstände der vorhergehenden specielleren Ausdrücke bedient haben, allen diesen Dingen doch eine sehr allgemeine Behandlung zu Theil geworden ist. Den Beschluss der Statik macht eine allgemeine und sehr vollständige Behandlung der Lehre vom Schwerpunkte mit einer grossen Anzahl interessanter Anwendungen.

Die **Dynamik** zerfällt in drei Hauptabschnitte, nämlich: **Bewegung eines Punktes**, **Bewegung eines Systems** und **Allgemeine Mechanik**, d. h. die allgemeinsten Principien der Statik und Dynamik. Wie gewöhnlich unterscheidet der erste Abschnitt **freie geradlinige** und **freie krummlinige Bewegung**, und **Bewegung auf einer Curve und einer Fläche**. Der zweite Abschnitt handelt zuerst im Allgemeinen von den Principien, durch welche die Verbindung zwischen der Statik und Dynamik hergestellt wird, woran sich die Theorie der Rotation um eine Axe und eine sehr instructive Theorie der Trägheitsmomente anschliesst, so wie die weitere Ausführung der Theorie der drehenden Bewegung mit vielen dem Herrn Verfasser eigenthümlichen Darstellungen, die Theorie des Stosses, die Theorie der relativen Bewegung mit Anwendungen auf den Fall der Körper und die Anwendung des Pendels als Beweismittel für die Rotation der Erde.

Der dritte, die **allgemeinsten Principien der Mechanik** betreffende Abschnitt ist für uns von ganz besonderem Interesse gewesen, und wir unterlassen nicht, denselben der Beachtung unserer Leser ganz besonders zu empfehlen, da dieselben sich überzeugt halten können, in demselben eine sehr schöne Darstellung jener allgemeinsten Principien der Mechanik zu finden. Den Anfang macht natürlich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, mit einigen specielleren Anwendungen auf den Hebel, die Schraube und die Ableitung der allgemeinsten Bedingungen des Gleichgewichts aus dem genannten Princip für starre und biegsame Systeme. Ferner werden aus demselben die allgemeinsten Eigenschaften eines in Bewegung befindlichen Systems abgeleitet, die dynamischen Differentialgleichungen von Lagrange und Hamilton bewiesen und noch eine andere Form dieser Gleichungen betrachtet. Hierauf wendet sich der Herr Verfasser zu den Principien der lebendigen Kräfte und der kleinsten Wirkung mit deren Anwendungen. Eine sehr lehrreiche allgemeine Anleitung zur Berechnung des Effects einer Maschine macht den Beschluss dieses dritten Hauptabschnitts der Dynamik.

Die **Mechanik der flüssigen Körper** zerfällt in **Hydrostatik** und **Hydrodynamik**, in Bezug auf tropfbar und ausdehnsam flüssige Körper, mit vielfachen Anwendungen, unter denen natürlich auch das Höhenmessen mit dem Barometer nicht fehlt, Alles aber natürlich aus allgemeinen analytischen Grundgleichungen abgeleitet.

Wir sind durch die Natur dieser literarischen Berichte genöthigt gewesen, uns auf die obige Angabe des Inhalts nach seinen Haupttheilen zu beschränken. Unser Urtheil im Allgemeinen stehen wir nicht an, dahin auszusprechen, dass dieses Werk ganz den neueren Fortschritten der Mechanik entspricht, und sich namentlich, wie es der jetzige Charakter dieser so überaus schönen Wissenschaft fordert, durch grosse Allgemeinheit auszeichnet, dabei aber nie unterlässt, die Anwendung der allgemeinen Principien an Beispielen, ja selbst deren Bedeutung für die Praxis zu zeigen. Was die Darstellung betrifft, so zeichnet sich dieselbe durch Einfachheit und eine in vielen Beziehungen sehr geschickte Verbindung geometrischer und analytischer Betrachtungen aus, wenn auch natürlich, wie dies der gegenwärtige Zustand der Wissenschaft unbedingt fordert, das analytische Element überall in den Vordergrund tritt. Wir sind der Meinung, dass unter den neueren Werken über Mechanik dem vorliegenden eine der ersten Stellen gebührt, weshalb wir eine Uebertragung desselben in's Deutsche von geschickter Hand für ein sehr dankenswerthes Unternehmen halten

würden. Jedenfalls würden wir darin eine Bereicherung der deutschen Literatur auf dem Gebiete der mechanischen Wissenschaften erkennen.

Der Anhang, dem der Herr Verfasser den Titel: „Sui Principii fondamentali delle Matematiche“ gegeben hat, wodurch man sich aber nicht, wie dies leicht der Fall sein könnte, zu einer falschen Ansicht über dessen Inhalt verleiten lassen darf, enthält viele interessante Sätze und analytische Ausdrücke, die Behufs der Vereinfachung des Ausdrucks vieler in der Mechanik vorkommender Gesetze treffliche Dienste leisten, und muss in dieser Beziehung ebenfalls der Beachtung der Leser empfohlen werden, um so mehr, weil darin viele dem Herrn Verfasser besonders eigenthümliche Darstellungen vorkommen. Hier müssen wir uns leider mit der folgenden allgemeinen Inhalts-Angabe begnügen: Della dualità nel modo di essere delle quantità, e principio corrispondente. — **Teoria della composizione delle linee.** Del principio della Retta risultante. — **Teoria della composizione delle aree. Capo I.** Della projezione ortogonale ed obliqua delle aree. **Capo II.** Dell principio dell' Area risultante. — **Nozioni fondamentali sulla curvatura delle linee. — Del Principio di proporzione tra le quantità variabili.** (Verschiedene, an sich ziemlich einfache arithmetische Sätze, die aber bei analytischen Transformationen oft gute Dienste leisten.) — **Uso degl' immaginarii.** (Bekannte Sätze und Formeln über imaginäre Grössen und hyperbolische Functionen.) — **Prime nozioni e proprietà fondamentali delle sezioni coniche. — Cicloide.**

Möge dieses Werk nochmals den Lesern des Archivs recht sehr zur Beachtung empfohlen sein und sich bald ein Uebersetzer desselben finden! Grunert.

Des ganz nahe verwandten Inhalts wegen verbinden wir mit der vorhergehenden Anzeige sogleich eine kurze Anzeige der folgenden ausgezeichneten Schrift desselben verehrten Herrn Verfassers:

Determinazione analitica della rotazione de' corpi liberi secondo i concetti del Signor Poinsot. Memoria del Prof. Domenico Chelini. (Estratta dal Vol. X. delle Mem. dell' Acc. delle Scienze dell' Instituto di Bologna). Bologna. 1860. 4°.

Poinsot's scharfsinnige Theorie der Drehung ist bekannt. Herr Domenico Chelini fand, wie er auf S. 3. selbst sagt, bei

dem Studium dieses wahrhaft neuen und originalen Werkes, dass sich der algebraische Theil auf eine leichtere, kürzere und directere Weise entwickeln liess, als von seinem berühmten Urheber geschehen ist. Zugleich aber ergab sich, dass auch der Ausdruck der Cosinus, durch welche als Functionen der Zeit die Lage des Mobils in jedem Momente bestimmt wird, worin die definitive Lösung des Problems enthalten ist, sich in überraschend einfacher und unmittelbarer Weise geben liess. Wir halten diese schöne Abhandlung für einen sehr wichtigen Nachtrag zu der berühmten Arbeit Poinsot's, und würden, da diese letztere in Deutschland an Herrn Prof. Schellbach in Berlin einen so geeigneten Uebersetzer gefunden hat, wünschen, dass auch die vorliegende Abhandlung des Herrn Chelini bald einen Uebersetzer bei uns finden möchte.

Die Grundgesetze der Dynamik von W. F. Guischard. Leipzig. Holtze. 1861. 8°.

Es ist eine wahrhaft bedauerliche und der deutschen Literatur nicht wenig zur Schande gereichende Erscheinung, dass bei uns immer noch Schriften erscheinen, die auf jeder Seite die grösste Unwissenheit in den elementarsten mathematischen Dingen und die corruptesten Begriffe an den Tag legen, und sich doch einfallen lassen, die Wissenschaft zu reformiren. Ueber solchen Quark hier weiter zu berichten, wird man uns hoffentlich nicht zumuthen, weshalb wir auch über ein vor einiger Zeit erschienenes, zum Erschrecken dickleibiges physico-mechanico-astronomisches Werk, worin in der angedeuteten Beziehung das Ungeheuerlichste geleistet worden ist, ganz geschwiegen haben.

---

## Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apostolischen Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte. Dritter Folge zehnter Band. Jahrgang 1860. Wien. 1861. 8°.

Der Jahrgang 1859 dieser so überaus verdienstlichen, im regelmässigsten Fortschritt begriffenen Annalen ist im Literar. Bericht Nr. CXLI. S. 12. angezeigt worden. Für die Beobachtungen am Meridiankreise ist die Anordnung des Druckes, welche in letzterer Zeit mancherlei Aenderungen erfuhr, in sehr zweckmässiger Weise von dem vorliegenden Bande an eine definitive geworden,

welche fortan beibehalten werden wird. Dieselben waren den Herren Allé, Weiss, Hornstein und Murmann überwiesen. Die auch in diesem Jahrgange wiederum überaus fleissigen, vollständigen und verdienstlichen Planeten- und Cometen-Beobachtungen am Refractor von sechs Zoll Oeffnung fielen ganz Herrn Hornstein anheim. Die gleichen Beobachtungen am vierzölligen Refractor waren den Herren Murmann und Löwy anvertraut. Die Zonenbeobachtungen am Mittagsrohre bilden eine ungeänderte Fortsetzung der früheren Publicationen, und rühren noch aus der Zeit her, wo Herr Oeltzen mit diesen Beobachtungen betraut war. Die meteorologischen Beobachtungen für 1859, Tafeln zur Reduction der Zonenbeobachtungen und eine Uebersicht der Zonen bilden den Schluss des vorliegenden Bandes, und liefern einen neuen, sehr erfreulichen Beweis von der unausgesetzten, auf bestimmte Ziele gerichteten Thätigkeit der Wiener Sternwarte unter der Leitung ihres schon so vielfach verdienten Directors.

In der angeführten Nummer des literarischen Berichts haben wir zugleich hingewiesen auf die wichtige Publication der älteren meteorologischen Beobachtungen an der Wiener Sternwarte von 1775 bis 1855, welche unter der Leitung der Herren v. Littrow und Hornstein auf öffentliche Kosten begonnen hat, und von Neuem höchst rühmliches Zeugniss ablegt von dem Eifer und der Bereitwilligkeit, womit, keine Opfer scheuend, von der österreichischen Regierung die exacten Wissenschaften in jeder Weise gefördert und unterstützt werden, was in ganz Deutschland mit dem lebhaftesten Danke anerkannt und gewürdigt zu werden verdient. Der zweite, 364 Seiten starke Band dieser Beobachtungen liegt uns jetzt vor, schliesst sich unmittelbar an den ersten (siehe Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 13) an und umfasst die Jahre 1797—1809. Als Ergänzung zu den früheren Beobachtungen ist in einem Anhange das Tagebuch über Richtung und Stärke des Windes vom 3. Februar 1754 bis 31. December 1790 und vom 9. Februar 1793 bis 31. December 1797 mitgetheilt worden. Möge es den Herren Herausgebern gelingen, auch dieses verdienstliche Unternehmen bald mit rüstiger Kraft zu Ende zu führen!

---

## Physik.

Die Fluorescenz des Lichtes. Vorgetragen von F. J. Pisko, Lehrer der Physik an der Communal-Ober-Realschule auf der Wieden und an der damit in Ver-

bindung stehenden Gewerbeschule in Wien. Mit in den Text aufgenommenen Holzschnitten. Wien. Gerold. 1861. 8°.

Diese Schrift ist als eine erweiterte Ausgabe eines Schulprogramms der Wiedner Communal-Ober-Realschule in Wien für das Schuljahr 1859—60 zu betrachten. Jedenfalls war eine vollständige und ausführlichere Behandlung der merkwürdigen Erscheinungen der „Fluorescenz des Lichtes" eine sehr zweckmässige Aufgabe für ein Schulprogramm. Der Gegenstand gestattet für jetzt, da eine vollständig genügende theoretische Erklärung leider noch nicht gegeben werden kann, vorzugsweise eine experimentelle Behandlung; die dazu erforderlichen Apparate sind aber im Ganzen so einfach, dass sie von einem Jeden, der sich für diesen merkwürdigen Gegenstand interessirt, leicht beschafft werden können, die Versuche selbst gestatten wegen der grossen Mannigfaltigkeit der anwendbaren Stoffe eine Vervielfältigung in's Unendliche, und geben auch zur Verwerthung chemischer Kenntnisse in sehr lehrreicher Weise Veranlassung. Der Herr Verfasser hat daher seiner Schrift ganz mit Recht bei Weitem vorzugsweise einen experimentellen Charakter gegeben und nur in der Kürze, aber doch mit hinreichender Deutlichkeit, in dem *Abschnitte III.* S. 94.—S. 100. vorzugsweise die von Stokes und Eisenlohr gegebenen Erklärungen erläutert. Der *Abschnitt I.* enthält die Haupt- oder Fundamental-Lehren der Fluorescenz nach folgenden Rubriken: A. Grundversuche mit dem Sonnenlichtkegel oder mit gesammeltem Sonnenlichte. B. Geschichtliche Rückschau bezüglich der vorigen Fundamental-Beobachtungen und versuchte Erklärungen. C. Grundversuche im einfarbigen (homogenen) Lichte oder im prismatischen Farbenbilde im Sonnenlicht-Spectrum. D. Grundversuche mit durchsichtigen farbigen Zwischenmitteln. E. Grundversuche mit künstlichem Lichte. Der *Abschnitt II.* behandelt die wissenschaftlichen Untersuchungs-Methoden und deren Hauptergebnisse, und zwar: A. Spectoral-Methoden. B. Complementär-Methoden von Stokes und Fluorescenz-Dunkelkammern. C. Allgemeinere Ergebnisse. Endlich handelt *Abschnitt IV.* von den verschiedenen sehr interessanten (auch physiologischen) Anwendungen, die von der Fluorescenz vorzüglich von Stokes, Crookes, Gladstone, Brücke, Helmholtz, Eisenlohr und Esselbach gemacht worden sind.

Die Versuche sind überall sehr deutlich beschrieben und durch trefflich ausgeführte Holzschnitte erläutert worden, sô wie die Schrift sich überhaupt einer ausgezeichneten äusseren Ausstattung

erfreuet. Die Literatur und Geschichte des Gegenstandes hat stets die sorgfältigste Berücksichtigung gefunden; jedoch hat der Herr Verfasser sich keineswegs bloss mit der Angabe und Erläuterung fremder Arbeiten begnügt, sondern diese interessante Lehre auch mit einer Reihe neuer experimenteller Untersuchungen bereichert, wovon namentlich die Tabelle auf S. 41. — S. 45. einen sehr erfreulichen Beweis liefert.

Möge der Herr Verfasser aus dieser bezüglich des Umfangs der Schrift ziemlich ausführlichen Anzeige ersehen, mit wie vielem Interesse wir seine Schrift, die für uns selbst sehr lehrreich gewesen ist, gelesen haben. Wir empfehlen dieselbe allen Lehrern der Physik an höheren Unterrichts-Anstalten, aber auch allen Liebhabern der Physik, die in derselben einen reichen Stoff zu interessanten leicht ausführbaren Versuchen finden werden, und sind überzeugt, dass man sonst nirgends eine so ausführliche, zugleich auch zu eigenen weiteren Untersuchungen so zweckmässig anregende Darstellung des interessanten und wichtigen Gegenstandes finden wird. G.

---

## Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXLIV. S. 10.)

Nr. 6. (Novembre e Decembre 1860.). Intorno ad una proprietà delle superficie curve, che comprende in se come caso particolare il teorema di Dupin sulle tangenti conjugate. Nota del Dr. L. Cremona. p. 325. — Sopra la teorica generale delle superficie curve. Nota del Prof. Enrico Betti. p. 336. — Sur les covariants des formes binaires du cinquième degré. Par M. Mich. Roberts. p. 340. — Sur la surface parallèle à l'ellipsoide. Par M. A. Cayley. p. 345. — Sopra due proposizioni di Navier intorno alla curvatura delle curve a doppia curvatura. Nota del Prof. F. Chiò. p. 353. — Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve. Memoria del Prof. F. Casorati. p. 363. — Pubblicazioni recenti. p. 379. — Lettera del P. Angelo Secchi al Sig.r D. B. Boncompagni. (Betrifft die von Hind ausgesprochene Meinung, dass die Erde durch den Schweif des letzten Cometen gegangen sei.) p. 380.

**Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.** Siehe Literarischer Bericht Nr. CXLIV. S. 6.

Mai 1861. Dove: Ueber die aus dem Drehungsgesetze folgenden Bewegungen des Barometers und Thermometers in Nordamerika nach den von Herrn Dörgens berechneten Beobachtungen von Toronto. S. 472—475. — Dove: Beschreibung eines Photometers. (Wir machen auf diesen ausführlicheren Aufsatz aufmerksam. Das von Herrn Dove angewendete Verfahren hat vor den in solchen Fällen, wo die zu vergleichenden Lichtquellen verschiedenfarbig sind, oder wenn es sich um die Bestimmung der Helligkeit des in einem gegebenen Raume zerstreu'ten Lichts handelt, endlich wenn die Lichtmenge gemessen werden soll, welche ein sehr kleiner oder nur schwach durchscheinender Körper hindurch lässt, bisher von Bunsen, Babinet, Pouillet, Rumford, Wheatstone angewendeten Verfahrungsarten die Vorzüge, dass es äusserst empfindlich ist, auf helle und schwach leuchtende, gleich oder verschieden farbige, durchsichtige oder undurchsichtige Objecte beliebiger Grösse in gleicher Weise anwendbar, zur Bestimmung der Lichtstärke optischer Instrumente ebenfalls geeignet ist, dass es ganz verschiedene Messungsarten gestattet, die einander gegenseitig controliren, endlich dass es vermittelst eines Instruments erhalten wird, des Mikroskops nämlich, welches ohnehin schon in den Händen jedes beobachtenden Naturforschers ist.) S. 483—499. — Dove: Ueber eine durch Photographie hervorgetretene, direct nicht wahrgenommene Lichterscheinung und über photographische Darstellung des geschichteten elektrischen Lichtes. S. 499—501. — Dove: 1. Ueber Binocularsehen und subjective Farben. 2. Ueber den Glanz. S. 521—525.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

## XLVI.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Herausg. von E. A. Zuchold. 11. Jahrg. 1. Hft. Januar — Juni 1861. gr. 8°. Göttingen. 8 Ngr.

G. Friedlein, Gerbert, Die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern. Ein Versuch in der Geschichte der Arithmetik. gr. 8°. geh. Erlangen. 12 Ngr.

### Arithmetik.

Hm. Fischer, V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen. Mit 29 Holzschn. Halle. 8°. 1 Thlr.

Neueste Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. 6. Bd. 2. u. 3. Hft. Danzig. 4°. 1 Thlr. 10 Ngr. — Inhalt: Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometr. Functionen des Kreises und der Hyperbel. Von J. F. W. Gronau. Mit 1 Taf.

Ph. Kramer, Elementar-Mathematik für Gymnasien. I. Abth.: Elementar-Arithmetik. 2. Aufl. gr. 8°. Augsburg. 24 Ngr.

### Geometrie.

G. Battig, Elementar-Geometrie. Für Oberklassen von Volksschulen und Praeparanden-Anstalten. geh. 8°. Halle. 5 Ngr.

A. Clementini, Manuale di geometria teorico-pratica. 2. Ediz. 8°. geh. Triest. 20 Ngr.

C. Güntner, Lehrbuch der darstellenden Geometrie mit eingehender Anleitung zur Schattenconstruction, Linear-Perspective und axonometrischen Darstellung für Realschulen und zum Selbstunterricht. 8°. geh. Wien. 1 Thlr.

Planimetrisches Lehrpensum der Quarta, Tertia und Secunda des königl. Friedrich-Wilhelm-Gymnasiums zu Köln. 8°. cart. Köln. 3 Ngr.

A. Müller, Grundgesetze der Configuration der algebraischen Curven. gr. 4°. geh. Wien. 1 Thlr.

Serenus v. Antissa, Ueber den Schnitt des Kegels. Aus dem Griechischen von E. Nizze. gr. 4⁰. geh. Stralsund. 20 Ngr.

J. Wenck, Die Geometrie, enthaltend: Planimetrie, Stereometrie und ebene Trigonometrie. Ein Lehr- und Handbuch für Schüler gewerblicher Lehranstalten, so wie zum Selbstunterricht. gr. 8⁰. geh. Leipzig. 15 Ngr.

J. P. Wich's mathematischer Formelnschatz. I. Abth.: Geometrischer Formelnschatz. gr. 8⁰. Lindau. geh. 15 Ngr.

## Geodäsie.

J. J. Baeyer, Ueber die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mittel-europäischen Gradmessung nebst einer Uebersichtskarte. Berlin. 8⁰. 20 Ngr.

F. G. W. Struve, Arc du méridien de 25⁰ 20′ entre le Danube et la Mer Glaciale, mesuré, depuis 1816 jusqu'en 1855, sous la direction de C. de Tenner, N. H. Selander, Chr. Hansteen et F. G. W. Struve. Ouvrage composé sur les différents matériaux. 2 Tomes. St.-Pétersbourg, Leipzig. 4⁰. Mit 28 Kpfrtaf. u. 2 Tab. 11 Thlr. 3 Ngr.

W. Struve, Vergleichungen der Wiener Maasse mit mehreren auf der kaiserl. russischen Haupt-Sternwarte zu Pulkowa befindlichen Maasseinheiten. Lex.-8⁰. geh. Wien. 4 Ngr.

## Mechanik.

H. Hankel, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten. Gekrönte Preisschrift. gr. 4⁰. Göttingen und Leipzig. geh. 20 Ngr.

Arn. Hölty, Die Bewegung als Princip der mathematischen Grundbegriffe. Göttingen. 8⁰. 16 Ngr.

V. v. Vieth, Die Flugbahn der Geschosse nach ihrer eigenthümlichen Form und nach ihren räumlichen und zeitlichen Maassbestimmungen auf die bis jetzt gewonnenen Erfahrungen begründet. Mit 1 Taf. graphisch dargestellter Flugbahnen. Dresden. 8⁰. 20 Ngr.

## Astronomie.

V. Onderka, Mathematische Geografie. Ein Leitfaden für Lehrer und Lernende. gr. 8⁰. geh. Wien. 1 Thlr. 10 Ngr.

F. W. A. Argelander, Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte der kgl. rhein. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn. 4. Bd. Bonner Sternenverzeichniss. 2. Sect. gr. 4⁰. geh Bonn. 5 Thlr.

Atlas des nördlichen gestirnten Himmels für den Anfang des Jahres 1855, entworfen auf der königl. Sternwarte zu Bonn. 7. Lief. qu. Imp.-Fol. Bonn. 3 Thlr.

Commentaire et discussion du système planétaire de l'astronome J. Perny Villeneuve. Par un ancien officier de l'état-major. Wien. 8°. 2 Thlr. 20 Ngr.

J. A. Grunert, Directe Bestimmung der Durchschnittspunkte der Bahnen zweier in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegender Weltkörper. gr. 4°. geh. Wien. 18 Ngr.

Handatlas der Erde und des Himmels. Neu redig. Ausgabe. 61.—63. Lief. Imp.-Fol. Weimar. à 10 Ngr.

O. Struve, Tabulae quantitatum Besselianarum, quibus apparentes stellarum positiones in medias convertuntur adhibitis numeris constantibus Pulcovensibus pro a. 1840 ad 1864 computatae. Lex.-8°. Petropoli et Lipsiae. geh. 28 Ngr.

## Physik.

W. v. Bezold, Ueber die physikalische Bedeutung der Potential-Function in der Electricitäts-Lehre. gr. 8°. München. geh. 8 Ngr.

J. Crüger, Grundzüge der Physik mit Rücksicht auf Chemie als Leitfaden für die mittlere physikalische Lehrstufe methodisch bearbeitet. 7. Aufl. gr. 8°. geh. Erfurt. 15 Ngr.

H. W. Dove, Das Gesetz der Stürme in seiner Beziehung zu den allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. Mit Holzschn. und 1 Karte. 2. völlig umgearb. Aufl. Berlin. 8°. 1 Thlr.

Allgemeine Encyclopädie der Physik. Bearbeitet von Brix etc. 10. Lief. Lex.-8°. geh. Leipzig. 2 Thlr. 20 Ngr.

A. W. Fils, Barometer-Höhen-Messungen von dem Herzogthum S.-Meiningen ausgeführt in den Jahren 1855 bis 1859. Mit Kartenskizze. Meiningen. 8°. 24 Ngr.

J. Heussi. Die Experimental-Physik methodisch dargestellt. 1. Kursus: Kenntniss der Phaenomene. 8. Aufl. gr. 8°. geh. Berlin. 15 Ngr.

J. C. Houzeau, Klima und Boden, die Lehre von der Witterung, die Veränderungen des Wetters und die Gestaltung der Erde, sowie die wechselseitigen Beziehungen zwischen dieser und der Atmosphäre. Frei bearbeitet nach der franz. Ausg. 8°. geh. Leipzig. 24 Ngr.

P. A. Kesselmeyer, Ueber den Ursprung der Meteorsteine. Mit 3 Taf. (Abgedr. aus den Abhandlgn. der Senckenberg. naturforsch. Gesellsch.) Angehängt: Versuch eines Quellenverzeichnisses zur Literatur über Meteoriten. Von O. Buchner. Frankfurt a. M. Brönner. 4°. 3 Thlr. 10 Ngr.

W. M'Leod, Physikal atlas of Great Britain and Ireland; with illustrive letterpress. Square 16. London. Cloth. 7 s. 6 d.

M. F. Maury, The Physical Geography of the Sea and its Meteorology 10th edition revised. London. 8°. 3 Thlr 12 Ngr.

Th. Molt, Wandkarten zur physikalischen Erdbeschreibung. Zum Gebrauche in Schulen. 2. Aufl. 6 color. lith. Bl. Imp.-Fol. in Mappe. Stuttgart. 1 Thlr. 6 Ngr.

Observations météorologiques faites à Nijné-Taguilsk (monts Ourals, gouvernement de Perm). Année 1859. Paris. 8°.

C. Robida, Erklärung der Lichterscheinungen aus den Grundzügen einer naturgemässen Atomistik. 2. Hft. gr. 8°. Klagenfurt. 9 Ngr.

G. Shepherd, The Climate of England: its Meteorological Character explained, and the Changes of Future Years revealed. London. 4°. 3 Thlr. 12 Ngr.

G. Wiedemann, Die Lehre vom Galvanismus und Electromagnetismus. II. Bd. a. u. d. T.: Die Lehre von den Wirkungen des galvanischen Stromes in die Ferne. I. Abth. gr. 8°. geh. Braunschweig. 2 Thlr. 15 Ngr.

Zandyck, Histoire météorologique et médicale de Dunkerque (Nord), de 1850 à 1860. Dunkerque. 8°.

## Vermischte Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1860. gr. 4°. Berlin. geh. 8 Ngr.

Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1860. gr. 4°. geh. Berlin. 2 Thlr. 22 Ngr.

# Literarischer Bericht
## CXLVII.

## Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Eilfter Jahrgang 1861.

Der zehnte Jahrgang dieses Almanachs ist im Literar. Ber. Nr. CXLIII. S. 1. angezeigt worden. Auch der vorliegende Jahrgang bewahrt seine von uns schon öfters hervorgehobene Wichtigkeit für die Geschichte und Literatur der Mathematik und Naturwissenschaften. Der Bericht des hochverdienten General-Sekretärs, des Herrn Professor Dr. A. Schrötter, über die Arbeiten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse giebt wiederum ein sehr vollständiges und anschauliches Bild von den ausgebreiteten Leistungen dieser Klasse, und enthält sehr interessante Lebensbeschreibungen der beiden verstorbenen verdienten Physiker und Mathematiker G. Belli und W. Wertheim, so wie vollständige Verzeichnisse der von denselben herausgegebenen Schriften.

Giuseppe Belli war zu Calasca, einem Dorfe im Valle-Anzasca in der Provinz Domodossola am 25. November 1791 geboren, und erhielt seine Vorbildung zu den Universitätsstudien in Pavia, wo er im Jahre 1812 auch die Doctorwürde der physisch-mathematischen Facultät erwarb. Er widmete sich zuerst dem praktischen Ingenieurdienst, ward aber im Jahre 1820 Assistent bei der Lehrkanzel der Physik und Elementar-Mathematik an der Universität in Pavia, 1821 ordentlicher Professor der Physik am kaiserlichen Lyceum Porta nuova in Mailand, 1840 zur

gleichen Lehrkanzel an der Universität in Padua versetzt, und endlich 1842 ordentlicher Professor der Physik an der Universität in Pavia, wo er bis zu seinem am 1. Juni 1860 erfolgten Tode segensreich gewirkt hat. Belli gehörte zu der nicht grossen Anzahl von Physikern, welche den mathematischen Calcul mit grosser Gewandtheit zu handhaben verstehen, war aber auch ein scharfsinniger und gewandter Experimentator, wobei er sich jedoch immer auf streng mathematischem Wege bewegte, wozu er durch seine trefflichen mathematischen Kenntnisse befähigt war. Arbeiten über Molecularanziehung, über die Luftpumpe (wo er schon drei Jahre vor Babinet den jetzt nach diesem benannten Hahn beschrieb), über das Thermometer und Hygrometer, über Elektricitätslehre, wo er Melloni's Theorie der elektrostatischen Induction entscheidend widerlegte, über Meteorologie u. s. w. beschäftigten ihn nach einander. Glänzend war seine Befähigung als Lehrer, mit der grössten Gewissenhaftigkeit in der Erfüllung seiner Berufspflichten verband er die anspruchsloseste Bescheidenheit, und besass die Sympathie Aller, die ihn kannten. Italien verlor an ihm einen seiner ausgezeichnetsten Physiker. Unter seinen Schriften nimmt sein trefflicher Corso elementare di fisica esperimentale, welcher in drei Bänden in den Jahren 1830 bis 1838 erschien, die erste Stelle ein.

Wilhelm Wertheim wurde im März 1815 in Wien von israelitischen Eltern geboren, und wandte seinen Fleiss hauptsächlich der Physik zu, da dieses Studium seinem mathematischen Talente Befriedigung versprach. Im Jahre 1840 ging er nach Paris, wo er sich hauptsächlich mit höchst verdienstlichen Arbeiten über die Elasticität beschäftigte, ausserdem über den Schall und Akustik überhaupt, über Doppelbrechung, u. s. w. Seine letzte grössere Arbeit betraf die so wichtigen Erscheinungen der Torsion von Cylindern und Stäben, an die sich in den letzten Jahren seines Lebens noch einige andere, die sich mehr oder weniger vollendet in seinen nachgelassenen Papieren finden müssen, über Capillarität, über die kubische Compressibilität einiger homogener fester Körper, u. s. w. anschlossen. Im Jahre 1860 wurde sein sonst so freier und heiterer Geist zeitweise von einem tiefen Trübsinn befallen; nach dem Journal d'Indre et Loire verlangte er am 20. Januar d. J. in Tours, wohin er auf dringendes Anrathen seines Arztes gereist war, mit Ungeduld, auf den Thurm der Kathedrale von Saint-Gatien geführt zu werden. Nachdem er in grosser Eile die Plattform erstiegen hatte, schwang er sich in sichtlich krankhafter, heftiger Aufregung auf die Brüstung, und stürzte sich, ehe der ihn beglei-

tende Küster es hindern konnte, hinab auf den Platz. So endete ein Mann von seltenem Talente in der vollen Blüthe seiner Kraft!

Den Schluss des vorliegenden Jahrgangs des Almanachs macht ein sehr interessanter Vortrag des Herrn Franz Ritter von Hauer: Die Geologie und ihre Pflege in Oesterreich den wir unseren Lesern recht sehr zur Beachtung empfehlen.

---

## Geometrie.

J. A. Müttrich: Sammlung stereometrischer Aufgaben, zusammengestellt aus seinen Diarien und aus den Arbeiten seiner Schüler. Königsberg. Bon. 1861. 8.

Herr Oberlehrer v. Behr in Königsberg i. P., dessen Name zwar nicht auf dem Titel, aber unter der Vorrede genannt ist, hat sich durch Herausgabe dieser Sammlung stereometrischer Aufgaben jedenfalls ein Verdienst um den mathematischen Unterricht erworben. Von einem sehr verdienten Lehrer, dem Professor J. A. Müttrich, welcher eine lange Reihe von Jahren den mathematischen Unterricht auf dem Altstädtischen Gymnasium in Königsberg i. P. mit seltenem Geschick ertheilte, und es verstand, nicht bloss die fähigeren Schüler für die Wissenschaft zu begeistern, sondern auch im Ganzen ein reges Interesse für dieselbe in der Schule zu erwecken, wobei er auf die Stereometrie mit Recht ganz besonderes Gewicht legte, sind diese Aufgaben, — 178 an der Zahl, — nicht etwa bloss gesammelt, sondern bei Weitem dem grössten Theile nach selbst erfunden und gebildet worden, worin derselbe ein seltenes Talent besass. In der That müssen wir sagen, dass uns diese Aufgaben, denen überall in zweckmässiger Weise die Resultate der Auflösungen beigefügt sind, oft durch ihre Neuheit überrascht haben, und auch darin stimmen wir dem Herrn Herausgeber bei, dass sich dieselben zu dem Gebrauche auf Schulen auch dadurch besonders eigenen, weil sie, in sinniger Weise erdacht, zu ihrer Lösung keinen sehr grossen Umfang von Vorkenntnissen erfordern, also auch schwächere Schüler nicht abschrecken werden. Zunächst für preussische Lehrer werden diese Aufgaben auch deshalb noch von besonderem Interesse sein, weil sie mehrfach für die Abiturientenarbeiten benutzt und theilweise aus denselben jetzt zusammengestellt worden sind, so wie denn überhaupt die preussischen mathematischen Abiturientenarbeiten, wenn man namentlich

auf die lange Reihe von Jahren, seit denen die fortwährende und regelmässige Anfertigung derselben angeordnet ist*), und auf die vielen im höchsten Grade ausgezeichneten mathematischen Lehrer, die während dieser langen Zeit an preussischen Lehranstalten gewirkt haben, von welchen die älteren, denen der mathematische Unterricht in Preussen hauptsächlich seine jetzige Bedeutung verdankt, leider meistens schon längst zur Ruhe gegangen sind**), zurückblickt, eine reiche Fundgrube trefflicher Aufgaben darbieten dürften, die wohl einmal zur Anfertigung einer Sammlung benutzt zu werden verdiente. Auch aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, ist für den Unterzeichneten die vorliegende Sammlung stereometrischer Aufgaben von grossem Interesse gewesen, und verdient gewiss allen Lehrern der Mathematik innerhalb und ausserhalb Preussens um so mehr zu sorgfältiger Beachtung empfohlen zu werden, weil bekanntlich zweckmässige stereometrische Aufgaben nicht im Ueberfluss vorhanden sind.

Möchte doch der oben ausgesprochene Gedanke, die preussischen mathematischen Abiturienten-Arbeiten zur Anfertigung einer Sammlung von Aufgaben zu benutzen, Anklang finden, vielleicht eine solche Sammlung velbst von der vorgesetzten höchsten Unterrichts-Behörde veranlasst werden, woraus unzweifelhaft ein sehr nützliches Buch hervorgehehen würde! Grunert.

---

## Maschinenlehre.

Allgemeine Maschinenlehre. Ein Leitfaden für Vorträge sowie zum Selbststudium des heutigen Maschinenwesens mit besonderer Berücksichtigung seiner Enwickelung. Für angehende Techniker, Cameralisten, Landwirthe und Gebildete jeden Standes. Von Dr. Moritz Rühlmann, Professor an der polytechnischen Schule in Hannover. Mit zahlreichen Holzschnit-

---

*) Mindestens würde man wohl bis auf das Jahr 1812 zurückgehen müssen. G.

**) Mit wahrer Herzensfreude und innigstem Danke wird der Herausgeber des Archivs hauptsächlich stets des trefflichen E. G. Fischer in Berlin, Matthias in Magdeburg und vieler anderen, die er persönlich näher zu kennen das Glück gehabt hat, gedenken. G.

ten. I. Bandes I. Hälfte. Braunschweig. Schwetschke und Sohn. 1862. 8.

Wenn uns von diesem Werke für jetzt auch nur das erste Heft (Ersten Bandes erste Hälfte) vorliegt, so glauben wir doch sogleich auf dasselbe aufmerksam machen zu müssen, weil es uns ein zeitgemässes Unternehmen zu sein scheint, und sich auch in seiner Ausführung empfehlen dürfte. Eine Theorie der verschiedenen Arten der Maschinen wird man in demselben nicht finden und wahrscheinlich auch nicht suchen, so wie denn auch der Herr Verfasser dieses Ziel sich in diesem Werke in der That nicht gesteckt hat, wenn auch einfachere theoretische Betrachtungen, wie z. B. bei den Waagen, keineswegs vollständig ausgeschlossen worden sind. Er liefert vielmehr nur eine Beschreibung der Maschinen, wobei er dieselben aber zweckmässig immer in ihre verschiedenen Haupttheile zerlegt, dieselben einzeln rücksichtlich ihrer Bedeutung und Wirkung erläutert, und in sehr sauber ausgeführten Holzschnitten darstellt, so wie die bei einem solchen Werke nicht unwichtige äussere Ausstattung überhaupt eine sehr vorzügliche und elegante ist. Zugleich enthält das Werk überall historische Notizen über die Erfindung der Maschinen, ihre Verbesserung und weitere Ausbildung, und eine grosse Anzahl der dankenswerthesten literarischen Nachweisungen, wobei der Herr Verfasser überall die ausgebreitetste Kenntniss documentirt. Da, abgesehen von verschiedenen hinreichend bekannten grossen und bändereichen Werken, ein Buch dieser Art in unserer Literatur noch nicht existiren dürfte, so verdient das vorliegende gewiss Allen, die sich für das Maschinenwesen interessiren, insbesondere aber auch Lehrern an Realschulen, Gewerbeschulen, u. s. w. recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden. In einer, viele überaus interessante Notizen enthaltenden Einleitung bespricht der Herr Verfasser die Entwickelung und Bedeutung, auch die Nachtheile u. s. w. des Maschinenwesens, und giebt zuletzt in §. 7. eine vollständige Classification der Maschinen, wodurch er zugleich den in dem Werke zu befolgenden Plan vorzeichnet, indem er namentlich auch in der lehrreichen Tabelle auf S 24. und S. 25. nach dieser Classification alle zur Zeit bekannt gewordenen Maschinen aufführt. Es werden unterschieden: **I. Maschinen zum Messen und Zählen** (Uhren, Umlauf-, Hub- und Schrittzähler, Zeug-, Wasser- und Wind-Messmaschinen, Registrirmaschinen, Dynamometer, Waagen u. s. w.). **II. Maschinen zur Verrichtung nützlicher mechanischer Arbeiten.** A) Kraftaufnehmende Maschinen. B) Transmissions- und Regulirungsmaschinen. C) Transport- und Fabricationsmaschinen.

Lassen sich auch manche andere, selbst vielleicht wissenschaftlichere Eintheilungen denken, so ist die hier angewandte doch eine recht praktische und entspricht ganz dem Zwecke dieses Werkes. Der Inhalt des vorliegenden Hefts ist folgender: **Erste Abtheilung. Maschinen zum Messen und Zählen.** Erstes Capitel. Uhren (Pendeluhr, Unruhuhr, besondere Hemmungen der Uhren, Compensationen für Pendel- und Unruhuhren, Uhren mit Centrifugalpendel, Schlagwerke der Uhren (überaus vollständig)). Zweites Capitel. Uhrwerke zu besonderen Zwecken. (Wächter-Controluhren, Bratenwender, Automat, Registrirmaschinen und Registrirapparate, Maschinen zur Veranschaulichung der Himmelskörperbewegungen). Drittes Capitel. Zähl- und Messmaschinen für besondere Zwecke (Schritt-, Hub-, Stück- und Umdrehzähler, so wie Wegmesser, Tachometer, Zeugmessmaschinen, Wasser- und Gasmesser, Rechnenmaschinen). Viertes Capitel. Waagen. I. Hebelwaagen. Gemeine Waage, Schnellwaage, zusammengesetzte Hebelwaagen (Tragbare Brückenwaagen, Feststehende Brückenwaagen). Zeigerwaagen. II. Federwaagen. Fünftes Capitel. Dynamometer. I. Dynamometer mit directer Messung bei fortschreitender Bewegung.

Die Leser werden hieraus die grosse Vollständigkeit des Werkes, bei aller verhältnissmässigen Kürze, erkennen, und sich gewiss in ihren Erwartungen, so weit der Herr Verfasser selbst die Absicht hat, denselben zu entsprechen, nicht getäuscht finden. Wir sehen den folgenden Abtheilungen mit Verlangen entgegen, und werden dieselben sogleich, nachdem sie uns zugegangen, zur Anzeige bringen. G.

---

## Vermischte Schriften.

Schriften des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. Erster Band. Jahrgang 1860/61. Mit 2 Tafeln und 6 Holzschnitten. Wien. Gerold. 1862.

Seit dem Winter 1855/56 werden, wie in anderen Städten, auch in der deutschen Kaiserstadt von einem Vereine jüngerer Naturforscher regelmässig naturwissenschaftliche Vorträge für das gebildete Publikum unter dem Namen der „Montags-Vorträge“ gehalten. Von Jahr zu Jahr hat sich die Theilnahme an diesen Vorträgen in der erfreulichsten Weise gesteigert, so dass gegen-

wärtig die Zahl der Gründer des Vereins und der Mitglieder oder Theilnehmer schon die hohe Zahl von 489 erreicht hat, welche 1260 Gulden Beiträge und eine 3procentige Staatsschuldverschreibung von 100 Gulden gezahlt haben, worunter sich natürlich eine grosse Menge freiwilliger Beiträge befinden; der gesetzliche jährliche Beitrag ist 1 Fl., aber bei Weitem die meisten Theilnehmer haben freiwillige Beiträge von 5, 10, 20, 100 Fl. gezahlt, so dass es dem Verein selbst schon möglich gewesen ist, ein Kapital von 700 Fl. zinsbar zu bestätigen. Wir finden unter den Theilnehmern 176 öffentliche und Privat-Beamte; 122 Geistliche, Professoren, Doctoren u. s. w.; 11 Militärs; 7 Künstler; 32 Studirende; 62 Fabrikanten, Kaufleute u. s. w.; 5 Handwerker; 74 Private; also Männer aus allen Ständen, was gewiss einen sehr vortheilhaften Schluss auf die Bildung der Bewohner Wiens zu machen gestattet, und einen erfreulichen Beweis von dem regen Interesse liefert, welches auch das grössere gebildete Publikum in Oesterreich an den neueren Eroberungen der Naturwissenschaften nimmt. Welchen Werth selbst die k. Akademie der Wissenschaften in Wien der Wirkung des Vereins beimisst, geht daraus hervor, dass die Vorträge jetzt in dem sogenannten grünen Saale des k. Akademie-Gebäudes gehalten werden. Wir haben diese Details über den jungen Verein hier mitgetheilt, weil wir solchen Unternehmungen, die wir für im höchsten Grade nützlich und fruchtbringend halten, wenn sie in so verständiger Weise wie im vorliegenden Falle begonnen und weiter geführt werden, von jeher unsere wärmste Theilnahme gewidmet haben.

Von jetzt an wird der Verein die gehaltenen Vorträge gedruckt herausgeben, und das erste Bändchen dieser Druckschriften (Jahrgang 1860/61) liegt in äusserst eleganter Ausstattung vor uns. Auf eine Beurtheilung der einzelnen Vorträge können wir hier natürlich schon der Beschränktheit des Raumes wegen nicht eingehen, und würden uns darauf auch um so weniger einlassen dürfen, weil deren wissenschaftlicher Inhalt oft ganz ausserhalb des Kreises unserer speciellen Studien liegt. So viel können und dürfen wir aber im Allgemeinen sagen, dass uns der Stoff überall in sehr verständiger Weise ausgewählt zu sein scheint, und zur Erweckung des Interesses an den Naturwissenschaften, sowie zu wirklicher Belehrung, überall sehr geeignet ist, wobei die Verfasser der Vorträge zugleich jederzeit die neuesten Entdeckungen und Eroberungen vorzugsweise berücksichtigt, aber auch ganz mit Recht zur Erweckung vaterländischen Geistes und Sinnes nicht selten auf die Leistungen im engeren Vaterlande besonders hingewiesen haben. Die Sprache ist überall frisch und belebt

dabei aber, was uns ganz besonders angesprochen hat, frei von allen leeren poetischen Floskeln und frei von einem Haschen nach pikanten Wendungen und Anspielungen, wie man sie leider in solchen Vorträgen oft zum Ueberdruss antrifft, überall aber so gehalten, dass sie wahrhafte Belehrung erstrebt, ohne auch nur im Entferntesten in einen pedantischen Schulmeisterton zu verfallen. So wie uns selbst die Lectüre dieser Vorträge nicht bloss eine sehr angenehme Unterhaltung, sondern auch die vielfachste Belehrung gewährt hat, glauben wir dieselben zu gleichem Zweck auch allen Lesern des Archivs recht sehr empfehlen zu müssen, und schliessen mit der folgenden vollständigen Angabe des Inhalts:



Möge der Verein in seinem verdienstlichen Wirken rüstig fortfahren und das gebildete, für Naturwissenschaft sich interessirende Publikum im nächsten Jahre wieder mit einem so vieles Lehrreiche darbietenden Bändchen beschenken! G.

Sitzungsberichte der königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften in München. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXLV. S. 16).

1861. I. Heft IV. Wir machen, als noch in den Kreis des Archivs gehörend, in diesem Hefte auf eine Notiz von Herrn Pettenkofer über die Theorie der Gasmesser. S. 418. und auf einen Aufsatz von Herrn A. Vogel jun.: Ueber die organischen Beimengungen des Wassers. S. 418—S. 420. aufmerksam.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

## XLVII.

---

### Geschichte der Mathematik und Physik.

G. Friedlein, Gerbert, Die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern. Ein Versuch in der Geschichte der Arithmetik. Mit 6 lithogr. Taf. Erlangen. 8⁰. 12 Ngr.

### Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

J. R. Boymann, Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und höhere Lehranstalten. I. Thl.: Geometrie der Ebene. 2. Aufl. gr. 8⁰. geh. Cöln und Neuss. $17\frac{1}{2}$ Ngr.

J. C. Hug, Die Mathematik in systematischer Behandlungsweise. Als Lehrbuch zur Vorbereitung für ein gründlicheres Fachstudium überhaupt, so wie insbesondere für den akademischen und polytechnischen Unterricht. I. Bd. gr. 8⁰. geh. Leipzig. $2\frac{1}{3}$ Thlr.

### Arithmetik.

H. Durège, Theorie der elliptischen Functionen. Versuch einer elementaren Darstellung. gr. 8⁰. geh. Leipzig. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

H. Fischer, Briot's und Bouquet's Theorie der doppelt-periodischen, insbesondere elliptischen Functionen mit Benutzung dahin einschlagender Arbeiten deutscher Mathematiker. 5. Lief. gr. 8⁰. geh. Halle. 20 Ngr.

A. Poppe, Lehrbuch der Elementar-Algebra in Verbindung mit zahlreichen Uebungsbeispielen und Aufgaben. gr. 8⁰. geh. Frankfurt a. M. 16 Ngr.

O. Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis. 3. Aufl. gr. 8⁰. geh. Jena. 2 Thlr. 20 Ngr.

L. Schrön's Logarithmen. 3 Tafeln. 2. Stereot.-Ausg. Inhalt: 1. 2. Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller

Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Secunden. $1\frac{1}{4}$ Thlr. — 3. Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile. $\frac{1}{2}$ Thlr. gr. Lex.-8⁰. geh. Braunschweig. 1 Thlr. $22\frac{1}{2}$ Ngr.

J. Strehl, Handbuch bei'm Unterrichte in der Arithmetik für Unter-Realschulen. I. Thl. 3. Aufl. II. u. III. Thl. 2. Aufl. 8⁰. geh. Wien. à 14 Ngr.

G. v. Vega, Logarithm.-trigonometrisches Handbuch. 46. Aufl. Bearb. von C. Bremiker. Lex.-8⁰. geh. Berlin. $1\frac{1}{4}$ Thlr.

E. Walder, Grundriss der Arithmetik mit Uebungsaufgaben. gr. 8⁰. geh. Nördlingen. 16 Ngr.

## Geometrie.

C. T. Anger, Elemente der Projectionslehre mit Anwendungen der Perspective auf die Geometrie. Neue Ausg. 8⁰. geh. Danzig. 15 Ngr.

N. M. Ferrers, An Elementary Treatise on Trilinear Coordinates, the Method of Reciprocal Polars, and the Theory of Projections. London. 8⁰. 2 Thlr. 18 Ngr.

Grelle, F., Analytische Geometrie der Ebene. Mit 91 in den Text gedr. Holzschnitten. Hannover. 8⁰. 2 Thlr.

O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. gr. 8⁰. geh. Leipzig. $2^2/_5$ Thlr.

J. Hieser, Lehrbuch der beschreibenden (darstellenden) Geometrie, Schattenlehre und Perspective. Für Realschulen. gr. 8⁰. geh. Wien. 1 Thlr. 20 Ngr.

F. Močnik, Geometrische Anschauungslehre für die Unter-Gymnasien. 2. Abth. 4. Aufl. gr. 8⁰. geh. Wien. 1 Thlr. 20 Ngr.

## Mechanik.

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch herausgegeben von O. Schlömilch. 2 Bde. 2. Aufl. Neue Ausgabe. gr. 8⁰. geh. Leipzig. 2 Thlr.

Hm. Hankel, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten. Gekrönte Preisschrift. Göttingen, Leipz. 4⁰. 20 Ngr.

## Praktische Mechanik.

F. Redtenbacher, Die Bewegungs-Mechanismen. Darstellung und Beschreibung eines Theils der Maschinen-Modell-Sammlung der polytechnischen Schule in Carlsruhe. Neue Folge. qu. Fol. geh. Mannheim. $3\frac{1}{3}$ Thlr.

## Astronomie.

K. Th. Anger, Populäre Vorträge über Astronomie. Nach

dem Tode des Verfassers herausgegeben von G. Zaddach. Lex.-8. geh. Danzig. 1¾ Thlr.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Herausgegeben von C. v. Littrow. 3. Folge. 10. Bd. Jahrg. 1860. Lex.-8°. 3⅓ Thlr.

Annales de l'observatoire impérial de Paris, publiées par U. J. Le Verrier. Observations. Tome 15. 1859. 4°. Paris. 40 fr.

Hand-Atlas der Erde und des Himmels. Neu redig. Volks-Ausgabe. In 50 Karten. 36. u. 37. Lief. Imp.-Fol. Weimar. à 8 Ngr.

F. Beckmann, Zur Geschichte des kopernikanischen Systems. gr. 8°. geh. Braunsberg. 8 Ngr.

## Physik.

Annales de l'observatoire physique central de Russie, publiées par A. T. Kupffer. 2 Nrs. et Compte-rendu annuel. Année 1859 et 1860. St. Petersburg u. Leipzig. cart. 7 Thlr.

O. Becker und Rolett, Beiträge zur Lehre vom Sehen der dritten Dimension. Lex.-8°. geh. Wien. 10 Ngr.

A. Bertin, Opuscules de physique et de méteorologie. In-4°. avec 2 pl. Strasbourg.

Correspondance météorologique, publication annuelle de l'administration des mines de Russie, redigée par A. T. Kupffer. Année 1859. gr. 4°. St. Petersburg u. Leipzig. 5 Thlr.

M. Davy, Recherches théoriques et expérimentales sur l'électricité considérée au point de vue mécanique. In-8. Paris.

E. Harless, Maassbestimmung der Polarisation durch das physiologische Rheoskop. gr. 4°. geh. München. 18 Ngr.

J. Jamin, Cours de physique de l'École polytechnique. T. III. 1. fascicule. Electricité dynamique. Paris. 8°. Mit Tafeln und Abbildgn. im Text. Preis des 1. Bds. 4 Thlr., Bd. 2 u. 3 zusammen 6 Thlr. 20 Ngr.

G. Kirchhoff, Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. gr. 4°. cart. Berlin. 1 Thlr.

K. Emil Kluge, Ueber die Ursachen der in den Jahren 1850 bis 1857 stattgefundenen Erd-Erschütterungen und die Beziehungen derselben zu den Vulkanen und zur Atmosphäre. Stuttgart. 8°. 24 Ngr.

Observations météorologiques faites à Nijné-Taguilsk (monts Ourals, gouvernement de Perm). Année 1860. Paris. 8°.

Observations météorologiques faites à neuf heures du matin à l'observatoire de Lyon, du 1. décembre 1857 au 1. décembre 1859, par M. Aimé Drian, sous la direction de M. Frenet. Lyon. 8°. Mit 1 Tabelle.

V. Raulin, Description physique de l'île de Crète. 2. partie. Géographie physique du sol. Météorologie. Bordeaux et Paris. 8⁰.

J. C. F. Zöllner, Grundzüge der allgemeinen Photometrie des Himmels. gr. 4⁰. cart. Berlin. 3 Thlr. 15 Ngr.

## Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 9. Bd. 1. Abth. gr. 4⁰. geh. München. 2 Thlr. 20 Ngr.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'académie impériale de St. Petersbourg. Tome III. Livr. 3. Lex.-8⁰. geh. Petersburg und Leipzig. 17 Ngr.

# Literarischer Bericht
## CXLVIII.

---

## Unterrichtswesen.

Anzeige der Vorlesungen auf der Grossherzoglich Badischen Polytechnischen Schule zu Carlsruhe für das Jahr 1861—62. Carlsruhe.

Adressbuch der Grossherzoglich Badischen Polytechnischen Schule in Carlsruhe. Studienjahr 1861—62. Carlsruhe.

So wie wir aus der ersteren Schrift die grosse Vollständigkeit der Vorlesungen, welche in dem Studienjahre 1861—62 an der polytechnischen Schule in Carlsruhe von ungefähr 50 Lehrern über alle Fächer der Technik und die vorbereitenden und Hülfswissenschaften gehalten werden, mit Freuden ersehen haben: so haben wir aus der zweiten Schrift wieder mit besonderem Interesse von der ungemein grossen Anzahl von Schülern aus fast allen cultivirten Ländern der Erde Kenntniss genommen, welche aus dieser von der Badischen Regierung dargebotenen reichen Quelle des technischen Unterrichts schöpfen. Die Schülerzahl beträgt im Ganzen 794, und die Anzahl der Ausländer, unter denen sich 11 aus Amerika, 7 aus Brasilien, 1 aus Java, u. s. w. befinden, ist in diesem Jahre noch grösser als im vorigen, nämlich 500 gegen 484. Wir freuen uns sehr über den Aufschwung, den hiernach der polytechnische Unterricht in Deutschland fortwährend nimmt und wiederholen unsere im Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 2. ausgesprochene Bitte, dass uns auch von anderen polytechnischen Lehranstalten ähnliche den Unterricht betreffende Schriften, wie die beiden obigen, für deren Uebersendung wir

hier unsern Dank von Neuem auszusprechen nicht verfehlen, mitgetheilt werden möchten, was bis jetzt noch nicht geschehen ist. Eine kurze Anzeige derselben würde immer in kürzester Zeit geliefert werden.

---

## Geometrie.

**Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden von George Salmon. Unter Mitwirkung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Leipzig. Teubner. 1860. 8°.**

Das zuerst im Jahre 1848, in dritter Ausgabe 1855 erschienene Werk: „A Treatise on Conic Sections. By the Rev. George Salmon, A. M. Fellow and Tutor, Trinity College, Dublin. London. 3. ed. 1855., welches übrigens keineswegs die Kegelschnitte allein, sondern überhaupt die analytische Geometrie der Ebene betrifft, hat sich mit Recht eines grossen Beifalls erfreuet, und ist bereits in mehrere Sprachen übersetzt worden. Dasselbe wird hauptsächlich nach unserer Meinung dadurch charakterisirt, dass es ausser dem Cartesischen Coordinatensystem auch die wichtigsten und fruchtbarsten der übrigen Coordinatensysteme, durch welche in neuerer Zeit die Geometrie weiter geführt worden ist, kennen und anwenden lehrt und überall eine zweckmässige Verbindung der rein analytischen und synthetischen Betrachtung erstrebt, eine Methode, die ja überhaupt vorzugsweise bei den englischen Geometern beliebt ist, und auch jedenfalls in mehrfacher Beziehung alle Empfehlung verdient. Es ist daher sehr dankenswerth, dass Herr Fiedler dieses ausgezeichnete Werk auch den deutschen Mathematikern durch eine nach unserer Ueberzeugung durchaus nichts zu wünschen übrig lassende freie deutsche Uebersetzung zugänglicher gemacht hat. Aber nicht bloss dieses hat Herr F. gethan. Seine deutsche Bearbeitung ist mindestens um ein Drittheil stärker als das Originalwerk, weil er von dem richtigen Gesichtspunkte ausging, durch Hinzufügung mehrerer wichtiger Arbeiten deutscher und französischer Geometer in Verbindung mit dem Originalwerke das zu geben, womit sich derjenige bekannt zu machen hat, welcher entweder zuerst an das Studium der neueren analytischen Geometrie herantritt oder nicht gerade sein Hauptstudium aus diesem Theile der mathematischen Wissenschaften zu machen

beabsichtigt, da deren Reich zu gross ist, und immer mehr und mehr so sehr in's Ungeheuere sich ausdehnt, dass eine völlige Beherrschung des ganzen Feldes für den Einzelnen geradezu unmöglich ist. Wir sind der Meinung, dass der Herr Verfasser diesen Zweck sehr gut erreicht hat, und ein mit besonderem Danke aufzunehmendes, jedwede Empfehlung verdienendes Werk geliefert hat. Auch verdient es besonders bemerkt zu werden, dass nach unserer Meinung dasselbe zugleich als eine der vortrefflichsten und reichhaltigsten Aufgaben-Sammlungen betrachtet werden kann. Unsere literarischen Berichte sind, wie schon mehrfach von uns bemerkt worden ist, nicht dazu bestimmt, tiefer eingehende Kritiken und ausführliche Relationen zu liefern, indem wir uns vielmehr stets mit einer ganz allgemeinen Charakterisirung des betreffenden Werkes begnügen müssen. Bei der grossen Würdigkeit der vorliegenden Schrift finden wir es aber angemessen, unseren Lesern im Folgenden wenigstens den Hauptinhalt nach den einzelnen Kapiteln mitzutheilen, damit dieselben einigermassen übersehen können, was ihnen hier geboten wird: I. Der Punkt. II. Die gerade Linie. III. Aufgaben über die gerade Linie. IV. Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung für die Gleichung einer geraden Linie. V. Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen. VI. Ableitung der Haupteigenschaften aller Curven zweiten Grades aus der allgemeinen Gleichung. VII. Der Kreis. VIII. Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis; Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung auf seine Gleichung. IX. Eigenschaften eines Systems von zwei oder mehreren Kreisen. X. Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades als Central-Gleichung: Ellipse und Hyperbel. XI. Die Parabel. XII. Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte. XIII. Die Methode des Unendlich-Kleinen, die Quadratur und Rectification der Kegelschnitte (hier wird Differential- und Integralrechnung angewandt). XIV. Die Methoden der abgekürzten Bezeichnung, die trimetrischen Coordinaten-Systeme und das Princip der Dualität in ihrer Anwendung auf die Kegelschnitte. XV. Die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades und die Algebra der linearen Transformationen. XVI. Geometrische Methoden (1. Die Methode der reciproken Polaren. 2. Die harmonischen und anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte. 3. Die Methode der Projectionen und die geometrischen Verwandtschaften des ersten Grades). Zusätze. Quellen-Nachweis.

Die Leser werden hieraus den Reichthum des ihnen gebotenen Inhalts erkennen und mögen sich daher das Buch nochmals zur

Beachtung empfohlen sein lassen. Die treffliche äussere Ausstattung macht der berühmten Verlangshandlung alle Ehre.

---

Alle die, welche für die feinere analytische und reine Geometrie sich interessiren, machen wir auf die folgenden Abhandlungen und Schriften des Herrn Professor L. Cremona in Bologna recht sehr aufmerksam.

Nota. Intorno ad alcuni teoremi di Geometria segmentaria. Cremona. 1857. 4°.

Diese Schrift enthält, mit besonderer Rücksicht auf die Kegelschnitte, sehr interessante Untersuchungen über homographische Figuren oder Systeme, und wird dadurch noch ganz besonders lehrreich, dass der Herr Verfasser bei diesen Untersuchungen das sogenannte Dreilinien-Coordinatensystem, worüber die Leser weitere allgemeine Belehrung u. A. in der vorher angezeigten deutschen Uebersetzung der Analytischen Geometrie der Kegelschnitte von Salmon finden können, in Anwendung gebracht, und dadurch einen neuen interessanten Beweis von der Fruchtbarkeit dieses Coordinatensystems geliefert hat, weshalb diese Schrift besonders zur Beachtung zu empfehlen ist.

Sulle superficie gobbe del terz' ordine. Memoria del Dottor L. Cremona, Professore di Geometria superiore nella Regia Università di Bologna. Communicata al Reale Istituto Lombardo di scienze, lettere e arti. 18. Aprile 1861. 4.

So wie die vorhergehende Schrift sich der neueren Methoden der analytischen Geometrie bedient, ist die in der vorliegenden gegebene Untersuchung über Flächen der dritten Ordnung ganz rein geometrisch gehalten, und verdient deshalb den Liebhabern der reinen Geometrie recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden. Je enger aber gerade in solchen rein geometrischen Darstellungen die einzelnen Sätze und Wahrheiten unter einander zusammenhängen, je consequenter dieselben stufenweise auf und aus einander folgen, je weniger der eine ohne alle vorhergehenden verstanden werden kann: desto weniger gestatten solche Schriften, die wie die vorliegende namentlich durch die grosse Allgemeinheit und rein speculative Natur der angestellten Betrachtungen dem Scharfsinne ihrer Verfasser alle Ehre machen, namentlich an diesem Orte einen Auszug, weshalb wir uns leider immer meistens darauf beschränken müssen, auf

ihre wissenschaftliche Bedeutung im Allgemeinen aufmerksam zu machen.

Dass bei der Universität in Bologna ein eigentlicher Lehrstuhl für sogenannte neuere oder höhere Geometrie gegründet, und durch Herrn Professor Cremona in so würdiger Weise besetzt worden ist, muss jedenfalls einen Jeden, der an dem Fortschritt der Wissenschaft in Italien lebhaften Antheil nimmt, mit der grössten Freude erfüllen.

Considerazioni di storia della Geometria in occasione di un libro di Geometria elementare publicato recentemente a Firenze del Dottor Luigi Cremona. Milano. 1860. 8°.

Diese 40 Seiten umfassende Schrift enthält eine ausführliche Relation über die unter dem Titel: Trattato di Geometria elementare di A. Amiot. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Giovanni Novi, Professore di meccanica nel liceo militare di Firenze. Con un atlante di 59 tavole. Firenze, Felice Lemonnier, 1858. erschienene italienische Uebersetaung der in Deutschland hinreichend bekannten Lecons nouvelles de géométrie élémentaire par M. A. Amiot, wobei zugleich der Verdienste, welche sich Herr Lemonnier in Florenz durch Veranstaltung italienischer Uebersetzungen von ausländischen ausgezeichneten Werken (z. B. von Bertrand, A. Serret, u. s. w.) erwirbt, rühmend gedacht wird. Aber nicht bloss wegen dieser Analyse eines in mehrfacher Beziehung vorzüglichen geometrischen Werkes ist die vorliegende Schrift des Herrn Professor Cremona interessant und wichtig; vielmehr enthält dieselbe eine so schöne und vollständige, von der grössten, tiefsten und ausgebreitetsten Kenntniss auf dem Gebiete aller Literaturen zeugende Darstellung der Eroberungen, welche in neuerer Zeit auf dem Gebiete der Elementar-Geometrie gemacht worden sind, oder auch über alte und ältere Sätze von Pappus, Desargues u. s. w. u. s. w., deren grosse Wichtigkeit erst in neuerer Zeit vollständige Anerkennung gefunden hat, wodurch der Elementar-Geometrie vielfach eine wesentliche Umgestaltung und Erweiterung zu Theil geworden ist: dass wir diese Schrift für einen sehr werthvollen Beitrag zur Geschichte der elementaren Geometrie überhaupt halten, und unseren Lesern eine sehr interessante und lehrreiche Lectüre durch dieselbe aus vollkommener Ueberzeugung versprechen können, daher auch auf dieselbe hier besonders aufmerksam zu machen wir nicht verfehlen.

---

## Astronomie.

Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Petersbourg, VII[e] série. Tome IV. No. I.

Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. (6.) Juli 1860 in Pobes. Nach den Berichten der einzelnen Theilnehmer zusammengestellt von O. Struve, Mitgliede der Akademie. (Mit 3 Tafeln). Gelesen am 16. November 1860. St. Petersburg. 1861. 4⁰.

Der von Herrn O. Struve der kaiserlich russischen Akademie der Wissenschaften über die Beobachtungen der grossen Sonnenfinsterniss vom Jahre 1860 in Pobes erstattete vorläufige, noch in Spanien abgefasste Bericht ist von uns im Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 8. angezeigt worden, mit der näheren Angabe aller diese nach Spanien unternommene denkwürdige Expedition begleitenden Umstände. Jetzt liegt uns nun auch der obige vollständige Bericht vor, den wir hier zu einer etwas genaueren Anzeige zu bringen uns beeilen, weil wir denselben für den wichtigsten halten, welcher bis jetzt über das merkwürdige Ereigniss erschienen ist. Wir bemerken zuerst im Allgemeinen, dass Herr O. Struve sich in diesem vorzugsweise streng wissenschaftlich gehaltenen Berichte nach unserer Meinung ganz mit Recht für's Erste daurauf beschränkt, nur die Resultate der Beobachtungen, — die beobachteten Thatsachen, — zu geben, natürlich mit genauer Angabe der dabei angewandten Hülfsmittel und Beobachtungs-Methoden, wodurch namentlich auch dieser wichtige Bericht für einen Jeden, der sich für diesen Gegenstand interessirt, ungemein lehrreich wird. Keineswegs aber beschränkt sich der Herr Verfasser auf seine eigenen Beobachtungen, sondern giebt auch die Resultate der Beobachtungen seiner Begleiter und einiger Anderen, namentlich Airy's, was gleichfalls die Wichtigkeit dieses Berichts noch wesentlich erhöhet, so dass derselbe von Jedem, der sich zu weiteren Reflexionen und Schlussfolgerungen über die merkwürdige Erscheinung veranlasst sehen dürfte, hauptsächlich und vorzugsweise berücksichtigt werden muss, wobei wiederholt der Umstand hervorzuheben ist, dass Herrn Otto Struve aus früheren Beobachtungen ähnlicher Erscheinungen vorzugsweise eine reiche Erfahrung zur Seite steht. — Der Herr Verfasser beginnt mit einer historischen Darstellung der hauptsächlich unter Airy's Leitung von England aus unternommenen Expedition, worüber das Nähere aus unserem früheren

oben erwähnten Berichte bekannt ist. Hierauf folgen die vorläufigen Beobachtungen zur Zeit- und Polhöhenbestimmung in Pobes, die Polhöhe und Länge der Dorfkirche in Pobes, die geographischen Coordinaten der von den einzelnen Beobachtern für die Sonnenfinsterniss gewählten Standpunkte. Dann geht der Herr Verfasser zu den Beobachtungen der Sonnenfinsterniss selbst über, und zwar: a) Bericht des Herrn Airy, welcher auf einem Hügel bei'm Städtchen Erenna links vom Flusse Bayas beobachtete, und von seiner Frau, seinem Sohne Wilfried, seiner Tochter Hilda, dem Eisenbahningenieur Herrn Stead und 9 Arbeitern, welche die Instrumente trugen, begleitet und bei den Beobachtungen mehrfach unterstützt wurde. b) Bericht von Otto Struve. c) Bericht von A. Winnecke. d) Bericht von F. A. Oom. e) Bericht des Herrn C. Weiler, Ingenieurs und ehemaligen Zöglings der polytechnischen Schule in Carlsruhe. f) Bericht des Herrn Stenglein, Eisenbahningenieurs. Drei sehr schöne illuminirte lithographirte Tafeln machen den Schluss dieses überaus vollständigen und wichtigen Berichts, für welchen die Wissenschaft dem Herrn Verfasser den lebhaftesten Dank schuldet.

Kalender für alle Stände. 1862. Herausgegeben von Karl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Mit einer Sternkarte. Wien. Carl Gerold. 8°.

Der Jahrgang 1861 dieses Kalenders ist im Literar. Ber. Nr. CXL. S. 9. angezeigt worden, und seine Einrichtung, die in dem neuen uns vorliegenden Jahrgange wesentliche Abänderungen nicht erlitten hat, kann also im Ganzen als bekannt vorausgesetzt werden. Wir können daher im Allgemeinen auf jene frühere Anzeige verweisen, indem wir jedoch wiederholt und ganz besonders darauf aufmerksam machen, dass wir auch diesen neuen Jahrgang wie seine Vorgänger als eine sehr zweckmässige kleine Ephemeride Liebhabern der Himmels-Beobachtung bestens empfehlen können, und dem verdienstlichen Unternehmen deshalb ungehinderten Fortgang recht sehr wünschen. Ausser der Ephemeride, der wir eine bessere zu dem genannten Zweck jetzt nicht an die Seite zu setzen wüssten, enthält der vorliegende Jahrgang aber noch vieles andere Lehrreiche. Namentlich weisen wir hin auf die sehr vollständige Darstellung der neueren astronomischen Entdeckungen und auf die Uebersicht des Planetensystems, welche man in solcher Vollständigkeit und Genauigkeit schwerlich anderwärts antreffen wird, worüber die Leser aus den

folgenden einzelnen Rubriken, aus denen dieselbe besteht, sich selbst einen Schluss zu machen im Stande sein werden: Alphabetisches Verzeichniss der Asteroiden. Verzeichniss der Asteroiden nach der Zeit ihrer Entdeckung, mit ihren Zeichen, dem Tage der Entdeckung, dem Namen des Entdeckers und dem Ort der Entdeckung. Elemente sämmtlicher Planetenbahnen (überaus vollständig, sorgfältig und genau). Der Mond. Satelliten des Jupiter. Satelliten des Saturn. Satelliten des Uranus. Satelliten des Neptun. Phasen des Saturnringes in den J. 1861 und 1862. Endlich finden die Leser auf S. 94—S. 116 eine erschöpfende Geschichte des Fernrohrs nach Grant, von der ersten Entdeckung bis zu Lord Rosse's Riesen-Telescopen und Foucault's und Steinheil's verdienstlichen Arbeiten, die wir namentlich auch Physikern als besonders interessant zur Beachtung recht sehr empfehlen. Rücksichtlich des eigentlichen Erfinders des Fernrohrs spricht sich der Verfasser auf S. 99. folgendermassen aus: „Unser Schluss lautet also dahin, dass Lipperhey" — welcher auf S. 98. John Lipperhey, Brillenmacher, aus Wesel gebürtig, ansässig in Middelburg, genannt wird, — „zuerst Fernröhre herstellte, und dass auch er zuerst die Welt mit dieser Erfindung bekannt machte, ihm daher gerechter Anspruch auf die damit verbundene Ehre zukomme". Man muss das vielfach interessante, rücksichtlich der ersten Erfindung selbst theilweise aus den Acten der Generalstaaten vom Jahre 1608, die in den Haager Regierungs-Archiven bewahrt werden, geschöpfte Detail in dem sehr verdienstlichen Aufsatze selbst nachlesen.

Eine meteorologische Charakterisirung des Jahres 1860 schliesst das Büchlein, zu dessen weiterer Bekanntwerdung wir durch diese Mittheilungen von Neuem beizutragen wünschen.

---

In dem neuerlich erschienenen Buche:

Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwickelung dargestellt von Dr. C. Bruhns, Astronom der neuen Sternwarte und Professor der Astronomie zu Leipzig. Eine gekrönte Preisschrift. Leipzig. 1861.

steht auf S. 65. wörtlich Folgendes: „Die Reihe für $r$ wird, wenn $z$ einer grossen Zenithdistanz angehört, nur etwas mehr convergiren, wie die Reihe"

$$„1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots$$

Nun ist ja aber

$$1=1,\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad \frac{1.3}{2.4}>\frac{1}{3},\quad \frac{1.3.5}{2.4.6}>\frac{1}{4},\quad \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}>\frac{1}{5},\ \ldots;$$

und es lässt sich leicht zeigen, dass, wenn nur $n>1$ ist, immer

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}>\frac{1}{n+1}$$

ist. Weil nämlich

$$(2n+1)(n+2)=2n^2+5n+2,\quad 2(n+1)^2=2n^2+4n+2$$

ist, so ist offenbar

$$(2n+1)(n+2)>2(n+1)^2,\quad \text{also}\quad \frac{2n+1}{2(n+1)}>\frac{n+1}{n+2}.$$

Ist nun die Ungleichung

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}>\frac{1}{n+1}$$

richtig, so ist nach dem so eben Bewiesenen auch

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}>\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2},$$

also

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n+1)}{2.4.6\ldots.2(n+1)}>\frac{1}{n+2},$$

welche Ungleichung aus der obigen unmittelbar hervorgeht, wenn man darin $n+1$ für $n$ setzt, woraus die Richtigkeit des Satzes sogleich mittelst des Schlusses von $n$ auf $n+1$ erhellet. Also sind die Glieder der Reihe

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1.3}{2.4},\quad \frac{1.3.5}{2.4.6},\quad \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},\ \ldots$$

wenigstens vom dritten an grösser als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\ \ldots.$$

Es ist ja aber bekannt, dass diese letztere Reihe keine convergente, sondern eine d i v e r g e n t e Reihe ist, woraus sich ergiebt, dass um so mehr auch die Reihe

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1.3}{2.4},\ \frac{1.3.5}{2.4.6},\ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},\ \ldots.$$

eine divergirende Reihe ist. Die oben angeführten Worte sagen also nicht mehr und nicht weniger als Folgendes aus:

„Die Reihe für *r* wird, wenn *z* einer grossen Zenithdistanz angehört, nur etwas weniger **convergiren** wie die **divergirende** Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots."$$

Wer dies versteht, den beneiden wir um seine Capacität und seinen mathematischen Scharfsinn!

In der sehr schönen Schrift des trefflichen Lambert: Les proprietés remarquables de la route de la lumière. A la Haye. 1758. heisst es freilich auch auf p. 46. „la convergence des Coefficiens n'est guères plus grande que celle de la suite $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1.3}{2.4}$, etc."; das Obige ist also eigentlich eine Uebersetzung dieser Worte Lamberts oder denselben nachgeschrieben, und Dergleichen kann und muss man wohl in einer sonst trefflichen Schrift aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts entschuldigen; aber jetzt im Jahre 1860 sollten doch solche Dinge ohne alle weitere Bemerkung und ohne alle Kritik in einem mathematischen Buche nicht mehr gedruckt und für baare Münze ausgegeben werden. Wollte man überhaupt die in dem oben genannten Buche in sehr grosser Anzahl vorkommenden sogenannten unendlichen Reihen sämmtlich rücksichtlich ihrer Convergenz einer strengen Untersuchung unterwerfen, so würde man wahrscheinlich theilweise zu einem Manchen — (uns freilich nicht) — sehr überraschenden Resultate gelangen. Namentlich Anfänger, die erfahrungsmässig leider nur zu oft Alles, was in mathematischen Büchern steht, für baare Münze zu nehmen gewohnt sind, verdienen bei solchen Gelegenheiten wie im vorliegenden Falle gewarnt und zur Anwendung sorgfältiger Kritik ermahnt zu werden, was auch einzig und allein der Zweck der vorstehenden Zeilen ist.

---

## Nautik.

Almanach der österreichischen Kriegsmarine für das Jahr 1862. Mit Genehmigung des hohen Marine-

**Obercommando's herausgegeben von der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. Wien. Gerold. 8°.**

Eine Anstalt wie die im Jahre 1860 in's Leben gerufene hydrographische Anstalt der k. k. Kriegsmarine muss man der Marine-Verwaltung eines jeden Landes wünschen; denn dieselbe hat zur Aufgabe:

1) dafür zu sorgen, dass die Kriegsschiffe S. M. mit den erforderlichen hydrographischen Hülfsmitteln, als: Seekarten, nautischen Hülfsbüchern und Instrumenten von erprobter Verlässlichkeit versehen werden;

2) zur Förderung der Hydrographie und verwandter Wissenschaften nach Kräften beizutragen;

3) dahin zu wirken, dass die Fortschritte im Gebiete der Hydrographie und Nautik für S. M. Marine möglichst nutzbringend gemacht werden;

und ist also die eigentlich wissenschaftliche See-Behörde in Oesterreich. Der Director dieser nachahmungswerthen Anstalt, welche ihren Sitz in Triest hat, ist der um die Nautik schon so vielfach verdiente Herr Professor Dr. Franz Schaub, und unter ihm arbeiten für jetzt drei Hydrographen zweiter Klasse, drei Adjuncten zweiter Klasse und ein Assistent. Die drei Hydrographen (die Herren Dr. Adalbert Kunes, Johann Zescevich und Robert Müller) versehen die Geschäfte, welche durch die Sternwarte, die Verwaltung des Instrumenten-Vorraths, des Karten-Archivs und der Bibliothek bedingt werden, und halten für die Marine-Cadetten Vorträge über Mathematik, Nautik, Physik, Mechanik und Maschinenlehre; zwei der drei Adjuncten (die Herren Johann Rund, Dr. Franz Paugger*), Robert Müller) sind als Lehrer der Mathematik am Eleven-Curse auf der Fregatte „Venus" eingeschifft; der dritte Adjunct und der Assistent (Herr Dr. Gustav Werner) werden nach Bedürfniss bei den einzelnen Abtheilungen verwendet. — Von dieser wissenschaftlichen Anstalt wird von jetzt an der nautische Almanach herausgegeben, dessen erster Jahrgang uns vorliegt. Derselbe enthält zuerst den Kalender und eine kleine nautische Ephemeride, welche die Declination der Sonne und die Zeitgleichung bis auf Secunden und Zehntheile der Secunde genau, nebst deren stündlichen Aenderungen, die mittlere Zeit der Culmination des Mondes bis auf Zehntheile der Minute genau, ausserdem den

*) M. s. eine Abhandlung von demselben im Archiv T. XXXV. S. 21.

Sonnenhalbmesser für den 1sten und 15ten jedes Monats, die Mondesphasen und die Sichtbarkeit der Planeten liefert. Ausserdem enthält der Almanach Aufsätze von allgemeinem nautischen Interesse, von denen wir namentlich auf den ersten über die so wichtige locale Abweichung des Compasses auf Schiffen aufmerksam machen. Wer da weiss, wie verderblich die locale Abweichung des Compasses den Schiffen werden kann und notorisch schon oft geworden ist, wird das überaus Verdienstliche dieser mit grosser Deutlichkeit verfassten Anweisung zur Bestimmung der localen Abweichung gewiss anerkennen und sich dieselbe zu sorgfältigster Beachtung dringend empfohlen sein lassen. Dieselbe ist mit Benutzung der Abhandlung: „Sulle correzioni della bussola“ und handschriftlicher Mittheilungen des Hydrographen Herrn J. Zescevich von Herrn Professor Schaub verfasst. So einfach auch mittelst einer Tafel der localen Abweichung die Correctionen der Compass-Course und Peilungen sind, so darf doch nicht übersehen werden, dass diese Correctionen oft in grosser Eile und unter schwierigen Verhältnissen zu machen sind, und dass ein begangener Fehler dem Schiffe die grösste Gefahr bringen kann. Daher darf der Werth eines mechanischen Hülfsmittels hiezu nicht zu gering angeschlagen werden. Zu diesem Zwecke empfiehlt sich ganz besonders das von Herrn Zescevich, der bekanntlich sich schon durch die Angabe sinnreicher graphischer Methoden zur Auflösung sphärischer Dreiecke verdient gemacht hat, angegebene sogenannte Dromoscop, welches in der vorliegenden Abhandlung beschrieben und abgebildet, und auf den österreichischen Kriegsschiffen allgemein eingeführt ist. Dieses Instrument giebt die Correction für locale Abweichung und Missweisung zu gleicher Zeit, und muss allen Marine-Verwaltungen zur Beachtung recht sehr empfohlen werden.

Hierauf folgt ein überaus vollständiges Verzeichniss aller Leuchtthürme im mittelländischen, schwarzen und azowschen Meere, natürlich mit Angabe ihrer Länge und Breite und sonstiger Beschreibung ihrer Eigenthümlichkeit, welches die allgemeinste Beachtung verdient. Die Zahl dieser Leuchtthürme beträgt 382, woraus man sieht, wie sehr in den drei genannten Meeren für die Sicherheit der Schifffahrt gesorgt wird, vor welchen Bestrebungen man noch mehr Achtung gewinnt, wenn man bedenkt, dass von jenen 382 Leuchtthürmen sehr nahe 200 allein in den zehn Jahren von 1850—1860 errichtet worden sind. Das mögen sich beiläufig die deutschen Flottenmänner gesagt sein lassen, die immer nur an schmucke Schiffe, an hübsche Corvetten und Fregatten denken, aber gar nicht daran,

welche ungeheuren Summen, und welche ungeheuren Anstrengungen der Regierungen sonst noch nöthig sind, wenn gehörig für die Sicherheit der Schifffahrt, die doch immer die Hauptsache bleibt, gesorgt werden soll, was in den deutschen Binnenmeeren gerade am Nöthigsten und ein Haupterforderniss ist. Diesem Verzeichnisse schliesst sich eine sehr deutliche Beschreibung des Aneroid-Barometers von Vidi und des Metall Barometers von Bourdon an. Sehr sinnreich ist jedenfalls die auf S. 89. und S. 90. besprochene Idee des Herrn Commodore von Wüllerstorf, Beobachtungen mit diesen beiden Barometern zur Bestimmung der Abnahme der Schwere auf der Erde von den Polen nach dem Aequator hin zu benutzen, zu welchem Zwecke der berühmte Führer der Novara bei seiner Weltumsegelung eine Reihe vergleichender Beobachtungen am Aneröid- und Quecksilber-Barometer in verschiedenen Breiten angestellt hat, worüber wir weiteren Veröffentlichungen mit Verlangen entgegen sehen. Den Beschluss macht die Genealogie des regierenden Kaiserhauses und der vollständige Personalstand der k. k. Kriegs-Marine, welcher letztere in mehrfacher Beziehung für Jeden, der sich für die Fortschritte des Seewesens interessirt, von grossem Interesse sein muss.

Wir wünschen diesem nützlichen und verdienstlichen Unternehmen den besten Fortgang.

---

## Physik.

**Jahresbericht über die Fortschritte und Leistungen im Gebiete der Fotografie und Stereoskopie mit genauer Nachweisung der Literatur. Für 1857 Von Dr Karl Jos. Kreutzer, Kustos an der k. k. Universitäts-bibliothek in Wien. Wien. Seidel. 1861. 8.**

Die beiden ersten Jahrgänge dieses sehr verdienstlichen Jahresberichts über eine der schönsten und wichtigsten neueren Künste sind im Literar. Ber. Nr. CXX. S. 5. und Nr. CXXV. S. 5. angezeigt worden. Der vorliegende Jahrgang (1857) ist zu einem Werke von 580 Seiten angewachsen, mehrfach mit Figuren und Illustrationen ausgestattet, und jedenfalls gegenwärtig das vollständigste Werk über Photographie und Stereoskopie, welches Niemand, der sich mit dieser schönen Kunst in technischer oder wissenschaftlicher Rücksicht beschäftigt, entbehren kann, das da-

her dringend zur allgemeinsten Beachtung empfohlen zu werden verdient, so wie seinem fleissigen und kenntnissreichen Verfasser für dasselbe der wärmste Dank gebührt. Namentlich machen wir darauf aufmerksam, dass jetzt alle zur Sprache kommenden Operationen sehr vollständig und deutlich beschrieben worden sind, so dass nur wenige Fälle vorkommen dürften, wo es für einen mit dem Gegenstande an sich im Allgemeinen Vertrauten nöthig wäre, auf die Quellen, aus denen geschöpft worden ist, selbst zurückzugehen, was namentlich Künstler, denen die übrigens überall sehr sorgfältig und genau angegebenen Quellen meistens nicht leicht zugänglich sein werden, dem Herrn Verfasser zu besonderem Danke verpflichten wird. Die zur Sprache gebrachten Gegenstände sind so mannigfaltig, dass es ganz unmöglich ist, hier auch nur eine angenäherte Vorstellung von dem überaus reichen Inhalte zu geben, wodurch wir genöthigt werden, uns auf die folgende nur ganz allgemeine Uebersicht zu beschränken: I. Die Erzeugung von Lichtbildern und die dabei vorkommenden Arbeiten. A. Fotografie auf mit lichtempfindlichen Stoffen getränktem Papier. B. Fotografie auf lichtempfindlichem Eiweiss, Leim u. dergl. C. Fotografie auf Kollod. D. Einzelnheiten bei den verschiedenen Verfahrungsarten. E. Wiedergabe von Farben. F. Uebertragung der Bildung von einer Oberfläche auf die andere. II. Anwendungen der Fotografie. (*Dieser* Abschnitt ist in diesem Jahrgange ausserordentlich reichhaltig, und bietet des Interessanten ungemein Vieles dar; besondere Berücksichtigung haben auch die so wichtigen Anwendungen in der Astronomie gefunden, bei dem Monde, bei Sterngruppen u. s. w.) III. Apparate. Instrumente. Vorrichtungen. IV. Fisikalische und chemische Bemerkungen. V. Verschiedenes. VI. Das Stereoskop. Ein sehr vollständiges Namen- und Sach-Register erleichtert den Gebrauch des mit dem grössten Fleisse verfassten Buches ungemein, und die äussere Ausstattung ist, wie bei allen neueren Erzeugnissen der Wiener Presse, ungemein nett und elegant.

Beiläufig möge noch erwähnt werden, dass der Herr Verfasser auch eine sehr verdienstliche Zeitschrift für Fotografie und Stereoskopie herausgiebt, von welcher monatlich 2 Hefte zu 2 bis $2\frac{1}{2}$ Bogen in $4^0$ erscheinen.

---

## Vermischte Schriften.

Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle

scienze dell' Istituto di Bologna. Anno accademico 1860—1861. Bologna. 1861.

Der Herausgeber des Archivs freut sich sehr und erkennt es im Interesse seiner Leser mit dem verbindlichsten Danke an, dass ihm in der freundlichsten und zuvorkommendsten Weise Gelegenheit geboten worden ist, die Arbeiten einer der berühmtesten und ältesten Akademieen der Wissenschaften in seiner Zeitschrift zur Anzeige zu bringen, die sich aber natürlich auf die in den Kreis des Archivs gehörenden Wissenschaften beschränken muss, und wegen der Beschränktheit des Raumes, eben so wie bei den übrigen Akademieen, im Allgemeinen nur kurz sein kann.

Der Bericht der berühmten Akademie der Wissenschaften des Instituts in Bologna für das akademische Jahr 1860—1861 liegt uns vor, und hat folgenden Inhalt, wobei wir bemerken, dass in diesem Rendiconto nicht etwa bloss die Titel der gelesenen Abhandlungen, die vollständig später in den eigentlichen Gesellschaftsschriften erscheinen, sondern überall sehr vollständige Auszüge aus denselben gegeben sind, welche den mit dem betreffenden Gegenstande nicht ganz unbekannten Leser immer in den Stand setzen, sich ein genaueres Bild von dem Inhalte der Abhandlung und von den wichtigsten Resultaten, zu welchen der Verfasser derselben gelangt ist, zu machen. — p. 7 — p. 13. Prof. **Lorenzo Respighi**: Sulle osservazioni circumzenitali delle Stelle. — p. 20. — p. 23. wird Nachricht gegeben von einigen autographischen Manuscripten des berühmten Galvani, die sich in der von der Akademie publicirten schönen Ausgabe der Werke Galvani's (1841) nicht finden, für die Geschichte der Entdeckung des Galvanismus von grosser Wichtigkeit sind, und von denen u. A. auf p. 20. Folgendes gesagt wird: „Ora è avvenuto che nel decorso ultimo ventennio, siensi trovati otto altri manoscritti, autografi dello stesso Galvani, alcuni dei quali molto adatti a dimostrare, che le esperienze praticate dal medesimo, e gli studi suoi intorno alla dimostrazione della sua teorica sul fluido elettro-nerveo, furono anteriori di almeno dieci anni alla pubblicazione del Commentario*), e che anzi nell' anno 1781 egli adoperava la macchina elettrica, col fine di tentare la influenza della elettricità nel moto muscolare, esperimentando degli animali a sangue caldo, e degli altri a sangue freddo in vario modo assissiati od uccisi per mezzo di gas mefitici, e praticando pure altre relative esperienze nelle ova covate.“ Die Titel dieser acht

*) Commentarius de viribus electricitatis etc.

Manuscripte sind auf p. 21. vollständig angegeben, und wir können nicht umhin, einen Jeden, der sich für die Geschichte der Physik interessirt auf diesen Artikel in dem vorliegenden Rendiconto aufmerksam zu machen. — p. 43.—p. 47. Prof. **P. Domenico Chelini**: Del problema relativo alla legge, onde un Ellissoide eterogeneo propaga la sua attrazione da punto a punto, soluzione diretta ed elementare. — p. 58.—p. 63. Prof. **L. Cremona**: Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. — p. 71.—p. 76. Prof. **Lorenzo Respighi**: Influenza del moto dei mezzi rifrangenti sulla propagazione dei raggi luminosi da cui sono attraversati. — p. 92. — p. 98. **Cav. Alessandro Palagi**: Fenomeni elettrici dovuti all' avvicinarsi e all' allontanarsi reciproco de' corpi. Nuove sperienze. — p. 102.—p. 106. **Dott. Giulio Casoni**: Dell' Irraggiamento Solare.

Der Raum erlaubt uns für jetzt leider nur die Angabe der Titel dieser Abhandlungen, auf die wir, wenn sie vollständig erschienen sein werden, theilweise zurückzukommen hoffen.

---

Der mir so eben gütigst zugesandte Catalog von Büchern aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie und Physik von S. Calvary & Comp. Berlin, Mittel-Strasse Nr. 61. enthält in 4294 Nummern eine sehr grosse Anzahl der werthvollsten grösseren Bücher und kleineren zum Theil sehr seltenen Abhandlungen aus den genannten wissenschaftlichen Gebieten, so dass ich denselben hier dringend zu empfehlen für meine Pflicht halte. Derselbe ist nach den Verfassern genau lexicographisch geordnet und mit grosser wissenschaftlicher Genauigkeit angefertigt; und wird, wenn Herr Calvary nach seinem Versprechen in dem Vorwort ihn durch Fortsetzungen von Zeit zu Zeit ergänzt, zugleich als ein sehr werthvolles literarisches Repertorium, also keineswegs als in die Klasse gewöhnlicher Antiquariats-Cataloge gehörend zu betrachten sein, verdient deshalb auch sorgfältig aufbewahrt zu werden. Die Fortsetzungen werde ich, sobald sie mir zugehen, sogleich anzeigen.

Den 25. Januar 1862. Grunert.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

## XLVIII.

### Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

A. Riedel, Der praktische Theil der niedern Mathematik für Fortbildungsschulen und für die Unteroffiziere technischer Waffen. gr. 8. geh. Stuttgart. 22½ Ngr.

### Arithmetik.

Hm. Grassmann, Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin. 8. 2 Thlr.

H. B. Lübsen, Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung. (Differential- und Integralrechnung.) Zum Selbstunterricht. 2. Aufl. gr. 8. Leipzig. 2 Thlr. 20 Ngr.

F. Močnik, Lehrbuch der Arithmetik für die Unter-Gymnasien. 1. Abthl. 12. Aufl. gr. 8. geh. Wien. 16 Ngr.

F. Močnik, Manuale di aritmetica. Tradotto ad uso dei ginnasi austro-italiani dal G. Zampieri. Parte I. 3. Ediz. geb. Wien. 2 Thlr.

O. Schlömilch, Compendium der höhern Analysis. 2. Aufl. 1. Bd. 1. u. 2. Lief. gr. 8. geh. Braunschweig. 1½ Thlr.

### Geometrie.

G. F. Childe, Singular Properties of the Ellipsoid and Associated Surfaces of the North Degree. London. 8. 4 Thlr. 6 Ngr.

Geometrya. To iest miernicka nauka, po polsku krótko napisána z greckich y z łacinskich ksiag. Naydziesz też tu iako naszy miernicy zwykli mierzyć imienie na włóki, albo na lany. Item jugerum romanum, iako wielé ma w sobie. Item, iako wieżę albo co inszégo wysokiego zmierzyć, álbo dálekość iáką. Ná przykład kiedyby chciał wiedzieć; iako daleko do zamku przez błoto, albo przez wodę, etc. Teraz nowo wydana roku 1566. W Krakowie Lazarz Andrysowic wybiiał. Podobizna wykonana przez Sew. Oleszczyńskiego. Warzcawa. 12°. 25 Ngr. — (Geometrie. Aus dem Originale von 1566, bei Lazarus Andrysowitsch in Krakau, facsimilirt von S. Oleszczyński. Warschau.)

F. Močnik, Geometrische Anschauungslehre für die Unter-Gymnasien und Realschulen bearbeitet. I. Abth. 5. Aufl. gr. 8. geh. Wien. 12 Ngr.

### Astronomie.

Annales de l'Observatoire impérial français, publiées par U. J. Le Verrier. Mémoires. Tome VI. 4. Paris. 27 fr.

Annales de l'Observatoire impérial de Paris, publiées par

U. J. Le Verrier. Observations. Tome XIV. 1858. Paris. 4. 13 Thlr. 10 Ngr.

H. Birnbaum, Grundzüge der astronomischen Geographie. Vorlesungen für Gebildete. gr. 8. geh. Leipzig. 1 Thlr. 15 Ngr.

H. Göhring, Der Zeitmesser. Tafeln der Mittagsverbesserung für die Breitengrade 30 bis 60 und der Zeitgleichung für alle Tage. gr. 8. geh. Paderborn. 20 Ngr.

E. Greswell, Origines kalendariae hellenicae; or, the history of the primitive calendar among the Greeks. 6 vols. 8. London. Cloth. 87 s.

Handatlas der Erde und des Himmels. Neu redig. Volksausg. 40.—43. Lief. Imp.-Fol. Weimar. à 8 Ngr.

E. W. Hartwig, Ueber die Berechnung der Auf- und Untergänge der Sterne. Nebst einigen Hülfstafeln. Schwerin. 8. Mit 1 Steintaf. 12½ Ngr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1864. Herausgeg. von J. F. Enke, unter Mitwirkung von Wolfers. gr. 8. Berlin. 3 Thlr.

J. Kepleri opera omnia. Ed. Ch. Frisch. Vol. IV. Pars I. Lex.-8. geh. Frankfurt a. M. 2 Thlr.

### Nautik.

Dr. F. Schaub, Beginselen der sterrekunde. Handleiding bij het onderwijs in de stuurmanskunst. Naar het Hoogd. door J. van Loghem. Post. 8. (Met houtvig-netten.) Leyden. 1 fr. 90 c.

### Physik.

C. H. D. Buys-Ballot, Sur la marche annuelle du thermomètre et du baromètre en Neèrlande et en divers lieux de l'Europe, déduite d'observations simultanées de 1849 à 1859. gr. 4. Amsterdam v. d. Post. 3 fr.

Correspondance météorologique, publication annuelle de l'administration des mines de Russie, redigée par A. T. Kupffer. Année 1859. St.-Pétersbourg. Leipzig. 4. 5 Thlr. (Bildet Nr. 2 der „Annales de l'observatoire phys. central de Russie." Année 1858.

Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Von K. Kreil. 8. Bd. Jahrg. 1856. gr. 4. Wien. 8 Thlr.

E. Külp, Lehrbuch der Experimental-Physik. 3. Bd. Die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus. gr. 8. geh. Darmstadt. 2 Thlr.

### Vermischte Schriften.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle gegründeten Journals herausgegeben von C. W. Borchardt. 60. Bd. 1. Hft. gr. 4. Berlin. Preis des Bandes 4 Thlr.

R. Wolf, Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 3. Aufl. 8. geh. Bonn. 1 Thlr.